

И. Н. СВЕНТИЦКАЯ, Ю. А. ШАПИРО
(Ленинград)

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

При электронно-оптических расчетах часто возникают математически неустойчивые задачи. Это имеет место, например, при определении потенциала между электродами сложной формы, восстановлении оптического сигнала по освещенности электронного изображения и др. Эти задачи математически сводятся к решению уравнения вида

$$A\varphi = f, \quad (1)$$

где $\varphi \in \Phi$, $f \in F$, Φ и F — метрические пространства с метриками ρ_Φ и ρ_F . Здесь оператор A вполне непрерывен, так что малым изменениям φ соответствуют малые изменения f . Однако малым погрешностям измеряемой величины f могут соответствовать сколь угодно большие изменения в определенном решении φ . Математически это соответствует тому, что оператор A^{-1} , если он существует, неограничен.

В настоящее время разработаны методы регуляризации подобных неустойчивых задач (см., например, [1—3]), которые позволяют находить их приближенное решение.

Рассмотрим один из таких методов [3]. Уравнение (1) заменяется приближенным

$$A_\alpha \varphi_\alpha = A\varphi_\alpha + \alpha \varphi_\alpha = f, \quad (2)$$

где α — числовой параметр; $\alpha > 0$ в качестве приближенного решения уравнения (1) берутся такие решения уравнения (2), которые минимизируют при данном f невязку уравнения, или величину $\rho_F = (A\varphi_\alpha, f)$. Для примера остановимся на решении интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f^{(0)}(x). \quad (3)$$

Используя какую-либо квадратурную формулу с $(N+1)$ узлом, вместо уравнения (2), приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=0}^N K_{ij} \rho_j \varphi_{\alpha, j}^{N, (0)} + \alpha \varphi_{\alpha, i}^{N, (0)} = f_i^{(0)}; \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $\varphi_{\alpha, j}^{N, (0)}$ и $f_i^{(0)}$ — значения функций $\varphi_{\alpha}^{N, (0)}$ и $f^{(0)}$ в j -й и i -й точках; K_{ij} — элементы ядра уравнения (2); ρ_j — веса квадратурной формулы. Критерием выбора оптимальных α и N при построении решения φ_{α}^N системы (4) может служить минимум функционала S_N^α , характеризующего невязку уравнения (3). В частности, такой функционал может иметь вид

$$S_N^\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (f_i^{(0)} - \sum_{j=0}^N K_{ij} \rho_j \varphi_{\alpha, j}^{N, (0)})^2}{N+1}}. \quad (5)$$

В данной работе предлагается для тех случаев, когда оптимальная величина S_N^α превышает допустимые пределы, сочетать указанный метод с некоторыми итерационными процессами. Приближенное решение уравнения (3) $\varphi^N(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ представляется в этом случае так:

$$\varphi^N(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \varphi_{\alpha_0}^N + \varphi_{\alpha_1}^N + \dots + \varphi_{\alpha_k}^N. \quad (6)$$

Здесь в качестве нулевого приближения взято $\varphi_{\alpha_0}^N$, определение которого описано выше. Последующие k поправок получают при решении систем, аналогичных (4), где правые части $f_i^{(m)}$ представляют собой невязки уравнений, остающиеся от предыдущего приближения:

$$\sum_{j=0}^N K_{ij} \rho_j \varphi_{\alpha, j}^{N, (m)} + \alpha \varphi_{\alpha, i}^{N, (m)} = f_i^{(m-1)} - \sum_{j=0}^N K_{ij} \rho_j \varphi_{\alpha, j}^{N, (m-1)}; \\ i = 0, 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, k.$$

Как и прежде, из всех решений $\Phi_{\alpha, j}^{N, (m)}$ выбираются решения $\Phi_{\alpha_m, j}^N$, минимизирующие функционалы типа (5), где вместо $f_i^{(0)}$ и $\Phi_{\alpha, j}^{N, (0)}$ используются соответственно величины $f_i^{(m)}$ и $\Phi_{\alpha, j}^{N, (m)}$.

При использовании метода итераций существенным является то обстоятельство, что получаемые в результате итераций величины $f_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, k$) сравнимы с погрешностями вычислений и их колебания носят случайный характер, не обусловленный искомым значением f . Поэтому $f_i^{(m)}$ целесообразно использовать не в непосредственно получаемом виде, а после некоторой процедуры усреднения возникающих погрешностей. В частности, это можно произвести следующим образом [4]. Промежуток интегрирования в (3) разбивается на M частей, включающих q точек каждая:

$$q = N/M.$$

Вычисляются усредненные значения $\tilde{f}_i^{(m)}$ функции $f^{(m)}$ как среднееарифметическое от q^2 значений в этих точках, получаемых в результате линейных интерполяций $f^{(m)}$ между различными парами точек из соседних с i -й точкой промежутков:

$$\tilde{f}_i^{(m)} = \frac{1}{q^2} \sum_{s=(i-1)q}^{iq-1} \sum_{n=iq}^{(i+1)q-1} \left[f_s^{(m)} + \frac{iq-s}{n-s} (f_n^{(m)} - f_s^{(m)}) \right]; \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \quad (8)$$

Значения $\tilde{f}_i^{(m)}$ в крайних точках получаются продолжением $\tilde{f}^{(m)}$, например, по параболе. В соответствии с этим 1-я поправка к $\Phi_{\alpha_0}^N$ находится из решения системы уравнений $(M+1)$ -го порядка, имеющей вид

$$\sum_{j=0}^M K_{ij} \rho_j \Psi_{\alpha, j}^{M, (1)} + \alpha \Psi_{\alpha, i}^{M, (1)} = \tilde{f}_i^{(1)}, \quad (9)$$

где веса ρ_j соответствуют квадратурной формуле с $(M+1)$ узлом, а $\tilde{f}_i^{(1)}$ вычисляются по формуле (8). Определение $\Phi_{\alpha_1}^N$ производится, как и раньше, минимизацией соответствующего функционала, где значения $\Phi_{\alpha, i}^{N, (1)}$ получаются из значений $\Psi_{\alpha, i}^{M, (1)}$ линейной интерполяцией:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, iq}^{N, (1)} &= \Psi_{\alpha, i}^{M, (1)}; \quad i = 0, 1, \dots, M; \\ \Phi_{\alpha, s}^{N, (1)} &= \Phi_{\alpha, iq}^{N, (1)} + \frac{s-iq}{q} (\Phi_{\alpha, (i+1)q}^{N, (1)} - \Phi_{\alpha, iq}^{N, (1)}); \quad i = 0, 1, \dots, M-1; \\ & \quad s = iq + 1, iq + 2, \dots, (i+1)q - 1. \end{aligned}$$

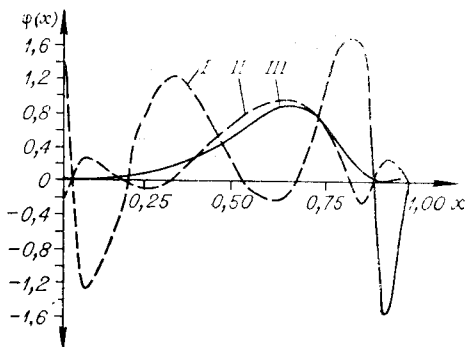
После построения $\Phi_{\alpha_1}^{N, (1)}$ аналогично поступаем для построения $\Phi_{\alpha_2}^{N, (2)}$ и т. д.

Описанный итерационный процесс является замкнутым при $m \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$. Метод запрограммирован на языке АЛГОЛ-60, и программы отлажены для решения указанных практических задач. В данной заметке проиллюстрируем его на примере сравнения приближенного решения интегрального уравнения 1-го рода с известным точным решением:

$$\int_0^1 \exp \left[-\frac{xt}{(1-x)(1-t)} \right] \Psi(t) dt = \frac{2(1-x)^3}{(2-x)(3-2x)}. \quad (10)$$

Уравнения такого типа встречаются при решении задачи о выделении оптического сигнала. На рисунке графически представлены результаты применения двух итераций. Пример показывает, что вторая итерация с процедурой усреднения правых частей резко улучшает результаты вычислений. Предложенный метод может, естественно, применяться не только при решении интегральных уравнений 1-го рода, но и для повышения устойчивости плохо обусловленных систем уравнений, встречающихся на практике.

В заключение отметим, что эффективность итераций может быть повышена, если сочетать процедуру усреднения правых частей в системах типа (7) с последующей процедурой усреднения решений при разных α в окрестности α_m , минимизирующих функционалы S_{α}^N .



Сравнение последовательных и точного решений уравнения (10):

I — результат одной итерации; II — результат двух итераций; III — точное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1.
2. В. К. Иванов. О некорректно поставленных задачах.— Матем. сб., 1963, т. 61, № 2.
3. М. М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Е. П. Миронов, М. И. Пергамент, В. В. Тихомиров, Ю. А. Шапиро. Диагностика плазмы, т. III. М., Атомиздат, 1971.

Поступило в редакцию 23 февраля 1971 г.

УДК 519.24 : 621.374

А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, Ю. М. КРЕНДЕЛЬ, О. Е. ТРОФИМОВ
(Новосибирск)

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПОТОКА В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для рационального построения измерительных информационных систем, ориентированных на обработку данных в системе комплексной автоматизации научных исследований, необходимо знать статистические свойства потока информации, поступающей от эксперимента. В частности, представляют интерес статистика интервалов между опытами и статистика объемов информации, получаемой за один опыт.

Нами были проанализированы данные по интервалам между заявками и по объему информации внутри каждой заявки, полученные с двух экспериментальных комплексов, связанных с исследованиями электрического взрыва фольги (ЭВФ) и с исследованиями ЭВФ и ВВ во взрывных камерах.

По первому эксперименту число проанализированных интервалов $N_1=70$, время наблюдения шесть месяцев, по второму—число опытов $N_2=95$, время наблюдения два года. По критерию Колмогорова проверялись гипотезы о том, что интервалы независимы и имеют заданное распределение.

Обычно при анализе подобных систем принимается гипотеза о пуассоновском характере потока. Однако анализ выборок показал, что распределение в условиях регулярной работы является более сосредоточенным, чем соответствующее пуассоновское распределение.

Для $N=95$ хорошее согласование ($\Delta=0,11$) получается для распределения

$$F_1(x) = \begin{cases} 0,6195 \cdot \frac{x}{4}, & \text{если } 0 \leq x \leq 4; \\ 0,6195 + 0,3465(1 - e^{-0,1965(x-4)})g, & \text{если } 4 < x \leq 69; \\ 0,966 + 0,034 \cdot \frac{x-69}{13}, & \text{если } 69 < x \leq 82; \end{cases} \quad (1)$$

$g = (1 - e^{-0,1965 \cdot 64})^{-1} \approx 1$ (нормировочный множитель).

Для потока с $N=70$ ($\Delta=0,13$) распределение имеет вид

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{4,43}(x-1)}), & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, данная гипотеза критерием Колмогорова с уровнями значимости 5 и 1% не отвергается.

По нашему мнению, подобное распределение неплохо согласуется с интуитивными представлениями. Первый член распределения описывает регулярную работу до момента, когда появляется необходимость внести коррективы в эксперимент. Это распределение имеет малую дисперсию. Второй член описывает статистику эксперимента в условиях, когда имеется неопределенность в методах корректирующих действий, и представляется экспоненциальным распределением. Третий член в (1) введен для выравни-