

А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, М. И. КУДРЯШОВ
 (Новосибирск)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ИССЛЕДОВАНИЯХ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

В работе рассматриваются некоторые методы измерения и восстановления одномерных оптических сигналов с изменяющимися во времени параметрами. Подобные задачи возникают, например, при регистрации формы контура спектральной линии в исследованиях быстропротекающих процессов. Обычно на практике для экспериментатора представляет интерес не столько форма функции распределения интенсивности излучения на выходе спектрального прибора и ее динамика, сколько поведение вполне определенных функционалов: центра спектральной линии, дисперсии, асимметрии и т. д. Значения этих функционалов обычно вычисляются после записи формы контура спектральной линии. В этом случае необходимо иметь регистрирующий тракт с большой информационной пропускной способностью, так как запись контура осуществляется за временной интервал существенно меньший, чем характерное время изменения его параметров [1].

В первой части работы описан способ аппаратного вычисления функционалов (начальных моментов) оптического сигнала $\psi(x, t)$, реализуемый на входе регистрирующего тракта, в его оптической части. Это дает возможность существенно сократить объем данных, предназначенных для передачи по каналу связи, а также эффективно сгладить случайный шум.

Во второй части описывается метод восстановления входного сигнала $\psi(x, t)$, сглаженного действием аппаратной функции регистрирующей системы $A(x)$, которая рассматривается как ядро интегрального уравнения свертки

$$\int_a^b \psi(\xi, t) A(x - \xi) d\xi = f(x, t). \quad (1)$$

Вначале описан алгоритм восстановления моментов входного сигнала M_N^f по заданным начальным моментам аппаратной функции M_N^A и выходного сигнала M_N^f . В основу алгоритма положена теорема о сложении логарифмических моментов (производных от логарифма производящей функции в нуле) при свертке функций ψ и A .

Затем описан алгоритм восстановления формы входного сигнала в виде степенного полинома $(N-1)$ -й степени через N известных начальных моментов функции $\psi(x, t)$. Для нахождения коэффициентов поли-

нома производится разложение функции ψ в ряд по ортонормированным полиномам Лежандра. Простота данной процедуры определяется идентичной структурой функционалов, описывающих коэффициенты C_N разложения ψ в ряд по полиномам Лежандра и начальные моменты M_N^ψ .

В третьей части работы обсуждаются результаты проверки метода восстановления входного сигнала на моделях, в четвертой части приводятся результаты восстановления спектра люминесценции линий R рубина.

1. Способ аппаратного вычисления начальных моментов. Процедура аппаратного вычисления N -го начального момента одномерного пространственного сигнала в интервале $0 \leq a \leq x \leq b$ в оптической части регистрирующей системы сводится к размещению в плоскости фокусировки ψ на выходе спектрального прибора маски с

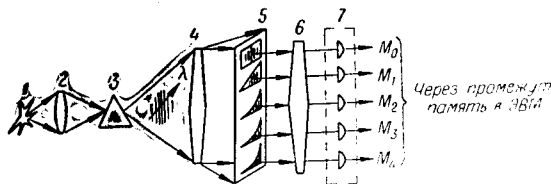


Рис. 1.

параболическим законом пропускания светового потока вдоль оси x и к регистрации суммарного светового потока, прошедшего через маску (рис. 1). На рис. 1 обозначено: 1 — излучающий объект; 2, 4, 6 — объективы; 3 — спектральный прибор; 5 — маски; 7 — фотоэлектрические приемники.

Пусть параболический закон пропускания светового потока задается переменной высотой h маски, т. е. $h = (x-a)^N$. Тогда световой поток с элементарного участка Δx вблизи точки x равен $\Delta\Phi_i \sim (x-a)^N \Phi(x_i) \Delta x$,

а полный поток $\Phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i=a}^b \Delta\Phi_i = \int_a^b (x-a)^N \Psi(x) dx = M_N^\Psi$. Нетрудно видеть, что с точностью до постоянного коэффициента на выходе устройства вычисляется N -й начальный момент функции ψ относительно точки a . Данный метод был проверен экспериментально. В качестве сигнала ψ использовался желтый дублет спектра ртутной лампы низкого давления. В таблице приведены значения вычисленных и измеренных нормированных начальных моментов.

Отклонение экспериментальных значений от расчетных обусловлено в основном неточностью изготовления масок и в принципе может быть уменьшено. Объектив 4 работал с увеличением, маски имели размеры 20×20 мм, параболический закон пропускания светового потока задавался переменной высотой щели в масках. Исследуемый интервал длин волн был принят за единицу, и при $x=1$ все маски имели одинаковую высоту щели. Это упрощало процедуру нормировки моментов, а также дало возможность работать с меньшим числом масок и фотоприемников*.

Значения	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
Расч.	1	0,50	0,27	0,17	0,11
Эксп.	1	0,52	0,27	0,20	0,12

Достоинством данного метода является его высокое быстродействие и сглаживание случайного шума. Применение метода оказывается особенно эффективным при исследовании нестационарных процессов, когда сигнал можно описать малым числом моментов.

* Если функция задана в интервале $[-1, +1]$, то для измерения каждого нечетного момента необходимо иметь две маски и два фотоприемника.

2. Метод. Решения задачи восстановления входного сигнала $\psi(x, y)$, сглаженного действием аппаратной функции $A(x)$, начнем с выбора новой независимой переменной. Это необходимо по следующим причинам. Для вычисления моментов высокого порядка с помощью ЭВМ желательно, чтобы на всем интервале независимая переменная принимала значения, близкие к единице. В этом случае не происходит переполнения разрядной сетки машины и не возникает существенных ошибок, связанных с округлением. В этой связи рассмотрим случай, когда переменная x задана в интервале $-1 \leq x \leq 1$.

Пусть известно N нормированных начальных моментов аппаратной функции и выходного сигнала. Используя ранее названную теорему о логарифмических моментах, можно получить для вычисления моментов сигнала следующие рекуррентные выражения:

$$M_0^\Psi(t) = 1; \quad M_1^\Psi(t) = M_1^A(t) - M_1^A; \dots; \quad M_N^\Psi(t) = M_N^A(t) - M_N^A - \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{N!}{\nu!(N-\nu)!} M_\nu^A M_{N-\nu}^\Psi(t). \quad (2)$$

В некоторых случаях восстановление входного сигнала заканчивается после нахождения моментов. Далее вычисляются такие функционалы, как дисперсия, асимметрия и т. д., связанные с моментами.

Теперь перейдем к решению задачи восстановления формы сигнала $\psi(x, t)$, предполагая известными его N начальных моментов в точке $t=t_1$. Для простоты в дальнейшем вместо функции $\psi(x, t)$ будем писать $\psi(x)$. Решение будем искать в виде степенного полинома. Для определения коэффициентов этого полинома предварительно разложим функцию $\psi(x)$ в ряд по системе ортонормированных полиномов Лежандра:

$$\Psi(x) = \sum C_N P_N(x); \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $C_N = \int_{-1}^{+1} \psi(x) P_N(x) dx$; $P_N(x)$ — нормированные полиномы, определяемые выражением

$$P_N(x) = \sqrt{\frac{2N+1}{2}} \tilde{P}_N(x). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{P}_N(x)$ — ненормированные полиномы, имеющие вид:

$$\tilde{P}_0(x) = 1; \quad \tilde{P}_1(x) = x; \quad \dots; \quad \tilde{P}_{N+1}(x) = \frac{1}{N+1} \times \times [(2N+1)x\tilde{P}_N(x) - N\tilde{P}_{N-1}(x)]. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\psi(x) = \sum_{J=1}^N \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^N x^{J-1} \left(\frac{2i-1}{2} \right) A_{i,J} A_{i,L} \int_{-1}^{+1} x^{L-1} \psi(x) dx, \quad (6)$$

где $\int_{-1}^{+1} x^{L-1} \psi(x) dx = M_\Psi$ — начальный момент $(L-1)$ -го порядка функции $\psi(x)$; $A_{i,J}$ и $A_{i,L}$ — матрицы из коэффициентов ненормированных

полиномов Лежандра, для которых получены следующие рекуррентные выражения:

$$A_{1,1} = A_{2,2} = 1;$$

$$A_{i,1} = -\left(\frac{i-2}{i-1}\right)A_{i-2,1}; \quad i = 3, 5, 7, \dots; \quad (7)$$

$$A_{i,J} = \left(\frac{2i-3}{i-1}\right)A_{i-1,J-1} - \left(\frac{i-2}{i-1}\right)A_{i-2,J}, \quad i = 3, 4, 5, \dots; \quad J = 2, 3, 4, \dots$$

Следует заметить, что при малом числе членов N ряд (6) грубо описывает входной сигнал, а при большом числе членов N — расходится. В этой связи возникает задача выбора оптимального числа N .

Обычно качество восстановленного сигнала оценивается по какому-либо критерию. Выбор критерия зависит от априорных знаний о свойствах ядра, сигнала и шума. При полном отсутствии этих знаний задача восстановления сигнала неразрешима. Поэтому важно рационально использовать даже качественные сведения о сигнале и шуме при построении процедуры поиска оптимального решения.

3. Моделирование. Прежде всего найдем то критическое значение $N = N_{\text{крит}}$, при котором возникает неустойчивость решения из-за ошибок ЭВМ. В результате численных экспериментов на ЭВМ, связанных с восстановлением сигнала прямоугольной формы по точно заданным начальным моментам, установлено, что для сигнала, заданного на интервале $[0, 1]$, решение неустойчиво уже при $N_{\text{крит}} = 9$, а для сигнала, заданного на интервале $[-1, +1]$, при $N_{\text{крит}} = 13$ (рис. 2).

Таким образом, для выявления тонкой структуры сигнала предпочтителен интервал $[-1, +1]$, в котором входной сигнал может быть описан большим числом членов. Установлено также, что с увеличением номера момента резко растет ошибка в моменте.

Особенности различных алгоритмов выбора оптимального решения рассмотрим на следующей модели: аппаратная функция и входной сигнал — одинаковые гауссовы функции с нулевым средним и параметром $\sigma = 0,2$, заданные в интервале $[-1, +1]$, а шум, наложенный на выходной сигнал, двух типов: с амплитудным распределением, близким к равномерному (рис. 3), и с нормальным распределением (рис. 4).

Воспользуемся сначала известным алгоритмом, используемым обычно при решении задачи (1) по методу Тихонова [2]:

$$\|f(x) - L\psi_\alpha(x)\| = \min. \quad (8)$$

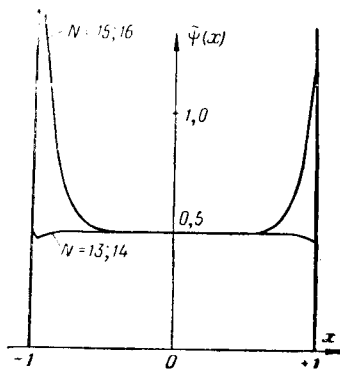


Рис. 2.

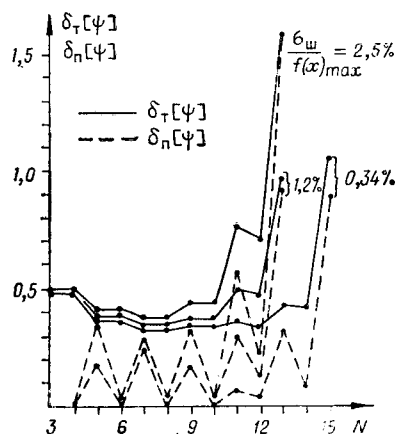


Рис. 3.

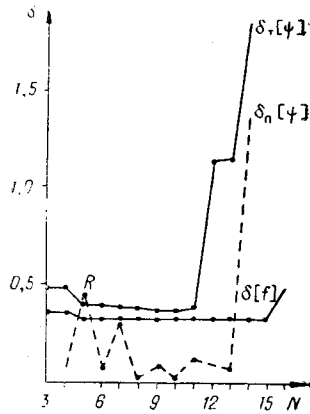


Рис. 4.

На рис. 4 построен график ошибки $\delta[f]$, из которого следует, что данная ошибка не меняется в широкой области значений N от 4 до 15. Однако оптимальное решение существует при $N_{\text{опт}}=9$. Это видно из рис. 4, где приведен график среднеквадратичной ошибки $\delta_T[\psi]$ ординат восстановленного сигнала $\tilde{\psi}_N(x)$ относительно точных значений $\bar{\psi}(i)$.

Таким образом, мы пришли к выводу, что минимизация функционала (9), характеризующего близость синтезированного и истинного выходных сигналов, не позволяет найти оптимальное решение. Характер зависимости $\delta[f]$ подчеркивает лишь сглаживающее действие данного метода по отношению к случайному шуму. Поскольку точное решение на практике не известно, то попытаемся найти оптимум путем сравнения двух соседних решений $\tilde{\psi}_{N-1}(x)$ и $\tilde{\psi}_N(x)$, получаемых последовательно при увеличении N . Оптимальное решение будем находить, минимизируя среднеквадратичную ошибку

$$\delta_{\Pi}[\psi] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r [\psi_{N-1}(i) - \psi_N(i)]^2}{r-1}}$$

Рис. 3 и 4 иллюстрируют поведение этой ошибки с ростом N . Видно, что явно выраженного минимума не существует и определить $N_{\text{опт}}$ нельзя, если не привлекать дополнительных сведений о сигнале и шуме.

Обратим внимание на периодический характер зависимости, имеющей минимумы при четных N . Поскольку в задаче свойства шума не изменяются при переходе от нечетных значений N к четным, то можно сделать вывод, что поведение ошибки тесно связано с особенностями сигнала. Действительно, для симметричного сигнала все нечетные моменты равны нулю, поэтому при переходе от нечетного значения N к четному описание сигнала не изменяется, а появляющийся новый член ряда в выражении $\tilde{\psi}_N(x)$ обусловлен целиком случайным шумом и ошибками счета. На основании этого можно сделать следующий вывод: для симметричного сигнала, заданного на интервале $[-1, +1]$, лучшим приближением является ряд с нечетным значением N . Учитывая это, рассмотрим поведение ошибки $\delta_{\Pi}[\psi]$ при нечетных N (см. рис. 3 и 4). Для шума с равномерным распределением амплитуды явно выраженный минимум в нашем случае отсутствует, а для шума с

Здесь $f(x)$ — исходный выходной сигнал; $L\tilde{\psi}_\alpha(x)$ — синтезированный выходной сигнал (L — интегральный оператор; $\tilde{\psi}_\alpha(x)$ — регуляризованное решение). В нашем случае аналогично (8) можно написать

$$\|f(x) - \tilde{f}_N(x)\| = \min,$$

или

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r [f(i) - \tilde{f}_N(i)]^2}{r-1}} = \delta[f] = \min, \quad (9)$$

где $\tilde{f}_N(x)$ — синтезированный по своим N начальным моментам выходной сигнал; r — число ординат; $\delta[f]$ — среднеквадратичная ошибка.

нормальным распределением такой минимум выражен при $N=9$. Данное значение N оптимально в смысле формы сигнала в среднем. Если представляют интерес конкретные параметры, например амплитуда сигнала либо его полуширина, то необходимо находить $N_{\text{опт}}$, минимизируя функционалы, в которые входят именно эти параметры.

В рассмотренном здесь модельном эксперименте удалось найти оптимальное решение. Однако для этого необходимо было иметь «богатые» априорные сведения: сигнал симметричен, а распределение амплитуды случайного шума нормальное. Ниже на реальном экспериментальном материале показана эффективность процедуры поиска оптимального решения, основанная на использовании априорных и апостериорных сведений о сигнале.

4. Восстановление профиля линий R люминисценции рубина. Восстановлению подвергался спектр $\psi(x)$, сглаженный аппаратной функцией спектрального прибора SPM-2 и диссектора ЛИ-602. В качестве аппаратной функции был взят одиночный контур линии R_1 , полученный при температуре -190°C^* . Максимум аппаратной функции располагался в центре восстанавливаемого участка спектра, который приводился к интервалу $[-1, +1]$. При решении задачи использовались следующие сведения о сигнале:

сигнал имеет два пика (линии R_1 и R_2); интенсивность линий R_1 расположенной в длинноволновой части спектра, выше интенсивности линий R_2 . Это следует даже из рассмотрения формы выходного сигнала (рис. 5).

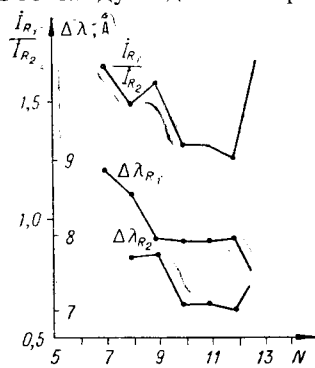


Рис. 6.

* При температуре жидкого азота как линии R_1 , так и линии R_2 могут рассматриваться как функции Дирака, действующие на входе регистрирующего тракта, так как собственная ширина этих линий ($\sim 0,1 \text{ \AA}$ [3]) существенно меньше полуширины аппаратной функции монохроматора и диссектора ($\sim 5 \text{ \AA}$).

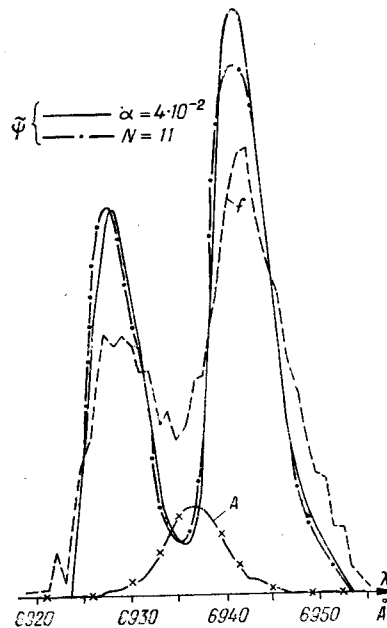


Рис. 5.

Оптимальное решение находилось следующим образом. Для каждого значения N в диапазоне от 3 до $N_{\text{крит}}=13$ восстановленный сигнал проверялся на соответствие имеющимся сведениям о нем. Решения, полученные при $N < 7$, были отброшены, потому что при этих значениях N линии R_1 и R_2 не разрешались. Так как интерес представляли отношение i_{R_1} / i_{R_2} интенсивностей линий в максимумах и полуширины $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$, то строились зависимости этих величин от N , представленные на рис. 6. На всех графиках в диапазоне $N=10 \div 12$ присутствует плоская часть и можно принять $N_{\text{опт}}=11$.

$$|\Delta\Pi|_{N=N_{\text{опт}}} = \min.$$

Диапазон изменения N , внутри которого производится поиск минимума, ограничен слева тем, что при $N < 7$ не разрешаются линии R_1 и R_2 , а справа — величиной $N_{\text{крит}}$, обусловленной ошибками счета и найденной машинным моделированием. Восстановленный сигнал при $N=11$ оказался в хорошем согласии с решением, найденным по методу Тихонова (см. рис. 5).

В методе Тихонова применялась регуляризация нулевого порядка. Решение находилось в конечных разностях из уравнения Эйлера [4]

$$\alpha\Psi(s) + \int_a^b \bar{A}(s-\zeta)\psi(\zeta)d\zeta - \int_a^b A(\xi-s)f(\xi)d\xi = 0,$$

где

$$\bar{A}(s-\zeta) = \int_a^b A(\xi-s)A(\xi-\zeta)d\xi.$$

Оптимальное значение параметра регуляризации ($\alpha_{\text{опт}} = (2 \div 4) \cdot 10^{-2}$) находилось по минимуму среднеквадратичной ошибки $\delta_{\text{п}}[\psi]$ в последовательных решениях. Исследуемый участок спектра разбивался на 40 участков ($\Delta x=1$). Программа восстановления входного сигнала составлена на языке АКИ и реализована на ЭВМ «Минск-22». Время счета при фиксированном N было приблизительно равно 30 с.

В заключение авторы выражают благодарность чл.-корр. АН СССР Ю. Е. Нестерихину и канд. техн. наук Р. Д. Баглаю за интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Д. Баглай, А. М. Искольдский, М. И. Кудряшов, Ю. Е. Нестерихин. Регистратор «Спектр» как элемент системы автоматизации спектральных исследований.— *Автометрия*, 1971, № 6.
2. А. Н. Тихонов, В. Г. Шевченко, В. Я. Галкин, П. Н. Заикин, Б. И. Горячев, Б. С. Ишханов, И. М. Капитонова. Система сплошной автоматической обработки результатов эксперимента по исследованию сечений фотоядерных реакций.— В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 14. М., Изд-во МГУ, 1970.
3. А. Л. Микаелян, М. Л. Тер-Микаелян, Ю. Г. Турков. Оптические квантовые генераторы на твердом теле. М., «Советское радио», 1967.
4. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— *Докл. АН СССР*, 1963, т. 151, № 3.

Поступила в редакцию
20 января 1972 г.