

В. М. ЕФАНОВ, И. И. КОРШЕВЕР, В. М. ЛОБАСТОВ

О ПОВЫШЕНИИ ТОЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПРИ ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ

Анализ периодических сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) по их отрезкам ограниченной длительности, если не принимаются специальных мер, приводит к значительному искажению спектральной информации о них. Основное искажающее действие при правильно выбранной частоте квантования сигнала оказывают растекание спектральных составляющих и паразитная амплитудная модуляция спектра.

Методам повышения точности спектрального анализа периодических сигналов посвящено значительное число работ, например [1, 2]. Однако большая часть этих работ носит теоретический характер или ориентирована на универсальные ЭВМ. В связи с широким распространением специализированных вычислителей, реализующих ДПФ, возникла необходимость в рассмотрении этих вопросов под углом зрения удобства аппаратурной реализации известных методов. Попытка такого рассмотрения и предпринята авторами в этой статье.

Растекание спектральных составляющих и паразитная амплитудная модуляция спектра. Растекание спектральных составляющих кратко может быть объяснено следующим образом. Анализ реализаций сигнала произвольной длительности с помощью рядов Фурье предполагает их периодическими с периодом, равным длительности реализации T . А поскольку длительность реализации в общем случае может быть не кратна периодом гармоник сигнала, то это ведет к разрывам в сигнале на концах интервала, что, в свою очередь, вызывает появление в полученном в результате анализа спектре компонент, не являющихся гармониками сигнала. Остановимся на этом эффекте более подробно.

Как известно, периодическая функция, удовлетворяющая определенным [3] условиям, может быть представлена бесконечным рядом Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0' t}, \quad (1)$$

где $A_n = a_n e^{j\varphi_n}$; $-\infty < t < \infty$; T' — период функции $f(t)$. Обычно бывает достаточно конечного ряда, т. е.

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N A_n e^{jn\omega_0' t}, \quad (2)$$

где коэффициенты Фурье A_n могут быть найдены из соотношения

$$T' A_n = F(n\omega_0') = \int_0^{T'} f(t) e^{-jn\omega_0' t} dt. \quad (3)$$

Коэффициенты A_n часто и являются конечным результатом спектрального анализа.

Часто неизвестен точный период сигнала, поэтому сведения о спектре получают по его отрезку длительностью $T \neq lT'$. Пусть

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при } 0 > t, t \geq T, \end{cases} \quad (4)$$

где T в общем случае некратно T' . Тогда его преобразование Фурье $F(\omega)$ непрерывно и имеет вид

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (5)$$

здесь

$$h_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при } 0 > t \text{ и } t \geq T. \end{cases} \quad (6)$$

Как нетрудно видеть, (5) совпадает с точностью до постоянного множителя в точках $n\omega_0$ с линейчатым спектром $F(n\omega_0)$ периодического сигнала $f(t)$ в случае, если $T = lT'$. При $\omega = \omega_1$

$$F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h_T(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (7)$$

можно рассматривать как сигнал

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h_T(\tau + t - T) e^{-j\omega_1(\tau + t - T)} dt \quad (8)$$

на выходе фильтра с импульсной переходной характеристикой

$$h(t) = h_T(-t + T) e^{-j\omega_1(-t + T)} = P(t) + jQ(t) \quad (9)$$

в момент времени $\tau = T$, где $P(t)$ и $Q(t)$ — импульсные переходные характеристики линейных систем, определенные в [4]. Согласно теореме о преобразовании свертки функций, $F(\omega_1)$ можно рассматривать как результат обратного преобразования Фурье от произведения функций $F_1(\omega) \leftrightarrow f(t)$ и $H(\omega) \leftrightarrow h(t)$ (знак \leftrightarrow связывает функцию с ее Фурье-преобразованием), где

$$F_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n \delta(\omega - n\omega'_0) \quad (10)$$

последовательность δ -функций, расположенных в точках частотной оси, кратных $1/T$. [5] в силу периодичности $f(t)$, а

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h_T(-t + T) e^{j\omega_1(t + T)} e^{-j\omega t} dt = \int_0^T e^{-j(\omega - \omega_1)t} e^{j\omega_1 T} dt = \\ &= \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_1)T}{2}}{\frac{\omega - \omega_1}{2}} e^{-\frac{j(\omega - \omega_1)T}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Результат обратного преобразования Фурье произведения $F(\omega)H(\omega)$

$$\begin{aligned} \text{дает свертку } H(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) H(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n \delta(\omega - n\omega'_0) \times \\ &\times \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_1)T}{2}}{\frac{\omega - \omega_1}{2}} e^{-\frac{j(\omega - \omega_1)T}{2}} e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n \frac{\sin \frac{(n\omega'_0 - \omega_1)T}{2}}{\frac{n\omega'_0 - \omega_1}{2}} e^{-\frac{j(2n\omega'_0\tau - n\omega'_0 T - \omega_1 T)}{2}}, \end{aligned}$$

которая при $\tau = T$, согласно [4], совпадает с $F(\omega_1)$ и, следовательно,

$$F(\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\sin \frac{(n\omega'_0 - \omega_1)T}{2}}{\frac{n\omega'_0 - \omega_1}{2}} e^{\frac{j(n\omega'_0 - \omega_1)T}{2}}. \quad (12)$$

Таким образом, значение спектра отрезка сигнала $f(t)$ на любой частоте $\omega = \omega_1$ можно рассматривать как отклик полосового фильтра с частотной характеристикой $H(\omega)$ и центральной частотой ω_1 на периодический сигнал $f(t)$ с периодом T' .

Как видно из (12), $F(\omega_1)$ является суммой всех коэффициентов Фурье сигнала, каждый из которых входит в нее с весом, равным значению частотной характеристики этого фильтра на данной частоте (рис. 1, а, где фазы гармонических составляющих сигнала и фазовая характеристика взвешивающей функции для простоты полагаются нулевыми).

При $T = T'$ и $\omega_1 = k\omega'_0$, где k — целое, $F(\omega_1) = T'A'k$ (см. рис. 1, б). Если используется аппарат рядов Фурье, то, в силу периодизации отрезка сигнала, коэффициенты Фурье A_r вычисляются не по формуле (3), а в соответствии с выражением

$$TA_r = F(r\omega_0) = \int_0^T f(t) e^{-jr\omega_0 t} dt, \quad (13)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$. Выражение (13), как нетрудно проверить, при $r\omega_0 = \omega_1$ соответствует (7), а следовательно, сводится к выражению (12) для $F(\omega_1)$. При $\omega_1 = r\omega_0$ ($0 \leq r < N/2$) формула (12) примет вид

$$F(r\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\sin \frac{(n\omega'_0 - r\omega_0)T}{2}}{\frac{n\omega'_0 - r\omega_0}{2}} e^{\frac{j(n\omega'_0 - r\omega_0)T}{2}} = TA_r, \quad (14)$$

где коэффициенты Фурье, определяемые по ограниченной интервалом T реализации сигнала, совпадают, если не учитывать методическую погрешность [4], с результатом ДПФ этого отрезка. N — число частотных отсчетов при ДПФ. Теперь, согласно выражению (14), преобразование Фурье можно интерпретировать как прохождение исследуемого сигнала через набор фильтров с частотными характеристиками

$$\frac{\sin \frac{(\omega - r\omega_0)T}{2}}{\frac{\omega - r\omega_0}{2}} e^{\frac{j(\omega - r\omega_0)T}{2}},$$

центральные частоты которых отстоят друг от друга на интервал, кратный ω_0 , а коэффициенты A_r как выходные сигналы этих фильтров в момент времени $t = T$. Графически это можно представить так, как показано на рис. 2.

На рис. 3 преобразование Фурье изображено в виде набора полосовых фильтров и приведены три случая соотношений между длительностью реализации T и периодом сигнала T' . Сигнал для простоты выбран состоящим из одной гармоники. С той же целью при рассмотрении не учитываются фазовые соотношения. При этом видно, что, если гармоника сигнала находится на частотной оси в положении I , возникает отклик только на выходе II фильтра, частотные же характеристики остальных фильтров попадают в эту точку своими нулями; только в этом случае можно получить точные данные о спектре сигнала. В положении 2 гармоника сигнала дает одинаковые отклики на выходе I и II фильт-

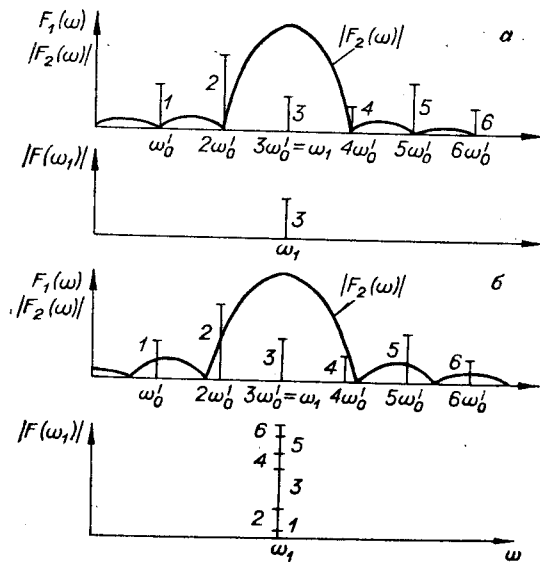


Рис. 1. Сигнал на выходе фильтра с центральной частотой $\omega_1 = 3\omega_0$: а — $T = T'$; б — $T < T'$.

амплитуда падает до уровня 0,637 [6], что является ее наибольшим отклонением от истинного значения. Этот эффект в литературе [6] носит название паразитной амплитудной модуляции спектра (эффект «частотола»). Все сказанное выше, конечно, не относится к сигналам, которые существуют только в интервале рассмотрения. Для такого рода сигналов без дополнительных мер может быть получена точная спектральная информация. На рис. 3 рассмотрен эффект растекания одной спектральной составляющей сигнала. Реальный же сигнал может содержать большое количество гармоник, которые, растекаясь, оказывают взаимное искажающее влияние друг на друга.

Таким образом, анализируя ограниченный отрезок сигнала, в большинстве случаев мы получаем о нем существенно искаженную спектральную информацию.

Пути ослабления действия эффектов растекания спектральных составляющих и паразитной амплитудной модуляции спектра. Растекание спектральных составляющих и паразитная амплитудная модуляция

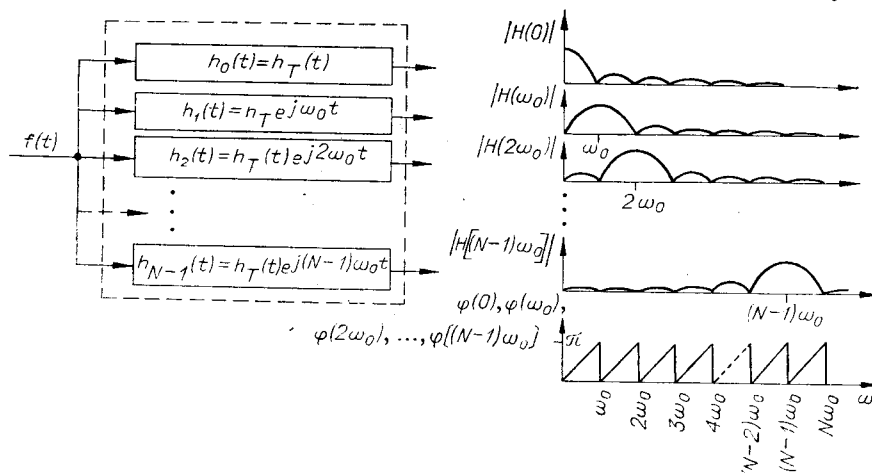


Рис. 2. Представление преобразования Фурье в виде набора полосовых фильтров.

ров и меньшие отклики, обусловленные боковыми лестницами, на выходах остальных фильтров. В положении 3 наибольший отклик возникает на выходе I фильтра, меньший отклик на выходе II фильтра и еще меньшие отклики на выходах других фильтров. Как видно из рассмотрения рис. 3, только в первом случае не происходит «растекания» спектральной составляющей, в остальных же случаях энергия сигнала растекается по спектральным окнам фильтров соседних частот. Видно также, что «наблюдаемая» амплитуда сигнала только в первом положении соответствует истинной, во втором же —

спектра заставляют искать пути ослабления действия этих факторов. Одним из таких методов является увеличение длительности анализируемой реализации сигнала, что ведет к уменьшению частоты первой гармоники $\omega_0 = 2\pi/T$, сгущению частотной сетки $r\omega_0$ моделируемых преобразованием Фурье полосовых фильтров и сужению их частотных характеристик. Следствием этого является меньшее влияние соседних гармоник друг на друга, однако глубина паразитной амплитудной модуляции спектра остается при этом неизменной.

В [6] описан метод ослабления эффекта паразитной амплитудной модуляции, в соответствии с которым исходный массив чисел дополняется нулями, что дает дополнительные отсчеты спектра на частотах, лежащих между частотами исходной сетки. Поскольку полоса пропускания фильтра, ассоциируемого с каждым из коэффициентов Фурье, зависит только от исходной длины массива T , она остается неизменной при таком дополнении. Это означает, что частотные характеристики фильтров, ассоциируемых с новым набором коэффициентов Фурье, перекрывают друг друга в большей степени.

Описанные выше методы ослабления эффектов растекания спектральных составляющих и паразитной амплитудной модуляции спектра требуют при реализации значительного увеличения объема памяти и времени вычисления, что не всегда приемлемо. В силу этого применение таких методов ограничено.

Из предыдущего рассмотрения видно, что значительная доля растекшейся энергии спектральных составляющих обусловлена высоким уровнем боковых лепестков частотных характеристик моделируемых фильтров. Поэтому с целью получения более точной спектральной информации обычно стремятся локализовать энергию вокруг центральной частоты, уменьшая растекание ее по боковым лепесткам. Известным методом достижения этого является использование взвешивающих функций с меньшим уровнем боковых лепестков по сравнению с прямоугольной взвешивающей функцией $h_T(t)$, образованной путем ограничения временного интервала (см. [7]) и лежащей в основе всего предыдущего рассмотрения. Следует заметить, что применение взвешивающих функций, отличных от прямоугольной, помимо уменьшения уровня боковых лепестков частотных характеристик, ведет к расширению главного лепестка, что ухудшает частотное разрешение. На рис. 4 приведены формы амплитудно- и фазочастотных характеристик (АЧХ и ФЧХ) некоторых наиболее употребимых взвешивающих функций.

О выборе взвешивающих функций при спектральном анализе периодических сигналов. Выбор той или иной взвешивающей функции в значительной мере зависит от задачи, стоящей перед спектральным анализом. Можно выделить три довольно часто встречающиеся цели спектрального анализа: получение по возможности более точной информации или а) об амплитудах спектральных компонент, или б) о фазах, или в) о частотах спектра сигнала. Несомненно, встречаются случаи, когда эти задачи требуют одновременного разрешения. Однако сфор-

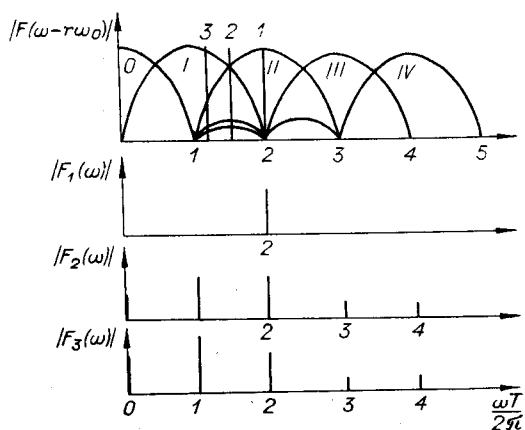


Рис. 3. Эффект растекания спектральной составляющей для трех случаев:

1) $T = iT'$ (i — целое); 2) $T = 1,5 T'$; 3) $T > T'$.

мулированные выше цели спектрального анализа являются противоречивыми и поэтому одновременное их решение требует определенного компромисса.

Остановимся на первой из указанных задач. На точность определения амплитуд гармоник сигнала влияют два вида погрешностей: 1) вызванная влиянием соседних спектральных компонент, 2) вносимая паразитной амплитудной модуляцией спектра. Допустимая величина первой погрешности влияет на выбор минимально допустимого частот-

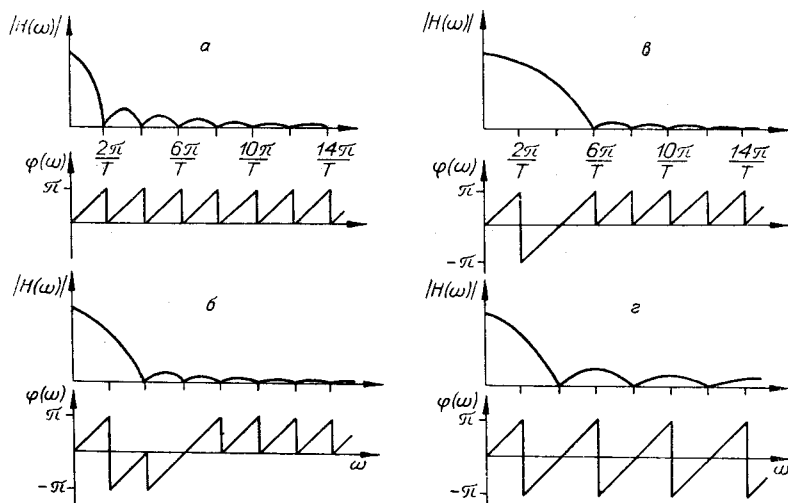


Рис. 4. Форма амплитудных и фазовых характеристик некоторых видов взвешивающих функций:
 а — прямоугольной; б — Хэмминга и Хэна; в — квадрата функции Хэна; г — оценки Бартлетта.

ного интервала между соседними гармониками или же, если он задан, на необходимую длину реализации T . При этом допустимая величина второй погрешности обуславливает выбор такой взвешивающей функции, при использовании которой главные лепестки частотных характеристик двух соседних фильтров, ассоциируемых с преобразованием Фурье и разделенных интервалом $2\pi/T$, пересекаются в точке, отличающейся от максимума главного лепестка на величину, не превышающую допустимой погрешности.

Рассмотрим сначала подход к выбору взвешивающей функции, исходя из допустимой величины первой погрешности.

Согласно (14), в выходной сигнал каждого фильтра, моделируемого преобразованием Фурье, привносятся все гармоники анализируемого сигнала. Эта доля зависит от амплитуды и фазы каждой гармоники, ее положения относительно частоты отсчета, а также от амплитудно-фазовой характеристики фильтра.

Оценим среднеквадратичную приведенную погрешность, вносимую соседними гармониками сигнала в анализируемую, считая амплитуды всех соседних гармоник равными единице и полагая, что соседние гармоники расположены в точках частотной оси, соответствующих максимумам боковых лепестков АЧХ.

При этом среднеквадратичная погрешность равна

$$\Delta_p = c \sqrt{2 \sum_{i=1}^{\infty} (1/i^\alpha)^2}; \quad (15)$$

здесь c — отношение первого бокового лепестка АЧХ фильтра к глав-

Таблица 1

Вид взвешивающей функции и закон спада боковых лепестков АЧХ	Доля вклада соседних гармоник сигнала в анализируемую, %	Доля вклада соседних гармоник сигнала, попадающих на первый боковой лепесток АЧХ, %	Доля вклада соседних гармоник сигнала, попадающих на боковые лепестки АЧХ дальше первого, %
Прямоугольная ($1/i$)	33,33	30,68	6,65
Оценка Бартлета ($1/i^2$)	6,620	6,36	0,26
Функция Хэна ($1/i^3$)	3,851	3,818	0,033
Квадрат функции Хэна ($1/i^5$)	1,414056	1,414000	$5,6 \cdot 10^{-6}$
$\left\{ 1 + \cos \left[\pi \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \right] \right\}$ ($1/i^5$)	0,0212	0,0212	≈ 0
$\left\{ 1 + \cos \left[\pi \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \times \right. \right.$ $\left. \times \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \right] \right\}$ ($1/i^7$)	$0,28 \cdot 10^{-6}$	$0,28 \cdot 10^{-6}$	≈ 0

ному; $1/i^a$ — закон спада боковых лепестков; i — номер бокового лепестка. Величины этой погрешности для различных взвешивающих функций приведены в табл. 1. Из нее видно, что для всех приведенных в ней взвешивающих функций, кроме прямоугольной, доля вклада соседних гармоник сигнала, попадающих на боковые лепестки АЧХ дальше первого, составляет величину, на порядок и более отличающуюся от доли вклада соседних гармоник сигнала, попадающих на первый боковой лепесток АЧХ. Поэтому для этих функций можно ограничиться рассмотрением влияния на анализируемую только соседних гармоник сигнала, попавших на первые боковые лепестки АЧХ. Для прямоугольной же взвешивающей функции необходим учет влияния и других соседних гармоник сигнала. Оценим это влияние. Из выражения (15), полагая, что анализируемая гармоника находится в точке частотной оси $N/4T$ (при этом влияние соседних гармоник максимально), считая преобразование Фурье конечным, а величину $c \approx 0,2$, получим

$$\Delta_p^2 = 0,08 \sum_{i=1}^{N/4-1} 1/i^2 \quad (16)$$

в предположении, что соседние гармоники сигнала, влияние которых рассматривается, появляются через интервал, приблизительно равный $1/T$, т. е. попадают на все боковые лепестки АЧХ. Эту же формулу в случае, если гармоники сигнала расположены на частотной оси в m раз реже, можно представить в виде

$$\Delta_p^2 = \frac{0,08}{m^2} \sum_{i=1}^{N/4-1} 1/i^2. \quad (17)$$

С учетом возможных вариаций соседних гармоник в пределах боковых лепестков АЧХ, аппроксимированных функцией вида $\sin x$, влияние соседних гармоник должно быть ослаблено в $\sqrt{2}$ раз, т. е.

$$\Delta_p^2 = \frac{0,04}{m^2} \sum_{i=1}^{N/4-1} 1/i^2. \quad (18)$$

Представляя $\sum_{i=1}^{\frac{N/4-1}{m}} = \sum_{i=1}^{\infty} - \sum_{\substack{\infty \\ \frac{N/4-1}{m}}}$ и вычисляя последнее слагаемое

по формуле Эйлера — Ньютона [8] (ограничиваясь двумя первыми слагаемыми в формуле), получим при условии, что обычно $\left(\frac{N/4-1}{m} + 1\right) \approx \frac{N}{4m}$,

$$\Delta_p^2 = \frac{0,04}{m^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{4m}{N} + \frac{8m^2}{N^2} \right); \quad (19)$$

$$m \geq \frac{24N - 10 \sqrt{13,44N^2 + 60N^4 \Delta_p^2}}{96 - 300N^2 \Delta_p^2}. \quad (20)$$

Из выражения (19) при заданных N и Δ_p может быть определен минимальный частотный интервал между гармониками сигнала, позволяющий обеспечить заданную величину погрешности Δ_p .

Для остальных взвешивающих функций с учетом одной соседней гармоники с каждой стороны среднеквадратичная погрешность равна

$$\Delta_p = \frac{c \sqrt{2}}{m^\alpha}, \quad (21)$$

где α — показатель, определяющий закон спада боковых лепестков АЧХ фильтра.

Если взвешивающая функция обладает малым уровнем боковых лепестков и, следовательно, широким главным лепестком, то в силу значительного подавления гармоник, попавших в боковые лепестки, можно допустить в главный лепесток, помимо анализируемой, и ближайшие соседние гармоники, если они в сумме при колебаниях анализируемой частоты в пределах $\pm \omega_0/2$, не превышают допустимой среднеквадратичной погрешности, т. е.

$$\Delta_{p\text{доп}} \geq \sqrt{2} \frac{1}{\omega_0} \int_{r\omega_0 - \omega_0/2}^{r\omega_0 + \omega_0/2} H(\omega) d\omega \approx \sqrt{2} H(r\omega_0). \quad (22)$$

Отсюда можно найти такое $r\omega_0$, а следовательно, частотное разрешение, при котором $\Delta_p \leq \Delta_{p\text{доп}}$.

Теперь рассмотрим погрешность, вносимую паразитной амплитудной модуляцией спектра, и меры для ее уменьшения. Нетрудно заметить, что для того чтобы эта погрешность не превышала допустимой величины, необходимо, чтобы значение АЧХ взвешивающей функции $|H(\omega)|$ в точке $\omega_0/2 = \pi/T$, в которой всегда пересекаются главные лепестки соседних спектральных окон, удовлетворяло неравенству

$$1 - |H(\omega_1)| \leq \Delta_{M\text{доп}}, \quad (23)$$

где $\Delta_{M\text{доп}}$ — доля допустимой погрешности, отпущенная на эффект «частотокола», а $|H(\omega)|_{\text{max}} = 1$. В качестве примера рассмотрим семейство взвешивающих функций, выражаемых аналитически формулой

$$h_M(t) = K h_T(t) (1 - \cos \omega_0 t)^M, \quad (24)$$

где

$$h_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при } 0 > t, t \geq T; \end{cases} \quad K = \frac{2^M (M!)^2}{(2M)!}; \quad M = 0, 1, 2, \dots$$

Неравенство (23) для этого семейства функций имеет вид

$$1 - \frac{K}{2^M} \sum_{r=-M}^M \binom{2M}{M-|r|} \frac{\sin \frac{(\omega - r\omega_0)T}{2}}{\frac{(\omega - r\omega_0)T}{2}} \leq \Delta_{M\text{доп}}. \quad (25)$$

По выражению (25) были подсчитаны максимальные погрешности в определении амплитуд спектральных составляющих, возникающие из-за паразитной амплитудной модуляции спектра для $M=0, \dots, 4$. Они сведены в табл. 2. Из таблицы видно, что даже использование взвешивающих функций высоких порядков (большое M) не позволяет уменьшить погрешность ниже, чем до нескольких процентов. Поэтому для дальнейшего снижения этой погрешности необходимо или воспользоваться методом дополнения реализации нулями, рассмотренным ранее, или применить один из методов интерполяции [2]. Следует учитывать, что на практике эффект «частотокола» не всегда опасен. Во многих случаях обрабатываемый сигнал не является чистой синусоидой, а достаточно широкополосен для заполнения нескольких фильтров, что снижает этот эффект.

Таблица 2

Порядок взвешивающей функции (M)	Максимальная амплитудная погрешность, %
0	36,3
1	15
2	9,5
3	6,9
4	5,4

Остановимся на вопросе искажения фазовой информации о сигнале вследствие его временного усечения. При этом так же, как и при рассмотрении амплитудных искажений, можно выделить искажения, вызванные паразитной модуляцией фазового спектра и влиянием соседних гармоник сигнала. Учет эффекта модуляции фазового спектра, как это видно из формулы (14) и рис. 4, несложен, если принять во внимание линейный характер зависимости ФЧХ взвешивающих функций. Кроме того, предполагается, что местоположение интересующей нас гармоники сигнала известно или определено с помощью одного из методов интерполяции [2]. Влияние соседних гармоник сигнала можно учесть, рассматривая совокупное действие этих гармоник в виде вектора, величина которого равна среднеквадратичному значению вклада соседних гармоник в анализируемую, оцененного выражениями (19), (21), (22), а разность фаз между этим вектором и вектором, представляющим анализируемую гармонику, равна $\pi/2$. При этом среднеквадратичная оценка фазовой погрешности от влияния соседних гармоник может быть вычислена как

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \Delta p/B, \quad (26)$$

что при $B \gg \Delta p$ дает $\Delta\varphi \approx \Delta p/B$, где B — амплитуда анализируемой гармоники. Если $B=1$, то $\Delta\varphi \approx \Delta p$.

На практике, кроме данных об амплитудах и фазах гармоник сигнала, часто интересуются и частотами гармоник. В случае использования ДПФ моделируется частотная сетка $\tau\omega_0$. Поэтому частоты гармоник сигнала, не совпавшие с частотами отсчета, могут быть определены с погрешностью π/T . Уменьшить эту погрешность можно, либо увеличив интервал рассмотрения T , либо интерполируя коэффициенты Фурье [2].

Метод интерполяции коэффициентов Фурье при ДПФ. В работе [2] описаны методы интерполяции, имеющие вычислительные процедуры, существенно отличные от базовых операций процессоров, реализующих алгоритм БПФ [7]. Рассмотрим метод, свободный от этого недостатка.

Исходя из данной выше интерпретации ДПФ как набора полосовых фильтров, рассмотрим отклики на выходах двух фильтров, центральные частоты АЧХ которых — ближайшие к частоте анализируемой гармоники — расположены по обе стороны от нее (рис. 5, а). Значения A_1 и A_2 являются откликами фильтров на гармонику сигнала с частотой $(n+\beta)\omega_0$ и амплитудой B и совпадают с коэффициентами Фурье — результатами ДПФ. Как видим, и A_1 и A_2 отличаются от амплитуды B , которая, собственно, и есть искомый результат анализа.

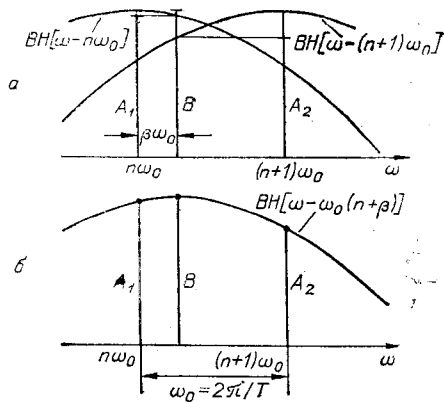


Рис. 5. Определение коэффициента Фурье методом интерполяции.

функцией вида $\sin x$ в интервале $[(n-1+\beta)\omega_0, (n+1+\beta)\omega_0]$ так, чтобы значения аппроксимирующей функции на концах интервала совпали с аппроксимируемой. При этом качество аппроксимации для различных взвешивающих функций, естественно, различно. Подсчет погрешности аппроксимации показал, что максимум ее значения составляет 8,5% для прямоугольной взвешивающей функции, 2% для функции вида $(1+\cos \omega_0 t)$, 0,7% для $(1+\cos \omega_0 t)^2$ и 0,6% для $1 + \cos \left[\pi \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \right]$. Как видно, погрешность для первых двух

приведенных функций значительна. Для ее уменьшения можно воспользоваться, например, методом дополнения массива данных нулями. Так, при удвоении массива за счет добавленных нулей интервал аппроксимации сокращается вдвое $\left[\left(n - \frac{1}{2} + \beta \right) \omega_0, \left(n + \frac{1}{2} + \beta \right) \omega_0 \right]$. При этом погрешность аппроксимации уменьшается соответственно до 0,5; 0,1; 0,06; 0,05%, что даже для функций, имевших значительную погрешность без этих мер, вполне удовлетворительно. Такая погрешность сохраняется внутри интервалов аппроксимирующей функции α (табл. 3).

Обсудим процедуру нахождения интерполированных коэффициентов Фурье. Считая, что известны значения двух коэффициентов Фурье A_1 и A_2 (наибольших) для каждой гармоники сигнала, а следовательно, две точки аппроксимирующей функции, разделенные интервалом на частотной оси $2\pi/T$ или π/T , в случае дополнения массива данных половиной нулей найдем амплитуду B интересующей гармоники. Два известных коэффициента Фурье можно выразить так:

$$A_1 = B \sin \varphi; \quad (27)$$

$$A_2 = B \sin (\varphi + \alpha). \quad (28)$$

Их отношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \alpha)}, \quad (29)$$

откуда

$$A_1 \sin (\varphi + \alpha) = A_2 \sin \varphi, \quad (30a)$$

или в комплексной записи

$$A_1 \operatorname{Im} W^{\varphi+\alpha} = A_2 \operatorname{Im} W^{\varphi}, \quad (30б)$$

где $W^{\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$; φ — аргумент аппроксимирующей функции. Итеративно, путем подбора φ , решаем это трансцендентное уравнение

$$A_1 \operatorname{Im} W^{\varphi+\alpha} - A_2 \operatorname{Im} W^{\varphi} \cong 0. \quad (31)$$

На рис. 5, б АЧХ левого фильтра смещена на величину $\beta\omega_0$ вправо. Из рисунка видно, что задача будет решена, если по двум значениям (известным) функции $BH[\omega - (n+\beta)\omega_0]$ в точках $n\omega_0$ и $(n+1)\omega_0$, зная аналитическое выражение $H(\omega)$ примененной взвешивающей функции, отыскать максимальное значение функции $BH[\omega - (n+\beta)\omega_0]$, соответствующее истинной амплитуде спектральной составляющей B , и точку $(n+\beta)\omega_0$ частотной оси, соответствующую этому значению. Учитывая сложность аналитических выражений АЧХ взвешивающих функций, аппроксимируем их

Таблица 3

Вид взвешивающей функции	Интервал изменения аргумента аппроксимирующей функции (α)		$B_{гр}$ (при $B_{макс}=1$)	
	без дополнения нулями	с дополнением нулями	без дополнения нулями	с дополнением нулями
Прямоугольная	90°	50°30'	0,025	0,045
$(1 + \cos \omega_0 t)$	60°	31°55'	0,038	0,071
$(1 + \cos \omega_0 t)^2$	48°10'	25°10'	0,047	0,090
$\left\{ 1 + \cos \left[\pi \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{2t}{T} - 1 \right) \right] \right\}$	46°	23°50'	0,050	0,095

Равенство достигается при $\varphi_i = \varphi$. По известному φ величина амплитуды B может быть найдена итеративно из уравнения (27):

$$A_1 = B_i \operatorname{Im} W^\varphi \geq 0. \quad (32)$$

Из сравнения процедур вычисления с базовой операцией БПФ [7], имеющей вид

$$\dot{c} = a + bW, \quad (33)$$

видим, что (31) соответствует нахождению реальной части комплексного числа \dot{c} при $\operatorname{Re} a = 0$, а (32) — при $\operatorname{Re} W = 0$.

Оценим возникающие при таких вычислениях погрешности. Погрешность $\Delta\varphi$ определения угла φ находим из (31):

$$|A_1 \operatorname{Im} W^{\varphi + \Delta\varphi + \alpha} - A_2 \operatorname{Im} W^{\varphi + \Delta\varphi}| = 2^{-l}, \quad (34)$$

где l — разрядность операционного устройства процессора, или с учетом (27) и (28)

$$B \sin \alpha \sin \Delta\varphi = 2^{-l}. \quad (35)$$

Существует граничное значение B , соответствующее погрешности дискретности задания угла φ , равной $\Delta\varphi_{\min}$:

$$B_{гр} = \frac{2^{-l}}{\sin \alpha \sin \Delta\varphi_{\min}} \approx \frac{2^{-l}}{\Delta\varphi_{\min} \sin \alpha}. \quad (36)$$

Если $B > B_{гр}$, то $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{\min}$, т. е. $\Delta\varphi$ полностью определяется дискретностью задания угла. При $B < B_{гр}$ [см. (35)]

$$\Delta\varphi = \arcsin \frac{2^{-l}}{B \sin \alpha}. \quad (37)$$

Для рассмотренных выше взвешивающих функций значения $B_{гр}$, полученные при $l=13$, $\Delta\varphi_{\min} = 2^{-10}\pi$, приведены в табл. 3.

Погрешность ΔB определения амплитуды B находится из уравнения (32). При l -разрядном операционном устройстве

$$|A_1 - (B + \Delta B) \sin(\varphi \pm \Delta\varphi)| \leq 2^{-l}, \quad (38)$$

откуда в случае равенства при $\varphi \gg \Delta\varphi$

$$\Delta B \approx \frac{2^{-l}}{\sin(\varphi \pm \Delta\varphi)} \approx \frac{i2^{-l}}{\sin\left(\varphi \pm \frac{2^{-l}}{A_1 \sin \varphi \sin \alpha}\right)}, \quad (39)$$

т. е. ΔB определяется дискретностью изменения B_i в (32). При $B > B_{гр}$

$$\Delta B = \frac{2^{-l}}{\sin(\varphi \pm \Delta\varphi_{\min})}. \quad (40)$$

По известной величине угла φ можно уточнить значения частоты и фазы искомой гармоники. Уточненное значение частоты n -й гармоники можно найти, как нетрудно видеть, по выражению

$$f_n = \frac{1}{T} \left[n + \frac{1}{\alpha} (\pi/2 - \varphi) \right], \quad (41)$$

а ее фазу, принимая во внимание линейность фазочастотной характеристики взвешивающих функций [2], по выражению

$$\theta_n = \theta - \pi \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad (42)$$

где n — номер левого, используемого при интерполяции коэффициента Фурье, а θ_n — фаза, соответствующая этому коэффициенту.

Следует отметить, что описанный метод интерполяции применим в случае, если можно пренебречь взаимным влиянием соседних гармоник друг на друга.

Заключение. Таким образом, для объяснения эффектов растекания спектральных составляющих и паразитной амплитудной модуляции, существенно искажающих результаты спектрального анализа периодических сигналов по их отрезкам ограниченной длительности, ДПФ можно интерпретировать как набор полосовых фильтров, что позволяет более целенаправленно искать пути повышения точности спектрального анализа.

Эти эффекты могут быть существенно ослаблены применением взвешивающих функций с малым уровнем боковых лепестков АЧХ. При этом взвешивающие функции рекомендуется выбирать из условия получения минимального частотного интервала между гармониками сигнала, обеспечивающего допустимую составляющую погрешности из-за влияния гармоник друг на друга.

Дальнейшее повышение точности обеспечивают интерполяционные методы. Предложенный в работе метод интерполяции коэффициентов Фурье позволяет, используя операционное устройство процессора БПФ, существенно повысить точность определения параметров спектральных компонент сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Серебрянников, А. А. Первозванский. Выявление скрытых периодичностей. М., «Наука», 1965.
2. D. C. Rife and G. A. Vincent. Use of the Discrete Fourier Transform in the Measurement of Frequencies and Levels of Tones.— Bell Syst. Techn. J., 1970, 49, № 2.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. М., «Наука», 1967.
4. В. К. Задирака. Оценка преобразований Фурье.— Кибернетика, 1971, № 4.
5. А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. М., «Мир», 1971.
6. Г. Бергланд. Руководство к БПФ.— Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 3.
7. Клайн и др. Специализированный процессор для быстрого решения задач гармонического анализа.— Электроника, 1968, № 3.
8. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 4. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Поступила в редакцию 7 июля 1972 г.,
окончательный вариант — 24 октября 1972 г.