

3. EUR 4100e CAMAC. A Modular Instrumentation System for Data Handling. Esone Committee, 1969.
4. EUR 4600e. CAMAC. Organisation of Multi-crate Systems. Esone Committee, 1972.
5. О. З. Гусев, Ю. Н. Золотухин, З. А. Лившиц, Ю. К. Постоенко и др. Измерительная магистральная модульная система, связанная с ЭВМ HP-2116B.— Автометрия, 1973, № 2.

Поступила в редакцию 31 октября 1972 г.

УДК 62-50

**В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Н. Н. КАРЛСОН,
А. А. НЕСТЕРОВ, Н. П. ФИЛИПОВА**
(Новосибирск)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИВОДОМ В СИСТЕМЕ ГРАФИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Повышение быстродействия периферийных устройств позволяет существенно повысить быстродействие всего вычислительного комплекса. Одним из путей повышения быстродействия графопостроителей является применение оптимального по быстродействию управления перемещением пишущего устройства. В отличие от традиционных постановок задач при синтезе оптимального управления речь будет идти о переводе управляемого объекта из одной точки в другую по заданной траектории.

Будем полагать, что кривая L , которую должен нарисовать графопостроитель, задана в неявной форме уравнением

$$g(x, y) = 0. \quad (1)$$

Такая форма задания изображаемой кривой является достаточно общей. От функции $g(x, y)$ потребуем существования ее частных производных до второго порядка включительно.

Полагаем далее, что пишущее устройство графопостроителя приводится в движение двигателями ограниченной мощности, осуществляющими независимое перемещение пишущего устройства по координатам x и y . Движение пера в этом случае можно достаточно точно описать следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x; \\ \frac{dv_x}{dt} &= f_1(v_x) + k_1 u_1; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y;$$

$$\frac{dv_y}{dt} = f_2(v_y) + k_2 u_2.$$

Здесь v_x и v_y — скорости перемещения пера по координатам x и y соответственно; u_1 и u_2 — управляющие параметры для приводов по координатам x и y . Считаем, что u_1 и u_2 подчинены неравенствам:

$$|u_1| \leq 1; |u_2| \leq 1. \quad (3)$$

Тогда k_1 и k_2 — соответствующие масштабные коэффициенты. Функции

Задача заключается в том (рис. 1), чтобы перевести перо из точки $M_0(x_0, y_0)$ по кривой L в точку $M_1(x_1, y_1)$ за наименьшее время T . При этом предполагается, конечно, что точки M_0 и M_1 лежат на L , т. е. выполняются соотношения:

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_1, y_1) = 0. \quad (4)$$

В [1] приведены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для объектов, фазовые координаты которых ограничены соотношением $g(x, y) \leq 0$. При этом уравнение $g(x, y) = 0$ служит уравнением границы области допустимых значений фазовых координат. Таким образом, мы можем воспользоваться результатами, полученными в [1], если будем считать, что изображаемая кривая является границей области допустимых значений фазовых координат и оптимальная траектория целиком лежит на этой границе.

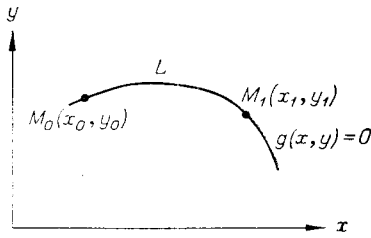


Рис. 1.

Введем в рассмотрение векторы $\bar{x}(x, v_x, y, v_y)$, $u(u_1, u_2)$ и вектор-функцию $\bar{f}(\bar{x}, u)$ с координатами

$$v_x, f_1(v_x) + k_1 u_1, v_y, f_2(v_y) + k_2 u_2.$$

Тогда систему уравнений (2) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, u). \quad (5)$$

Для того чтобы траектория, соответствующая уравнению (5), целиком лежала на кривой L , необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений:

$$g(x_0, y_0) = 0; \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} v_x + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} v_y = 0. \quad (6)$$

Второе из соотношений (6) означает, что скорость пишущего устройства в любой момент времени направлена по касательной к кривой L . Таким образом, для движения по кривой L необходимо выполнение условия

$$G(\bar{x}) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} v_x + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} v_y = 0. \quad (7)$$

Однако условие (7) непосредственно не дает нам никакой информации о том, по какому закону следует изменять u_1 и u_2 , чтобы перо перемещалось по кривой L . Физически это связано с тем, что движение пера описывается уравнением второго порядка. Условие же (7) учитывает только скорость пера, которую мы не можем непосредственно менять с помощью управляющих параметров u_1 и u_2 . Это затруднение можно обойти следующим образом: будем считать, что уравнение

$$G(\bar{x}) = 0 \quad (8)$$

описывает поверхность Q , ограничивающую в четырехмерном пространстве некоторую область допустимых траекторий, соответствующих уравнению (5). Наша задача будет заключаться в том, чтобы перевести объект, описываемый уравнением (5), из точки $N_0(x_0, 0, y_0, 0)$ в точку $N_1(x_1, v_{x1}, y_1, v_{y1})$ за наименьшее время T и таким образом, чтобы траектория целиком лежала на поверхности Q . При этом будут выполнены

условия (4) и (7) и, следовательно, перо графопостроителя пройдет по кривой L . Здесь предполагается, что движение из точки M_0 на кривой L начинается с нулевой скоростью. Скорость же в конце траектории мы не фиксируем. Это существенно упростит решение задачи.

Таким образом, для движения пера по кривой L необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{grad } G(\bar{x}), \bar{f}(\bar{x}, u)) \equiv 0. \quad (9)$$

Рассмотрим более подробно второе из условий (9), которое означает, что скорость объекта, описываемого уравнением (5), в любой момент времени направлена по касательной к поверхности Q . Будем обозначать частные производные функции символом этой функции с индексом, соответствующим переменной, по которой производится дифференцирование. Тогда второе условие (9) с учетом (7) и (5) примет вид

$$g_x k_1 u_1 + g_y k_2 u_2 + f_1(v_x) g_x + f_2(v_y) g_y + v_x^2 g_{xx} + 2v_x v_y g_{xy} + v_y^2 g_{yy} \equiv 0. \quad (10)$$

Введем обозначение:

$$s = f_1(v_x) g_x + f_2(v_y) g_y + v_x^2 g_{xx} + 2v_x v_y g_{xy} + v_y^2 g_{yy}. \quad (11)$$

Теперь из (10) получим, что при движении пера по кривой L управляющие параметры u_1 и u_2 должны в любой момент времени удовлетворять соотношению

$$g_x k_1 u_1 + g_y k_2 u_2 = -s. \quad (12)$$

В координатах u_1, u_2 уравнение (12) описывает некоторую прямую E . На рис. 2 показан случай, когда прямая E имеет отрезок AB , лежащий в области допустимых значений управляющих параметров u_1 и u_2 . Конец любого вектора u (u_1, u_2), удовлетворяющего уравнению (12), должен лежать на прямой E . При этом управления, удовлетворяющие еще и ограничениям (3), могут быть представлены в виде

$$u = \alpha u_A + (1-\alpha) u_B, \quad (13)$$

где единственный подлежащий выбору параметр α удовлетворяет условию

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (14)$$

Таким образом, задача отыскания оптимального управления, обеспечивающего перемещение пера по кривой L , сводится к выбору параметра α .

В соответствии с [1] вводим функцию $H(\psi, \bar{x}, u) = (\psi, \bar{f}(\bar{x}, u))$. Здесь вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим функцию H более подробно:

$$H(\psi, \bar{x}, u) = \psi_1 v_x + \psi_2 (f_1(v_x) + k_1 u_1) + \psi_3 v_y + \psi_4 (f_2(v_y) + k_2 u_2). \quad (15)$$

Учитывая (13), можно выразить H через искомый параметр α .

$$H = \psi_1 v_x + \psi_2 (f_1(v_x) + k_1 u_{B1}) + \psi_3 v_y + \psi_4 (f_2(v_y) + k_2 u_{B2}) + \alpha [k_1 \psi_2 (u_{A1} - u_{B1}) + k_2 \psi_4 (u_{A2} - u_{B2})]. \quad (16)$$

В соответствии с принципом максимума параметр α , обеспечивающий оптимальное по быстрдействию управление, должен удовлетворять соотношению:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } z(\bar{x}, \psi) < 0; \\ 1 & \text{при } z(\bar{x}, \psi) \geq 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $z(\bar{x}, \psi) = k_1 \psi_2 (u_{A1} - u_{B1}) + k_2 \psi_4 (u_{A2} - u_{B2})$.

Таким образом, при оптимальном по быстродействию управлении вектор u может принимать только значения u_A или u_B , т. е. его конец всегда лежит на границе области допустимых управлений.

Для вычисления управлений u_A и u_B рассмотрим вновь уравнение (12). Поделим обе части этого уравнения на положительную величину $\sqrt{(k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2}$ и введем:

$$\cos \varphi = \frac{k_1 g_x}{\sqrt{(k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{k_2 g_y}{\sqrt{(k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2}}; \quad d = -\frac{s}{\sqrt{(k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2}}. \quad (18)$$

Теперь уравнение (12) можно записать в виде

$$(N, u) = d, \quad (19)$$

где N — единичный вектор с координатами $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Из (19) видно, что прямая E (см. рис. 2) есть геометрическое место концов векторов u таких, что их проекция на вектор N равна d . Следовательно, прямая E ортогональна N и находится на расстоянии d от начала координат. Если $d < 0$, то прямая E находится от начала координат в стороне, противоположной положительному направлению N . Будем считать, что величина

$|d|$ достаточно мала для того, чтобы прямая E пересекала квадрат, ограничивающий область допустимых значений u . Точку A будем считать правой, если смотреть вдоль N в положительном направлении. Из рис. 2 видно, что в точках A и B один из управляющих параметров обязательно равен своему предельному значению. В этом случае второй управляющий параметр должен быть меньше единицы по модулю, если прямая E пересекает стороны квадрата. Из чисто геометрических соображений и уравнения (19) можно получить соотношения для вычисления u_A и u_B . Для точки A будем иметь

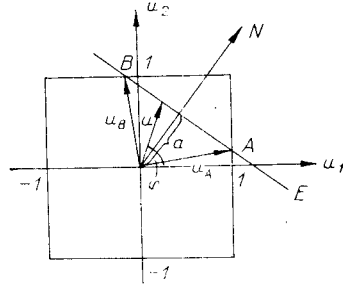


Рис. 2.

$$u_{A1} = \text{sign} \sin \varphi, \quad u_{A2} = \frac{d - k_1 \cos \varphi \text{sign} \sin \varphi}{k_2 \sin \varphi}, \quad \text{если } |u_{A2}| \leq 1;$$

$$u_{A1} = \frac{d + k_2 \sin \varphi \text{sign} \cos \varphi}{k_1 \cos \varphi}, \quad u_{A2} = -\text{sign} \cos \varphi, \quad \text{если } |u_{A1}| \leq 1. \quad (20)$$

Соответственно для точки B получаем

$$u_{B1} = -\text{sign} \sin \varphi, \quad u_{B2} = \frac{d + k_1 \cos \varphi \text{sign} \sin \varphi}{k_2 \sin \varphi}, \quad \text{если } |u_{B2}| \leq 1;$$

$$u_{B1} = \frac{d - k_2 \sin \varphi \text{sign} \cos \varphi}{k_1 \cos \varphi}, \quad u_{B2} = \text{sign} \cos \varphi, \quad \text{если } |u_{B1}| \leq 1. \quad (21)$$

Учитывая соотношения (18) и положительность коэффициентов k_1 и k_2 , можно получить окончательные соотношения для управляющих параметров через координаты управляемого объекта и дифференциальные параметры кривой L . Имеем для точки A :

$$u_{A1} = \text{sign} g_y, \quad u_{A2} = \frac{-s - k_1 g_x \text{sign} g_y}{k_2 g_y}, \quad \text{если } |u_{A2}| \leq 1;$$

$$u_{A1} = \frac{-s + k_2 g_y \text{sign} g_x}{k_1 g_x}, \quad u_{A2} = -\text{sign} g_x, \quad \text{если } |u_{A1}| \leq 1. \quad (22)$$

Для точки B имеем соответственно:

$$u_{B1} = -\operatorname{sign} g_y, \quad u_{B2} = \frac{-s + k_1 g_x \operatorname{sign} g_y}{k_2 g_y}, \quad \text{если } |u_{B2}| \leq 1;$$

$$u_{B1} = \frac{-s - k_2 g_y \operatorname{sign} g_x}{k_1 g_x}, \quad u_{B2} = \operatorname{sign} g_x, \quad \text{если } |u_{B1}| \leq 1. \quad (23)$$

Мы получили соотношения, позволяющие вычислить управления u_A и u_B . Для использования формулы (13) необходимо знать еще параметр α . Принцип максимума позволяет полностью решить эту задачу путем совместного интегрирования сопряженной системы уравнений и системы уравнений (2) с учетом соотношений (13) и (17) и краевых условий в точках N_0 и N_1 . Однако такой путь, связанный с решением краевой задачи, чрезвычайно громоздок и требует для своей реализации больших затрат машинного времени. Мы обойдем эти трудности, введя некоторые ограничения на скорость пера и вид кривой L .

Выше уже говорилось, что для справедливости соотношений (22) и (23) необходимо, чтобы прямая E пересекала область допустимых значений управляющих параметров. Это условие будет заведомо выполнено, если выполняются неравенства (см. рис. 2):

$$|d \cos \varphi| \leq 1, \quad |d \sin \varphi| \leq 1,$$

или иначе

$$k_1 |s g_x| \leq (k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2; \quad k_2 |s g_y| \leq (k_1 g_x)^2 + (k_2 g_y)^2. \quad (24)$$

Мы потребуем, однако, справедливости более жестких условий:

$$k_1 |s g_x| \leq k^2 (g_x^2 + g_y^2); \quad k_2 |s g_y| \leq k^2 (g_x^2 + g_y^2), \quad (25)$$

где $k = \min(k_1, k_2)$. Из (25) следуют как условия (24), так и условия:

$$|s g_x| \leq k_1 (g_x^2 + g_y^2); \quad |s g_y| \leq k_2 (g_x^2 + g_y^2). \quad (26)$$

Вектор управления u вызывает ускорение F пишущего устройства. Проекция этого ускорения на оси координат равны $k_1 u_1$ и $k_2 u_2$. Проекция F на нормаль к кривой L равна в соответствии с (12) величине $-\frac{s}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}$,

характеризующей, таким образом, ускорение, которое необходимо создать в направлении, перпендикулярном к кривой L , чтобы скомпенсировать несимметрию привода и центробежное ускорение, связанное с кривизной траектории. Очевидно, проекция F на касательную к кривой L должна приводить к изменению скорости поступательного движения пера вдоль кривой. Оценим это тангенциальное ускорение для управлений u_A и u_B . Касательная к кривой L в правой системе координат имеет координаты $g_y, -g_x$. Обозначим через F_T проекцию F на касательную. Очевидно,

$$F_T = \frac{k_1 u_1 g_y - k_2 u_2 g_x}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}.$$

Для точки A получаем из (22):

$$F_{TA} = \frac{k_1 (g_x^2 + g_y^2) \operatorname{sign} g_y + s g_x}{g_y \sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \quad \text{если } |u_{A2}| \leq 1,$$

и

$$F_{TA} = \frac{k_2 (g_x^2 + g_y^2) \operatorname{sign} g_x - s g_y}{g_x \sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \quad \text{если } |u_{A1}| \leq 1.$$

Аналогично из (23) получаем для точки B :

$$F_{TB} = \frac{-k_1(g_x^2 + g_y^2) \operatorname{sign} g_y + s g_x}{g_y \sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \quad \text{если } |u_{B2}| \leq 1,$$

и

$$F_{TB} = \frac{-k_2(g_x^2 + g_y^2) \operatorname{sign} g_x - s g_y}{g_x \sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \quad \text{если } |u_{B1}| \leq 1.$$

Учитывая условия (26), мы в любом случае получаем:

$$\operatorname{sign} F_{TA} = +1; \quad \operatorname{sign} F_{TB} = -1, \quad (27)$$

т. е. управление u_A при выполнении условий (26) всегда создает тангенциальное ускорение, направленное по касательной к L , а управление u_B — в противоположном направлении. Это обстоятельство позволяет однозначно выбрать управление u , не определяя параметр a .

Будем полагать, что в начальной точке траектории задано направление движения по каждой из осей координат. Это можно сделать, задав два параметра $\omega_x = \pm 1$, $\omega_y = \pm 1$. Знаки в этих соотношениях выбираются в зависимости от того, в какую сторону (роста или убывания) соответствующей координаты мы хотим двигаться. Далее, при $t=0$ скорость пера равна нулю и, следовательно, $s=0$. В этих условиях формулы (22) и (23) дают для координат векторов u_A и u_B значения, совпадающие по модулю и противоположные по знаку. В этом случае можно записать:

$$|u_1(0)| = |u_{A1}(0)| = |u_{B1}(0)|; \quad |u_2(0)| = |u_{A2}(0)| = |u_{B2}(0)|.$$

Кроме того, должны выполняться условия $\operatorname{sign} u_1 = \omega_x$, $\operatorname{sign} u_2 = \omega_y$ и, следовательно, справедливы соотношения:

$$u_1(0) = \omega_x |u_{A1}(0)|; \quad u_2(0) = \omega_y |u_{A1}(0)|. \quad (28)$$

Теперь, пользуясь соотношениями (28), можно оценить знак проекции тангенциального ускорения при $t=0$ на касательную к кривой L . Будем иметь

$$\omega = \operatorname{sign} F_T(0) = \operatorname{sign}(k_1 u_1(0) g_y - k_2 u_2(0) g_x). \quad (29)$$

Сопоставляя (29) и (27), можно сделать вывод, что следует пользоваться соотношениями (22), если $\omega = +1$, и соотношениями (23), если $\omega = -1$. Это полностью решает задачу управления на разгонном участке траектории.

Выше уже говорилось, что мы не фиксируем скорость в конце траектории. Это позволяет нам обойтись без торможения в конце траектории. При этом по достижении пишущим устройством точки N_1 перо поднимается, а привод тормозится по любому приемлемому закону. Здесь может быть использован, например, алгоритм, предложенный в [2]. Этот же алгоритм может быть использован при выводе пера в начальную точку.

Остается рассмотреть случай, когда в связи с ростом скорости пишущего устройства или кривизны траектории параметр s становится слишком большим по модулю и нарушается одно из условий (26). При этом ни одно из условий в формулах (22) или (23) может не выполняться, т. е. прямая E уже не пересекает область допустимых значений u . Физически это соответствует случаю, когда скорость пишущего устройства или кривизна траектории таковы, что мощности привода уже не хватает для создания необходимого нормального ускорения, и перо невозможно удерживать на кривой. Очевидно, следует заранее уменьшить скорость пера, т. е. перейти с управления по формулам (22) на управление по формулам (23) или наоборот. Когда скорость уменьшится до нужного зна-

чения, следует вернуться к управлению по прежнему закону. Момент начала и конца торможения можно определить, если прогнозировать поведение объекта на некоторое время Δt с целью проверки выполнения условий (26). С задачей такого прогнозирования может спра-

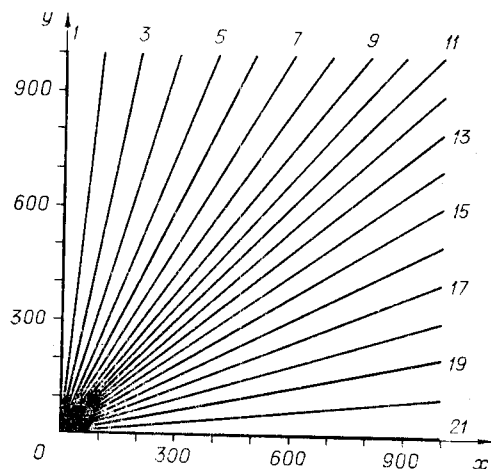


Рис. 3.

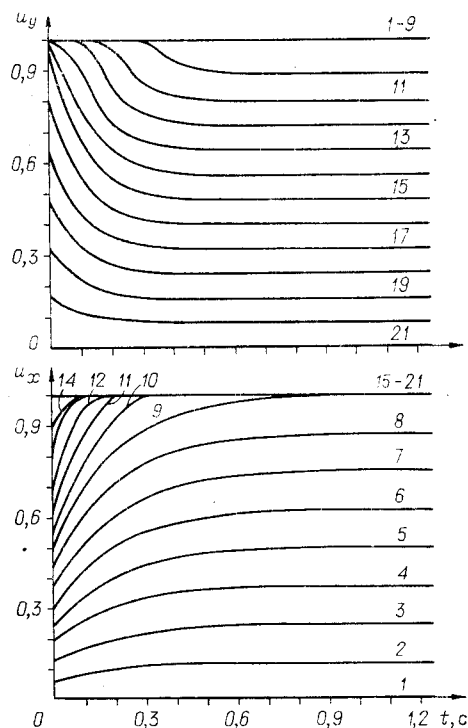


Рис. 4.

виться ускоренная модель управляемого объекта или ЭВМ, работающая с графопостроителем.

Следует остановиться еще на одном обстоятельстве. Дело в том, что закон управления учитывает только требование параллельности ускорения пишущего устройства и касательной к кривой L . Кратковременное нарушение этого условия из-за случайных ошибок в законе управления может привести к нежелательному изменению скоростей и, следовательно, координат пера, т. е. к нарушению условий (7) и (1). Управление, выбранное по формулам (22) и (23), очевидно, не может выбрать ошибки в скоростях и координатах, если эти ошибки возникли. Для исправления таких ошибок следует ввести коррекцию в закон управления. Проще всего коррекцию можно осуществить с помощью дополнительных обратных связей по скоростям и координатам. Действие таких обратных связей сводится к тому, что с помощью небольших поправок к основному закону управления восстанавливаются равенства (1) и (7).

Работа графопостроителя для планшета 1000×1000 с предлагаемым законом управления моделировалась на ЦВМ. Предполагалось, что графопостроитель описывается системой уравнений (2), причем в $f_1(v_x)$ и $f_2(v_y)$ учитывалось сухое и вязкое трение. Было принято:

$$f_1(v_x) = -10v_x - 800 \operatorname{sign} v_x - 0,000625 v_x^2 \operatorname{sign} v_x;$$

$$f_2(v_y) = -5v_y - 250 \operatorname{sign} v_y - 0,0005 v_y^2 \operatorname{sign} v_y;$$

$$k_1 = 8000; k_2 = 5000.$$

Для компенсации ошибок управления вводилась обратная связь, которая давала корректирующие добавки к основному закону управления по соотношениям:

$$\Delta u_1 = - \frac{0,5g(x, y) + 0,01(v_x g_x + v_y g_y)}{g_x}; \quad \Delta u_2 = - \frac{0,3g(x, y) + 0,01(v_x g_x + v_y g_y)}{g_y}.$$

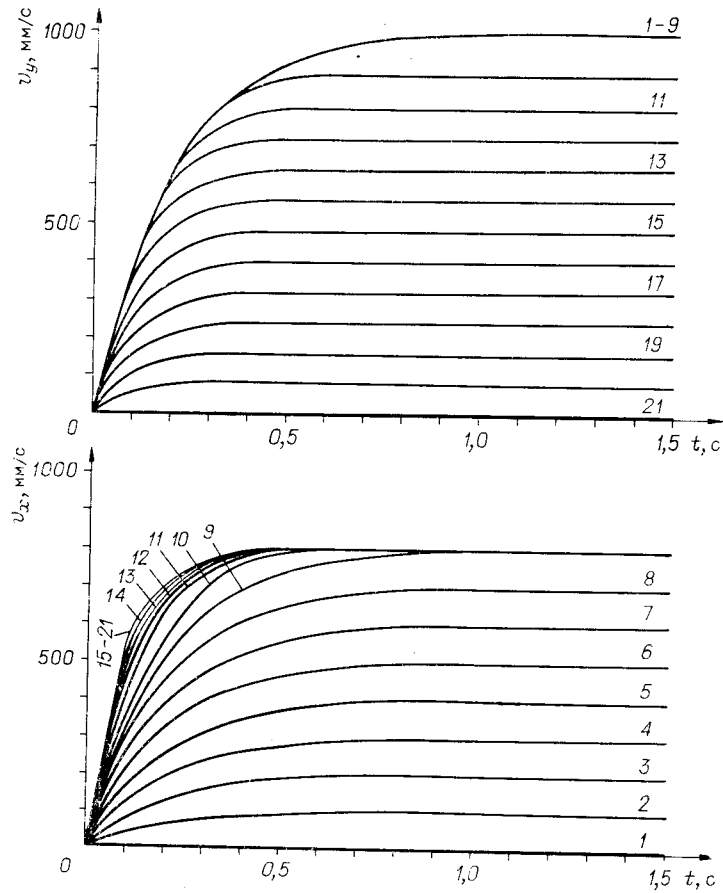


Рис. 5.

Коэффициенты в этих формулах выбирались такими, чтобы обеспечить быструю и качественную компенсацию возникающих ошибок. Работа модели проверялась на прямых и кривых второго и третьего порядков. На рис. 3 представлено семейство прямых 1—21, построенных по точкам, рассчитанным ЦВМ по модели графопостроителя. Прямые задавались уравнением $c_1x + c_2y = 0$. Точки просчитывались через интервал времени $\Delta t = 0,1c$. На рис. 4 и 5 показаны законы изменения управлений и скоростей на траекториях рис. 3. Видно, что даже для случая

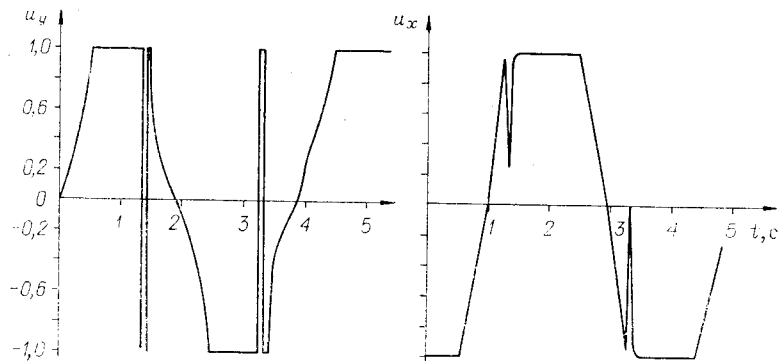


Рис. 6.

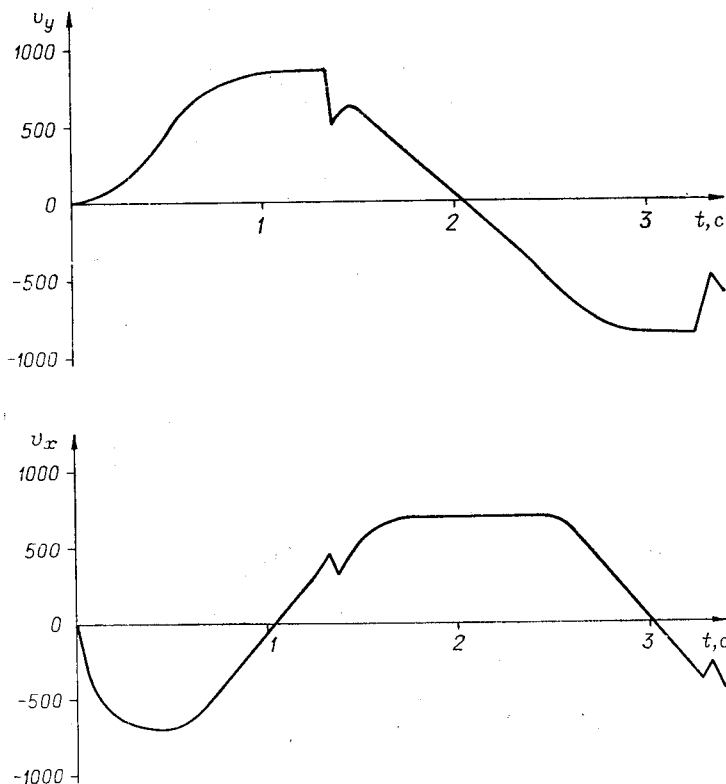


Рис. 7.

прямых законы управления достаточно сложны. Для сравнения на рис. 6 и 7 показаны соответствующие кривые для окружности

$$x^2 + y^2 - (500)^2 = 0.$$

Провалы на графиках управлений и скоростей вызваны кратковременными торможениями, которые производились с целью избежать нарушения условий (26). Полученные ЦВМ точки нигде не отклонялись от теоретической кривой более чем на 0,02 мм, величины $|\Delta u_1|$ и $|\Delta u_2|$ не превышали 0,1, т. е. были не более 10% от допустимых значений u_1 и u_2 . Моделирование показало целесообразность разработки графопроектировщика с приводом, управляемым по предлагаемому принципу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, Г. В. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
2. А. А. Нестеров, Н. П. Филиппова. Синтез оптимального управления для линейных объектов второго порядка.— В сб. «Оптимальные и самонастраивающиеся системы». Новосибирск, 1971.

Поступила в редакцию 6 октября 1972 г.