

Эта конструкция обеспечивала давление ртути в трубке, близкое к оптимальному (оптимальное давление паров ртути при $\varnothing 3$ мм составляет 10^{-2} мм рт. ст.) при токе разряда 15 мА. Размеры катода: внутренний диаметр 40 мм, длина 50 мм, диаметр торцевой выходной трубки с окном 5 мм при ее длине 60 мм, причем часть трубки, входящая внутрь катода, составляла 30 мм. Внутренняя трубка необходима для того, чтобы исключить доступ ртути и распыляемого материала катода на поверхность выходного окна. Катод был изготовлен из алюминия.

В заключение следует отметить, что трубки аналогичной конструкции могут быть использованы в лазерах, использующих вещества, пары которых применяются для создания активных сред. В связи с интересом к двухчастотным лазерам видимого и других диапазонов, на наш взгляд, может оказаться полезной и конструкция резонатора, позволяющая проводить исследования таких систем.

Поступило в редакцию 30 мая 1973 г.

УДК 517.918.32

Р. Д. БАГЛАЙ
(Новосибирск)

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА ЭВМ

Цель настоящего сообщения — информировать читателей журнала о практических возможностях Института автоматизации и электротехники СО АН СССР в решении обратных задач на ЭВМ. Не затрагивая формальной стороны используемых нами методов (см. [1—4]) и тех элементов конструктивной теории, которые были получены в институте [5, 6], мы проиллюстрируем их силу на практических примерах.

1. Для решения одномерных задач, которые представимы линейным интегральным уравнением Фредгольма, нами разработан ряд достаточно универсальных программ, в которых реализуется метод собственных функций ядра, метод сопряженных операторов, метод, основанный на общей схеме регуляризации, по А. Н. Тихонову, метод производящих функций (когда ядро является производящим для какой-либо ортогональной системы функций) и др. Эти программы с равным успехом используются как для восстановления сигналов, искаженных электрическим, оптическим, механическим фильтрами, так и для аттестации самих фильтров, т. е. определения ядра преобразования или, что то же, импульсной переходной функции фильтра.

Для решения обратных задач, представимых дифференциальными уравнениями, нами разработаны программы вычисления высших производных от эмпирических функций с применением регуляризирующих алгоритмов, а также метода, основанного на формальном дифференцировании ряда Фурье-функции и перманентном суммировании ряда, составленного из производных.

В приведенных ниже примерах приняты следующие обозначения: φ , ψ — соответственно истинный и восстановленный сигналы; A — ядро; f — точное значение выходного сигнала; α — параметр регуляризации; η_A , η_F — шум с равномерным распределением, который добавлялся соответственно к A и f ; (a, b) — интервал, на котором задавались функции $F=f+\eta_F$; $h=(b-a)/N$ — шаг; N — число отсчетов. Восстановление сигнала для некоторых модельных задач представлено на рис. 1, a — z . Такого рода задачи возникают, например, в астрофизических исследованиях, в исследовании быстротекающих процессов.

На рис. 1, a , b изображены формы сигналов, восстановленных методом регуляризации нулевого порядка при следующих исходных данных:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma=1; \quad \eta_A = \pm 0,2\% \text{ от } A_{\max}; \quad f=A*\varphi;$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}} \right]; \quad \eta_f = \pm 0,2\% \text{ от } f_{\max};$$

$h=0,1$; $N=40$. На рис. 1, a представлен случай, когда $x_0=1,4$, а на рис. 1, b — $x_0=1$.

Результаты решения более трудной задачи методом регуляризации первого порядка изображены на рис. 1, $в$. Здесь

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}; \quad \sigma_1=1; \quad \eta_A = \pm 1\% \text{ от } A_{\max}; \quad f=A*\varphi; \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}};$$

$$\sigma_2=0,5; \quad f=A*\varphi; \quad \eta_f = \pm 10\% \text{ от } f_{\max}; \quad h=0,1, \quad N=40,$$

$$\alpha=10^{-5}.$$

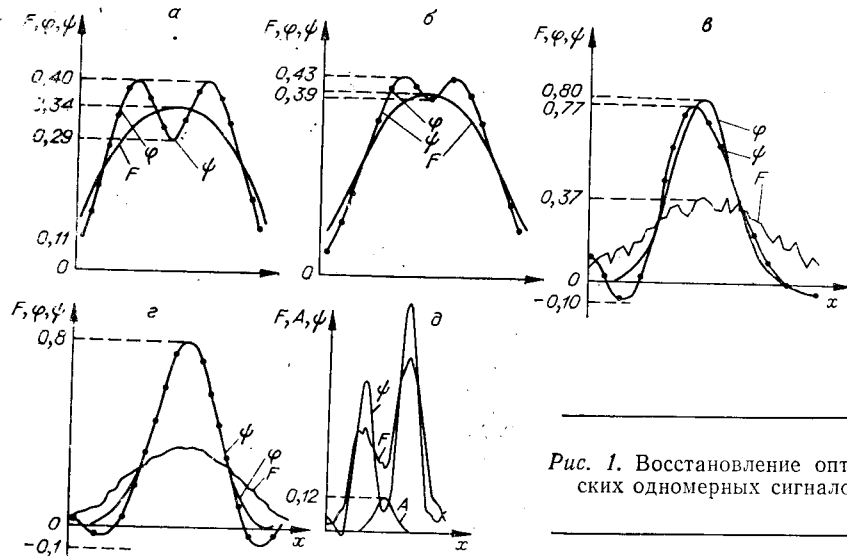


Рис. 1. Восстановление оптических одномерных сигналов.

На рис. 1, г дано решение той же задачи, но при $\eta_f = \pm 4\%$ от f_{\max} .

Разработанные программы применялись для решения практических задач, в частности для восстановления спектральных линий солнца по экспериментальным данным ГАО АН СССР, для восстановления так называемых R-линий рубина по данным ИАЭ (см. рис. 1, д), аттестации механических и электронных фильтров.

На рис. 2, а—г приведены примеры восстановления импульсов, прошедших через электротехнический фильтр с сосредоточенными параметрами. Такого рода задачи возникают в радиотехнических измерениях. На рис. 2, а изображена форма восстановленного

импульса постоянного тока при следующих условиях: $A = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$; $\tau = 0,5$; $\eta_A = \pm 1\%$ от 1; $f = A \cdot \varphi$; $\varphi = 1$; $\eta_f = \pm 20\%$ от 1; $h = 0,01$; $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$. Результаты восстановления экспоненциального импульса показаны на рис. 2, б, где $A_i = \frac{1}{\tau_i} e^{-\frac{x}{\tau_i}}$; $\tau_1 = 5$; $\tau_2 = 10$; $\tau_3 = 25$;

$h = 0,01 \cdot \tau_i$, $i = 1, 2, 3$; $\eta_A = \pm 1\%$ от $A_i (h \cdot n)$, $n = 0, 1, \dots$; $\varphi = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$; $\tau = 0,5$; $f = A \cdot \varphi$; $\eta_f = \pm 2,5\%$ от f ; $N = 40$; $\alpha \approx 10^{-5}$, а синусоидального импульса — на рис. 2, в. Здесь $A = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}$; $\tau = 10$; $\eta_A = \pm 1\%$ от $A (h \cdot n)$; $f = A \cdot \varphi$; $\varphi = \sin \omega x$; $\omega = \frac{\pi}{0,4}$; $\eta_f = \pm 3\%$ от $f (h \cdot n)$; $h = 0,02$; $N = 40$; $\alpha = 10^{-6}$.

Пример восстановления одного полупериода синусоидального сигнала при более сложном ядре дан на рис. 2, г, где

$$A = x e^{-\frac{x}{\tau}}; \quad \tau = 0,2; \quad \eta_A = \pm 2\% \text{ от } A (h \cdot n), \quad n = 1, \dots; \quad f = A \cdot \varphi; \\ \varphi = \sin \omega x; \quad \omega = \pi/0,4; \quad \eta_f = \pm 10\% \text{ от } 1; \quad h = 0,01; \quad N = 40; \quad \alpha = 10^{-5}.$$

Нами исследованы границы целесообразного применения названных выше методов; получены оценки погрешности восстановления сигналов по известным ошибкам измерений ядра и выходного сигнала; разработан конструктивный критерий выбора параметра регуляризации [5]; даны решения некоторых нелинейных обратных задач [6], которые приложимы к аттестации мощных микросхем и др.

2. Наши работы по двумерным обратным задачам в основном связаны с обработкой изображений следующего вида: устранение расфокусировки, смаза и иных систематических искажений; фильтрация сильно зашумленных изображений; сжатие данных; нелинейные преобразования данных с целью выделения отдельных фрагментов изображения. Много внимания уделялось сведению двумерных задач к небольшому числу одномерных операций. Для этого использовались приемы представления функции двух переменных $f(x, y)$, описывающей изображение, в виде билинейного ряда

$$f(x, y) \sim \sum_k \varphi_k(x) \psi_k(y). \quad (1)$$

Его построение выполняется таким образом, что среди аппроксимирующих рядов с конечным числом членов ряд (1) всегда обеспечивает наилучшее приближение в $L^2(a, b)$.

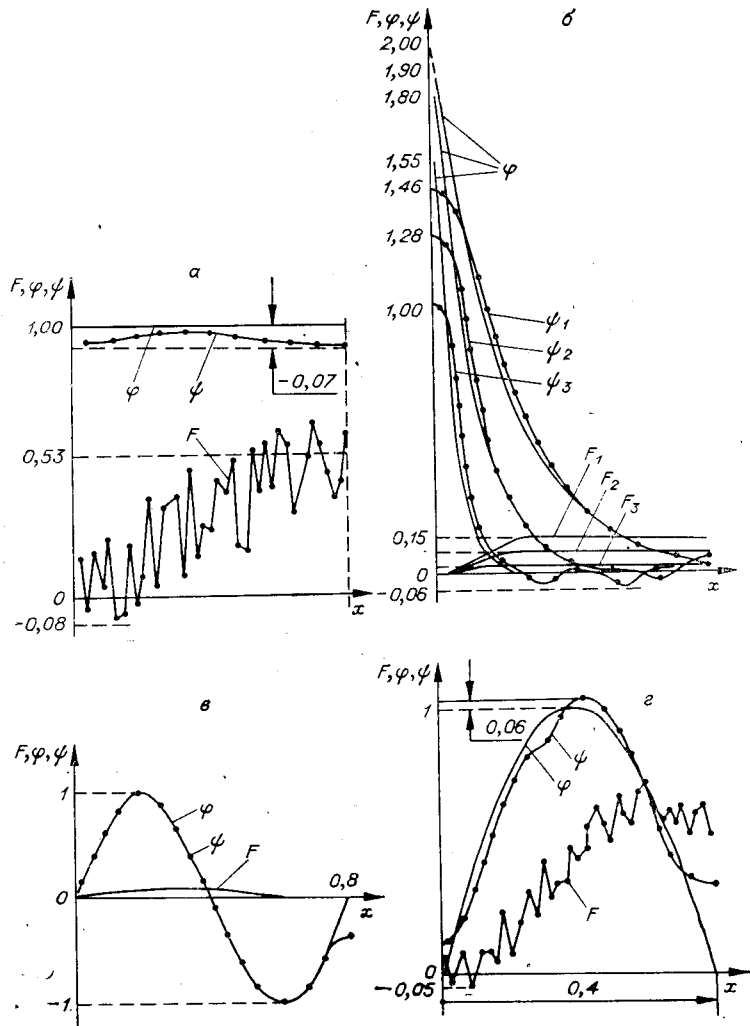


Рис. 2. Восстановление сигналов, прошедших через радиотехнические фильтры с сосредоточенными параметрами.

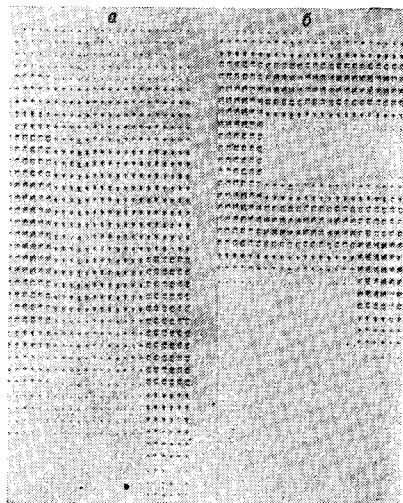


Рис. 3. Восстановление расфокусированного изображения.

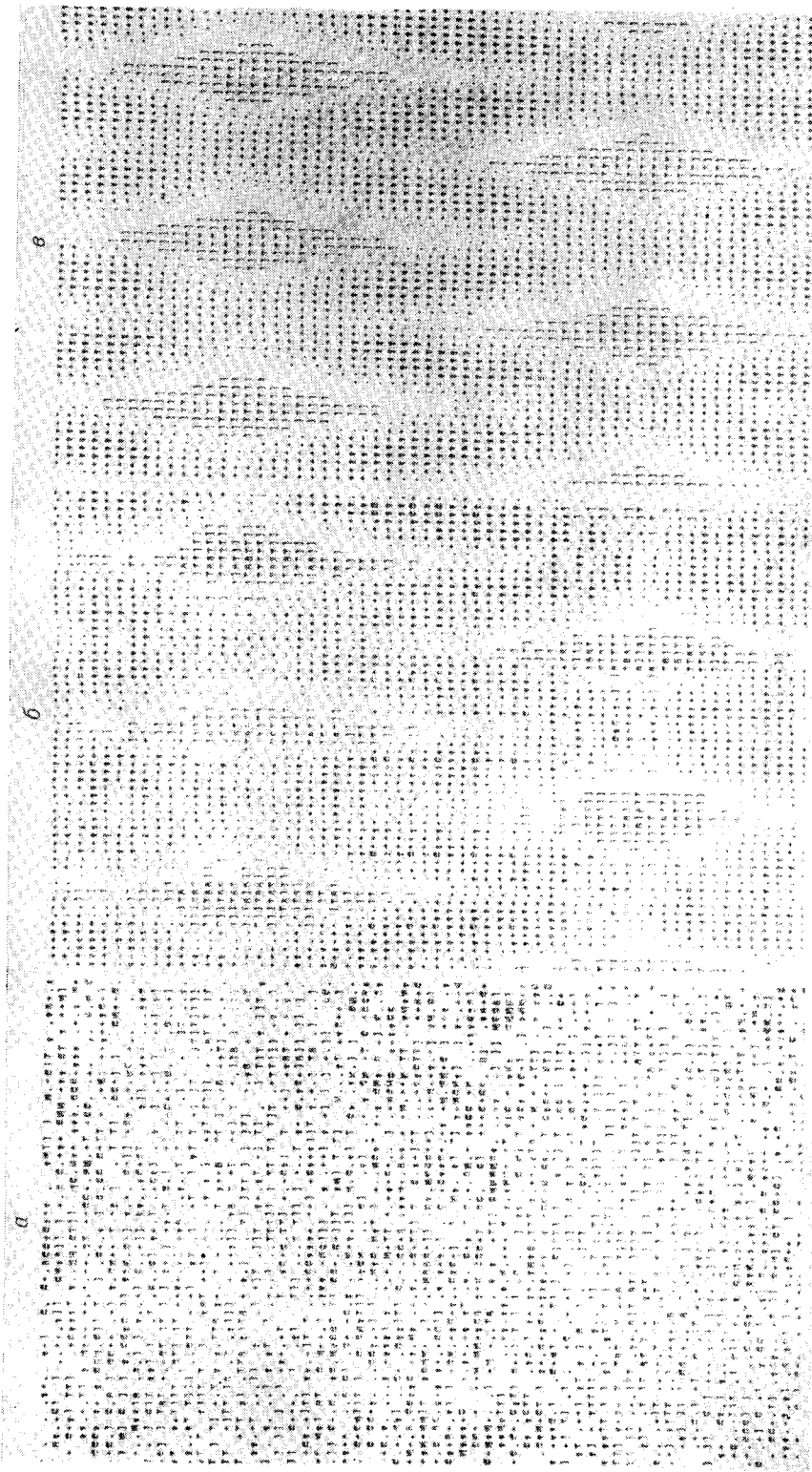


Рис. 4. Пример фильтрации сильно зашумленного изображения.

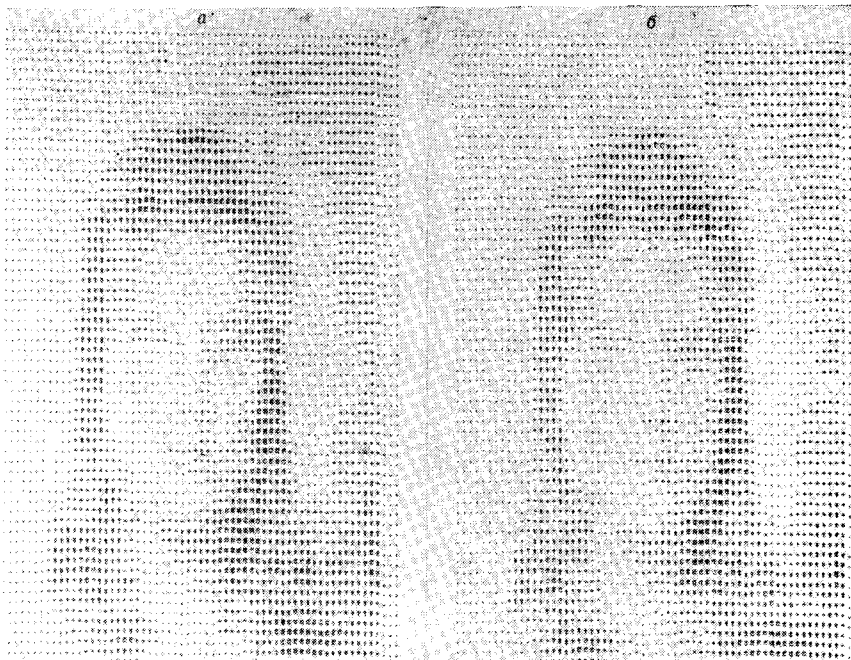


Рис. 5. Пример сжатия исходных данных.

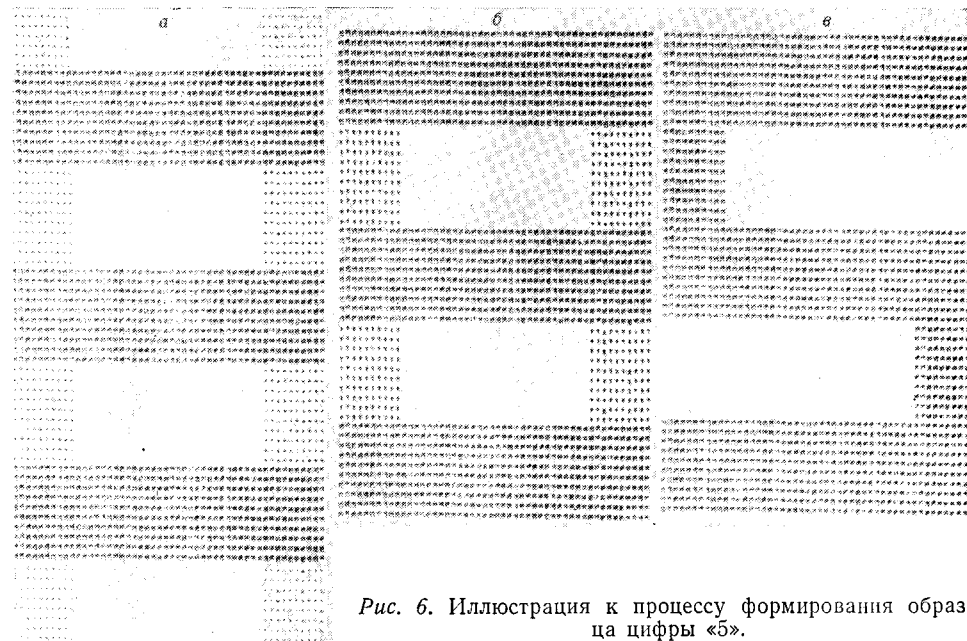


Рис. 6. Иллюстрация к процессу формирования образа цифры «5».

Используя этот прием разложения к выходному сигналу F и ядру A , приближенное решение двумерной обратной задачи можно получить путем выполнения небольшого числа привычных одномерных операций. Поскольку при численном решении многомерной обратной задачи вычисления приходится повторять несколько раз, то практическая польза от указанного представления состоит в сокращении машинного времени счета. В частности, разложение можно с пользой применить при вычислении прямого и обратного Фурье-образа для функции двух и большего числа переменных.

На рис. 3, а, б показано восстановление по части расфокусированного изображения цифры «5». На рис. 4, а, б приведен результат фильтрации зашумленного изображения.

Истинная картина дана на рис. 4, *в*. Эффект сжатия данных иллюстрируется рис. 5, *а, б*. Картина 5, *а* построена по исходному массиву размером 64×64 (экспериментальные данные ИППИ АН СССР), а картина 5, *б* — по сжатому массиву размером 64×14 . Таким образом, достигается сжатие исходных данных более чем в четыре раза. Процесс формирования образа цифры «5» при разложении исходного массива в ряд (1) показан на рис. 6, *а — в*. Картина 6, *а* учитывает два первых слагаемых ряда (1), картина 6, *б* — три, а картина 6, *в* — четыре слагаемых. При этом норма остатка после вычисления суммы четырех слагаемых составила величину порядка 10^{-10} .

Разработанные программы в основном предназначены для вычислений на машинах «Минск-22», «Минск-32».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 1.
2. М. М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
3. Г. И. Марчук. О постановке некорректных обратных задач.— Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 3.
4. М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1969.
5. Р. Д. Баглай. Выбор параметра регуляризации.— Автометрия, 1973, № 1.
6. М. Л. Аграновский, Р. Д. Баглай. О задаче идентификации характеристик объектов, содержащих нелинейный элемент.— Автометрия, 1973, № 1.

Поступило в редакцию 5 сентября 1973 г.
