

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Graybill, R. B. Deal. Combining unbiased estimators.—Biometrics, 1959, v. 15, N 4.
2. J. S. Mehta, J. Gurland. Combinations of unbiased estimators of the mean which consider inequality of unknown variances.—J. Amer. Stat. Assoc., 1969, v. 64, N 327.
3. Т. Ф. Кудряшова. Об оценивании измеряемой величины по двум группам наблюдений.—Автометрия, 1972, № 1.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 19 марта 1973 г.

УДК 621.317.7.088.7

Л. И. ВОЛГИН

(Таллин)

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Автоматическая коррекция погрешности методом итераций (последовательных приближений) является перспективным направлением повышения точности измерительных устройств [1—4]. Итерационная коррекция, как и другие структурные методы повышения точности, требует для своей реализации введения (или наличия) избыточности. Реализация итерационных методов коррекции осуществляется за счет введения аппаратной избыточности (для устройств с пространственным разделением корректирующих каналов) или за счет увеличения времени измерения (для устройств с временным разделением каналов). В ряде случаев итерационные методы являются более эффективными по сравнению с другими способами повышения точности. К настоящему времени можно уже указать следующие области применения итерационной коррекции. Это, во-первых, устройства, изготавливаемые по интегральной технологии, где расход количества оборудования, в частности активных элементов, не является ограничивающим фактором. Благоприятствующими факторами использования итерационных методов повышения точности аналоговых твердотельных (интегральных) схем являются отсутствие обратных связей и однородность (повторяемость) структурной схемы.

Другая область применения итерационных методов — это повышение точности усилительных устройств. Здесь по сравнению со способом повышения точности путем введения обратной связи может быть обеспечена более высокая точность при одинаковом расходе оборудования (усилительных каскадов) или обеспечена та же одинаковая точность при меньшем расходе оборудования. При этом отпадают вопросы, связанные с обеспечением устойчивости. Например, указанная возможность может быть реализована при каскадировании (при последовательном соединении) двухканальных усилительных устройств, построенных по нижеприведенным алгоритмам (3) или (11).

Еще одна обширная область применения итерационных алгоритмов повышения точности — это гибридные измерительные устройства с цифровым отсчетом, в которых погрешность грубого аналогового преобразователя корректируется в соответствии с заложенными алгоритмом средствами дискретной техники. Именно итерационные алгоритмы позволяют реализовать все достоинства гибридной схемотехники в из-

мерительных устройствах (высокую точность, присущую цифровой технике, при относительной простоте схемной реализации, свойственной аналоговым устройствам). В данном случае повышение точности осуществляется за счет потери быстродействия. В частности, итерационные алгоритмы позволяют строить высокоточные цифровые измерители интегральных параметров переменных сигналов (средневыпрямленное, эффективное значение, мощность и др.) в соответствии со следующей последовательностью преобразований: измеряемый параметр — постоянное напряжение — частота — алгоритмическая обработка частотного сигнала для повышения точности — цифровой отсчет.

Итерационные алгоритмы позволяют свести точность измерения (преобразования) практически к точности использованной образцовой меры (в частности, к точности используемых обратных преобразователей). Отметим, что при повышении точности путем введения обратной связи предельно достижимая точность ограничена не погрешностью обратного преобразователя, а условием устойчивости замкнутой системы.

В настоящей работе рассматриваются и анализируются некоторые итерационные алгоритмы повышения точности измерительных устройств.

Целью работы является выявление предельно достижимой для данных алгоритмов точности при наличии неидеальных прямых и обратных преобразователей и вывод аналитических выражений, связывающих результирующие погрешности (мультипликативную и аддитивную) с частными погрешностями прямых и обратных преобразователей, используемых в основном в корректирующих каналах. Рассмотрение проводится на примере структур с пространственным разделением каналов. Это не сужает общности изложения, так как пространственные структуры можно рассматривать как наглядный алгоритм работы структур с временным разделением каналов. При необходимости всегда может быть осуществлен переход от структур с пространственным разделением каналов к структурам с временным разделением каналов. Но при таком переходе следует учитывать, что корреляция (если таковая имелаась) между случайными погрешностями каналов полностью устраняется.

Эффективность итерационных алгоритмов оценивается по степени подавления влияния частных погрешностей (систематических и случайных мультипликативных и аддитивных) промежуточных преобразователей или первого (грубого) измерения (преобразования) y_1 на конечный результат обработки y_n . В основе построения итерационных измерительных устройств лежит принцип моделирования решения уравнения

$$y_n = \varphi(x, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1)$$

способом последовательных приближений. Здесь x есть измеряемая величина, y_i — результат i -го шага итерации, φ — оператор обработки величин x, y_0, y_1, \dots, y_n . Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y_n = k_0 x (1 + \gamma) + \Delta y, \quad (2)$$

где γ и Δy есть соответственно результирующие мультипликативная и аддитивная погрешности.

Алгоритмы с подавлением влияния систематических и случайных мультипликативных погрешностей. Рассмотрим итерационный алгоритм вида

$$y_{i+1} = y_i + f_{i+1}(x - \beta_i y_i). \quad (3)$$

Соответствующая ему структурная схема представлена на рис. 1, а [3]. Здесь Π_i есть «грубые» прямые преобразователи с функцией преобразования вида $x_i = f_i(\varepsilon_i)$, где ε_i — сигнал на входе i -го преобразователя

Π_i ; $\beta_i = \beta(1 + \delta_{\beta_i})$ — коэффициент передачи i -го обратного преобразователя ОП $_i$; δ_{β_i} — относительная нестабильность (мультипликативная погрешность) ОП $_i$, обусловленная отклонением текущего β_i от номинального β значений коэффициента передачи ОП $_i$. При слабо выраженной нелинейности функцию преобразования удобно представить в виде

$$x_i = k_i \varepsilon_i + \Delta x_i = k_0 [1 + \delta_i(\varepsilon_i)] \varepsilon_i + \Delta x_i. \quad (4)$$

Нелинейность Π_i учтена в его мультипликативной частной погрешности $\delta_i = \delta_i(\varepsilon_i)$. Здесь k_0 есть номинальное значение коэффициента передачи k_i , Δx_i — аддитивная частная погрешность Π_i , приведенная к его выходу. С учетом (4) выражение (3) приводится к виду

$$y_{i+1} = (1 - k_{i+1} \beta_i) y_i + k_{i+1} x + \Delta x_{i+1}. \quad (5)$$

Согласно теореме Кенигса [5], итерационный процесс в точке y_i сходится при

$$\left| \frac{dy_{i+1}}{dy_i} \right|_{y_i} < 1. \quad (6)$$

Для рассматриваемого алгоритма условие сходимости, согласно (5) и (6), имеет вид $|1 - k_{i+1} \beta_i| < 1$. Последнее неравенство означает, что при $k_0 \beta = 1$ мультипликативные погрешности прямых и обратных преобразователей должны удовлетворять условию

$$|\delta_{i+1} + \delta_{\beta_i} (1 + \delta_{i+1})| < 1,$$

т. е. при $\delta_{\beta_i} \ll \delta_{i+1}$ (что практически всегда имеет место) мультипликативная погрешность прямых преобразователей не должна превышать $\pm 100\%$. Выражение (5) можно рассматривать как неоднородное разностное уравнение первого порядка, решение которого с учетом начального условия ($y_0 = 0$ при $i = 0$) имеет вид

$$y_i = \frac{k_{i+1} x + \Delta x_{i+1}}{k_{i+1} \beta_i} [1 + (-1)^{i-1} (k_{i+1} \beta_i - 1)^i]. \quad (7)$$

При $k_1 = k_2 = \dots$, $\beta_1 = \beta_2 = \dots$, т. е. при $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta$, $\delta_{\beta_1} = \delta_{\beta_2} = \dots = \delta_{\beta}$, $|\delta_{\beta_i}| \ll |\delta_i| \ll 1$ равенство (7) приводится к выражению (2), в котором при $k_0 \beta = 1$ результирующая мультипликативная погрешность

$$\gamma \approx (-1)^{n-1} \delta^n - \delta_{\beta}. \quad (8)$$

В общем случае условие равенства частных погрешностей прямых и обратных преобразователей не выполняется. В этом случае решение

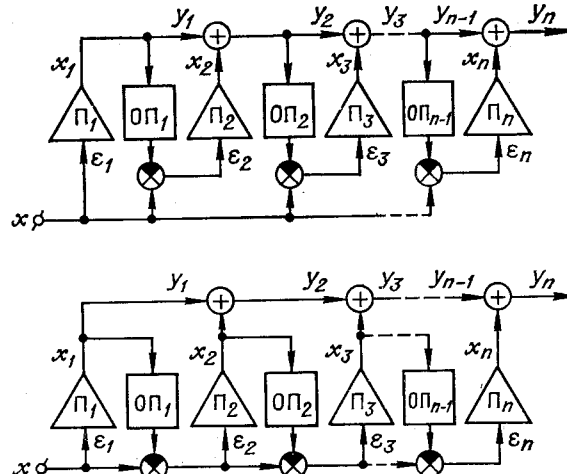


Рис. 1.

получим непосредственной подстановкой каждого предыдущего шага итерации в последующий. Тогда результирующие мультипликативная и аддитивная погрешности в (2) при $|\delta_{\beta_i}| \ll |\delta_i| \ll 1$ и $k_0\beta=1$ будут определяться выражениями

$$\gamma \approx (-1)^{n-1} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n - \delta_{\beta_{(n-1)}}, \quad (9)$$

$$\Delta y \approx \Delta x_n - \delta_n \Delta x_{n-1} + \delta_n \delta_{n-1} \Delta x_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \delta_n \delta_{n-1} \dots \delta_2 \Delta x_1. \quad (10)$$

Рассмотрим другой алгоритм:

$$y_{i+2} = y_{i+1} + f_{i+2} [f_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - \beta_{i-1} (y_{i+1} - y_i)]. \quad (11)$$

Соответствующая структурная схема [6] приведена на рис. 1, б. Здесь функции f и \bar{f} являются взаимобратными. В квазилинейном представлении выражение (11) имеет вид

$$y_{i+2} = \left(1 + \frac{k_{i+2}}{k_{i+1}} - k_{i+2} \beta_{i+1} \right) y_{i+1} - \left(\frac{k_{i+2}}{k_{i+1}} - k_{i+2} \beta_{i+1} \right) y_i + \Delta x_{i+2} - \frac{k_{i+2}}{k_{i+1}} \Delta x_{i+1}. \quad (12)$$

Выражение (12) является неоднородным разностным уравнением второго порядка. Неоднородность уравнения обусловлена наличием аддитивных погрешностей Δx_i . Для алгоритма (12) выражения (2) и (10) остаются в силе. Выражение (9) также остается в силе при замене в нем $\delta_{\beta_{(n-1)}}$ на δ_1 . При пространственном разделении каналов (см. рис. 1) оба рассмотренных алгоритма требуют $n-1$ обратных преобразователей. В [7] дана структурная схема, реализующая алгоритм (11), но при этом используются $1+2+3+\dots+n-1$ обратных преобразователей.

Выражение (9) показывает, что данные алгоритмы осуществляют подавление влияния как случайных, так и систематических составляющих мультипликативных погрешностей прямых преобразователей. Согласно (9), повышение точности за счет увеличения количества итераций ограничено наличием погрешности δ_{β_i} обратных преобразователей. Согласно (10), с увеличением n накопление аддитивной погрешности $\Delta y \approx \Delta x_n$ отсутствует.

Выражение (9) позволяет найти необходимое количество каналов n , исходя из допустимого значения γ_0 результирующей погрешности γ . Обозначив $|(-1)^{n-1} \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n| = \delta^n$, из (9) получим

$$n = \frac{\ln [|\gamma_0| + |\delta_{\beta}|]}{\ln \delta}. \quad (13)$$

Формула (13) не учитывает возможную взаимную компенсацию влияния систематических составляющих первого и второго слагаемых в (9).

Достоинством алгоритмов (3) и (11) является то, что требование равенства частных погрешностей здесь не накладывается. Это позволяет их использовать в устройствах как с пространственным, так и с временным разделением каналов. Другим достоинством алгоритмов (3) и (11) является уменьшение погрешности от нелинейности функции преобразования прямых преобразователей при условии, что $\delta_i(e_i) < 1$.

Алгоритм с подавлением влияния коррелированных случайных и систематических мультипликативных и аддитивных погрешностей. Рассмотрим алгоритм вида

$$y_{i+1} = f_{i+1} [x - \beta_i y_i + \bar{f}_i(y_i)]. \quad (14)$$

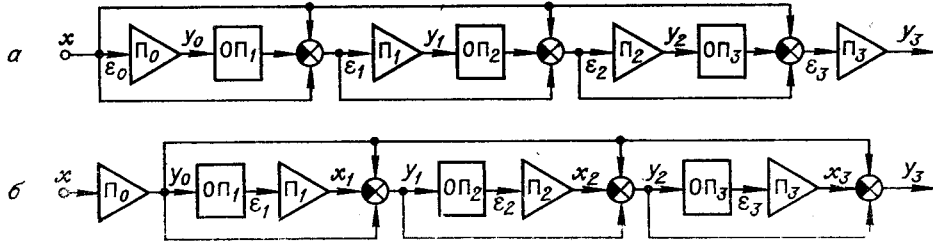


Рис. 2.

Соответствующая структурная схема приведена на рис. 2, а. При квазилинейном представлении получим

$$y_{i+1} = \left(\frac{k_{i+1}}{k_i} - k_{i+1}\beta_i \right) y_i + k_{i+1}x - \frac{k_{i+1}}{k_i} \Delta x_i + \Delta x_{i+1}. \quad (15)$$

Выражение (15) при равных частных погрешностях можно рассматривать как неоднородное разностное уравнение первого порядка, решение которого с учетом начального условия ($y_0=0$ при $i=0$) имеет вид

$$y_i = \frac{k_{i+1}x - \frac{k_{i+1}}{k_i} \Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{1 + k_{i+1}\beta_i - \frac{k_{i+1}}{k_i}} \left[1 + (-1)^{i-1} \left(k_{i+1}\beta_i - \frac{k_{i+1}}{k_i} \right)^i \right]. \quad (16)$$

При $k_0\beta=1$ и равенстве частных погрешностей результирующая мультипликативная погрешность определяется выражением (8), при этом, согласно (16), влияние систематических частных аддитивных погрешностей взаимно компенсируется.

Практически $\delta_1 \neq \delta_2 \neq \dots$ и $\Delta x_1 \neq \Delta x_2 \neq \dots$. В этом случае способом последовательных подстановок приходим к выражению (2), в котором

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{k_1}{k_0} \left(\frac{k_2}{k_1} - k_2\beta_1 \right) \dots \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) + \frac{k_2}{k_0} \left(\frac{k_3}{k_2} - k_3\beta_2 \right) \dots \\ &\dots \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) + \dots + \frac{k_{n-1}}{k_0} \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) + \frac{k_n}{k_0} - 1; \quad (17) \\ \Delta y &= -k_2\beta_1 \left(\frac{k_3}{k_2} - k_3\beta_2 \right) \dots \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) \Delta x_1 - k_3\beta_2 \left(\frac{k_4}{k_3} - k_4\beta_3 \right) \dots \\ &\dots \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) \Delta x_2 - \dots - k_{n-1}\beta_{n-2} \left(\frac{k_n}{k_{n-1}} - k_n\beta_{n-1} \right) \Delta x_{n-2} - \\ &\quad - k_n\beta_{n-1} \Delta x_{n-1} + \Delta x_n. \quad (18) \end{aligned}$$

В частности, при $n=2$, согласно (17) и (18),

$$\gamma \approx -\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2 - \delta_\beta, \quad \Delta y \approx -(1 + \delta_2) \Delta x_1 + \Delta x_2.$$

Аналогичными свойствами обладает алгоритм (рис. 2, б)

$$y_{i+1} = y_i - f_{i+1}(\beta_i y_i) + y_i. \quad (19)$$

При квазилинейном представлении, согласно (19) и (4), получим

$$y_{i+1} = (1 - k_{i+1}\beta_i) y_i + y_i - \Delta x_{i+1}. \quad (20)$$

Решение неоднородного разностного уравнения (20) с учетом начального условия $y_0=0$ при $i=0$ дает

$$y_i = \frac{k_1 x + \Delta x_1 - \Delta x_{i+1}}{k_{i+1} \beta_i} [1 + (-1)^{i-1} (k_{i+1} \beta_i - 1)^i]. \quad (21)$$

При $k_0 \beta = 1$ результирующая мультипликативная погрешность определяется выражением (8). Согласно (21), осуществляется взаимная компенсация влияния систематических составляющих частных аддитивных погрешностей.

Практически условие равенства частных погрешностей не может быть строго обеспечено. Тогда способом последовательных подстановок получим выражение (2), в котором

$$\gamma = \frac{k_1}{k_0} \{1 + \langle 1 + \dots + [1 + (2 - k_2 \beta_1) (1 - k_3 \beta_2)] \dots (1 - k_{n-2} \beta_{n-2}) \rangle (1 - k_n \beta_{n-1})\} - 1; \quad (22)$$

$$\Delta y = \{1 + \langle 1 + \dots + [1 + (2 - k_2 \beta_1) (1 - k_3 \beta_2)] \dots (1 - k_{n-1} \beta_{n-2}) \rangle (1 - k_n \beta_{n-1})\} \Delta x_1 - (1 - k_3 \beta_2) \dots (1 - k_n \beta_{n-1}) \Delta x_2 - (1 - k_4 \beta_3) \dots (1 - k_n \beta_{n-1}) \Delta x_3 - \dots - (1 - k_n \beta_{n-1}) \Delta x_{n-1} - \Delta x_n. \quad (23)$$

Например, при $n=2$

$$\gamma = (1 + \delta_1) [1 - \delta_2 - \delta_{\beta_1} (1 + \delta_2)] - 1 \approx \delta_1 - \delta_2 - \delta_1 \delta_2 - \delta_{\beta_1}.$$

Для алгоритмов (14) и (19) при равенстве частных погрешностей формула (13) остается в силе.

Условие равенства частных погрешностей позволяет использовать алгоритмы (14) и (19) только в устройствах с временным разделением каналов. При этом подавление влияния некоррелированных случайных мультипликативных и аддитивных частных погрешностей отсутствует. Условие равенства частных погрешностей накладывает жесткие требования и к линейности функций преобразования $x_i = f_i(\epsilon_i)$, так как в каждом последующем канале прямой преобразователь Π_i работает при существенно меньшем уровне сигнала по сравнению с предыдущим.

На рис. 3 дана обобщенная структурная схема цифрового измерительного устройства с временным разделением итерационных каналов. Здесь БОА и БОЦ есть соответственно блоки обработки аналоговых и цифровых сигналов, АЦП есть «грубый» аналого-цифровой преобразователь (прямой преобразователь), ЦАП есть точный цифроаналоговый преобразователь (обратный преобразователь) с коэффициентом передачи $\beta = 1/k_0$, ЗУ — запоминающее устройство, ОУ и УУ — отсчетное и управляющее устройства. Все четыре рассмотренных алгоритма — (3), (11), (14) и (19) — укладываются в структурную схему по рис. 3. Принцип действия (последовательность операций) устройства, изображенного на рис. 3, ясен

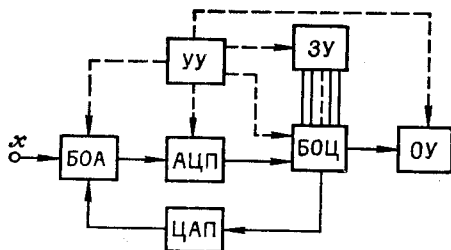


Рис. 3.

из структурных схем на рис. 1 и 2 и не требуют специальных разъяснений. Например, для алгоритма (3) в первом такте блок БОА пропускает сигнал на вход АЦП, а в последующих тактах выполняет операцию суммирования измеряемой величины с выходным сигналом ЦАП. Блок БОЦ суммирует результат предыдущего шага итерации с выходным сигналом АЦП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Алиев, Л. Р. Сейдель. Об анализе сходимости итерационного алгоритма автоматической коррекции погрешностей.— Автометрия, 1971, № 4.
2. В. П. Попов. О точности цифровых измерительных приборов с автоматической коррекцией погрешности.— Автометрия, 1972, № 2.
3. Л. И. Волгин. Об одном классе измерительных цепей с аддитивной коррекцией погрешности.— Тезисы докладов РНТК «Структурные методы повышения точности измерительных устройств и систем». Киев, НТО Приборпром, 1972.
4. Ю. М. Туз. Исследование и разработка структурных методов повышения точности аналоговых и аналого-цифровых преобразователей напряжений.— Автореферат докторской диссертации, Киев, КПИ, 1972.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
6. Л. И. Волгин. Методы построения высокостабильных усилительных устройств.— ЭИКА, вып. 12. М., «Энергия», 1969. Тезисы докладов НТК «Проблемы разработки электронных приборов для измерения электрических напряжений и омических сопротивлений». Таллин, Эстонское правление НТОРиЭ им. А. С. Попова, 1967.
7. I. I. Colembeski et al. A class of minimum sensitivity amplifiers.— IEEE Trans., 1967, v. CT-14, N 1.

Поступила в редакцию 25 сентября 1972 г.
окончательный вариант — 6 ноября 1973 г.

УДК 518.6

М. А. СТАРКОВ

(Новосибирск)

СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ С ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ

В работе* описан метод аналитического продолжения Фурье-спектра финитной функции, известного на отрезке $|\omega| \leq \Lambda$, на всю частотную ось. Для этого использовались функции с двойной ортогональностью, которые образуют полную ортогональную систему на отрезке $|\omega| \leq \Lambda$ и неполную ортогональную систему функций на всей оси.

В настоящей статье дано построение подобной системы в классе функций, заданных на сетке с использованием дискретного преобразования Фурье. Кроме того, показаны наиболее интересные в прикладном отношении свойства сеточных функций с двойной ортогональностью.

Введем следующие обозначения.

Функцию f , заданную на N равностоящих узлах сетки, будем называть также вектором f в N -мерном пространстве R^N с компонентами f_j .

Положим $N=2M$ и будем считать, что индекс при компонентах вектора пробегает все целые значения от $-M+1$ до M .

Будем говорить, что $f \in R^p$, если $f_j=0$ при $|j| > p$ (рис. 1, а), и $f \in R^s$, если $f_j=0$ при $|j| \leq p$ (рис. 1, б), причем

$$2p+2s+2=N.$$

* D. Slepian, H. O. Pollak. Prolate Spheroidal Wave Function, Fourier Analysis and Uncertainty.— Bell. Syst. Techn. J., 1961, v. 40, N 1.