

В. Г. КАГАН, Г. И. ТИТОВ

(Новосибирск)

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ

Широкое применение систем автоматического управления предъявляет различные требования к их качественным показателям. Часто таким показателем является быстродействие системы. Оценкой качества системы в этом смысле может служить время оптимального управления.

В работе рассматриваются алгоритмы оптимального управления позиционными системами n -го порядка с нулевыми корнями при различных комбинациях ограниченных координат. Приведены соотношения для вычисления длительности оптимальных процессов управления и условия перехода от одной формы управления к другой.

Результаты анализа могут быть использованы и для оценки предельного быстродействия позиционных систем с вещественными корнями, если постоянные времени инерционных звеньев велики по сравнению с интервалами управления.

Анализ форм и длительности переходных процессов. Рассматриваемые структуры можно представить в виде интегрирующих звеньев (рис. 1). На рис. 1 и в дальнейшем приняты обозначения: $T_1, T_2 \dots \dots T_n$ — постоянные времени интегрирующих звеньев; a_i — величина ограничения по i -й производной; n — порядок системы; a_0, a_n — выходная координата и старшая производная (управляющий сигнал).

Входное воздействие предполагается всегда ограниченным. В зависимости от величины выходной координаты системы и соотношения ограничений каждая из $(n-1)$ промежуточных координат может достигать или не достигать величины ограничения. Поэтому число возможных видов переходных процессов определяется соотношением

$$K = 2^{n-1}. \quad (1)$$

Известно, что число интервалов управления при ограничении одной только старшей производной для рассматриваемых систем не более порядка дифференциального уравнения, связывающего ограниченную координату с выходом системы. Общее число интервалов управления в случае достижения ограничения нескольких координат составляет [1]

$$m = (n - \kappa + 1)(\kappa - \beta + 1) \dots (\alpha + 1) - 1,$$

где $n > \kappa > \beta > \dots > \alpha$ — номера производных, достигающих ограничения, начиная со старшей. Формы оптимальных управлений можно расположить в порядке возрастания номеров и числа производных, достигающих ограничения, как это представлено на рис. 2. На рисунке

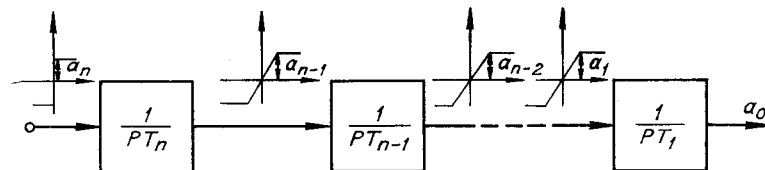


Рис. 1.

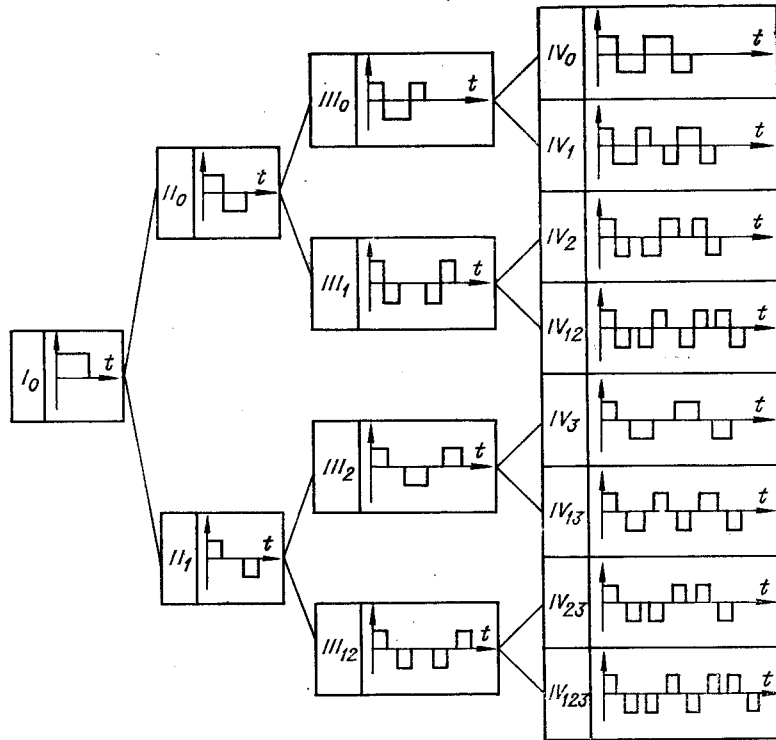


Рис. 2.

римскими цифрами обозначен порядок системы, а соответствующими индексами — номера производных, достигающих ограничения. Например, обозначение IV_{23} соответствует процессу оптимального управления в системе четвертого порядка, когда достигают ограничения вторая и третья производные. В обозначениях не отражено, но всегда подразумевается, что ограничены старшая производная (a_n) и величина выходной координаты (a_0).

При наличии ограничений промежуточных координат процесс оптимального управления системой рассматриваемого порядка распадается на последовательность процессов управления системами меньшего порядка, разделенных интервалами управления, на которых входное воздействие поддерживается на нулевом уровне. При этом

$$n_{\alpha, \beta, \gamma \dots k} = A n_{\beta-\alpha, \gamma-\alpha \dots k-\alpha}, \quad (2)$$

где $n_{\alpha, \beta, \gamma \dots k}$ — обозначение процесса оптимального управления системой n -го порядка с номерами ограниченных координат $\alpha, \beta, \gamma \dots k$; $n_{\beta-\alpha, \gamma-\alpha \dots k-\alpha}$ — обозначение процесса управления системой $(n-\alpha)$ -го порядка с соответствующими номерами ограниченных координат; $A = \alpha + 1$ — число процессов управления $(n-\alpha)$ -го порядка; α — номер младшей ограниченной производной выходной координаты исходной системы. Например, процесс оптимального управления системой шестого порядка VI_{235} состоит из трех процессов оптимального управления системами четвертого порядка IV_{13} .

Из рис. 2 видно, что переходный процесс для любой комбинации ограничений можно представить как определенную композицию процессов, составляющих крайние ветви, которые в данном случае можно считать за некоторые «предельные» процессы.

Верхний «предельный» процесс имеет место при малом изменении выходной координаты, когда система не выходит ни на одно из возможных ограничений. Процессы в фазовых координатах в этом случае описываются следующей системой уравнений:

$$Y_{n-i}(t) = \frac{a_n t^i}{i! \prod_{k=1}^i T_k} - 2 \frac{a_n (t-t_1)^i}{i! \prod_{k=1}^i T_k} + \dots \pm \frac{a_n (t-t_n)^i}{i! \prod_{k=1}^i T_k}. \quad (3)$$

Здесь t_n — длительность оптимального переходного процесса в системе n -го порядка; t_1, t_2, \dots, t_n — моменты переключения управляющего сигнала; $i=1, 2, \dots, n$.

В позиционных системах должны выполняться условия:

$$Y_{n-i}(t = t_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leq i < n; \\ a_0 & \text{при } i = n, \end{cases} \quad (4)$$

где a_0 — требуемое изменение выходной координаты. Делением на t_n и переходом к переменной

$$x_j = \frac{t_j}{t_n}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

система уравнений (3) с учетом (4) приводится к виду

$$1 + (-1)^j 2 \sum_{j=1}^{n-1} (1-x_j)^i = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leq i < n; \\ \frac{a_0 n! \prod_{k=1}^n T_k}{a_n t_n^n} & \text{при } i = n, \end{cases} \quad (5)$$

причем

$$0 < x_j < 1.$$

Подстановкой

$$x_j = \sin^2 j \frac{\pi}{2n} \quad (6)$$

систему уравнений (5) приводим к виду

$$\begin{cases} (-1)^j \sum_{j=1}^{n-1} \cos^{2i} j \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2} = 0; \\ (-1)^j \sum_{j=1}^{n-1} \cos^{2n} j \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2} = \frac{a_0 n! \prod_{k=1}^n T_k}{2 a_n t_n^n}. \end{cases} \quad (7)$$

На основании свойств ортогональных полиномов Чебышева 2-го рода [2] и свойств сочетаний можно доказать, что выражения (7) являются тождествами. В силу единственности оптимального управления в рассматриваемом случае [3] выражение (6) является решением системы (5). Из последнего тождества системы (7) следует

$$\frac{1}{2^{2n-1}} (n - 2^{2n-2}) = \frac{a_0 n! \prod_{k=1}^n T_k}{2 a_n t_n^n} - \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Отсюда длительность оптимального управления для верхних «предельных» процессов

$$t_n = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n} 2^{2n-2} (n-1)! \prod_{k=1}^n T_k}. \quad (9)$$

Моменты переключения управляющего сигнала с учетом (6) определяются выражением

$$t_j = \left(\sin^2 j \frac{\pi}{2n} \right) \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n} 2^{2n-2} (n-1)! \prod_{k=1}^n T_k}. \quad (10)$$

Нижний предельный процесс имеет место при достижении ограничения всех промежуточных координат. Оптимальное управление системой n -го порядка в этом случае состоит из последовательности двух процессов оптимального управления системами $(n-1)$ -го порядка и интервала между ними (2):

$$t_n = 2t_{n-1}(a_1) + \Delta t_1, \quad (11)$$

где $t_{n-1}(a_1)$ — длительность оптимального процесса в системе $(n-1)$ -го порядка с ограничением всех промежуточных координат и выходной величиной a_1 ; Δt_1 — время нахождения первой производной на уровне своего ограничения.

Все промежуточные координаты для нижнего предельного случая симметричны относительно своих экстремальных значений, поэтому справедливо выражение

$$a_0 = \frac{a_1 \Delta t_1}{T_1} + \frac{a_1 t_{n-1}(a_1)}{T_1}. \quad (12)$$

Из (11) с учетом (12) следует

$$t_n = \frac{a_0 T_1}{a_1} + t_{n-1}(a_1). \quad (13)$$

Аналогичные рассуждения справедливы относительно оптимальных процессов в системах $(n-1)$, $(n-2)$...-го порядка вследствие того, что все их промежуточные координаты также достигают ограничения:

$$t_{n-1}(a_1) = \frac{a_1 T_2}{a_2} + t_{n-2}(a_2).$$

Окончательное выражение длительности оптимальных процессов для нижнего «предельного» случая можно записать в следующем виде:

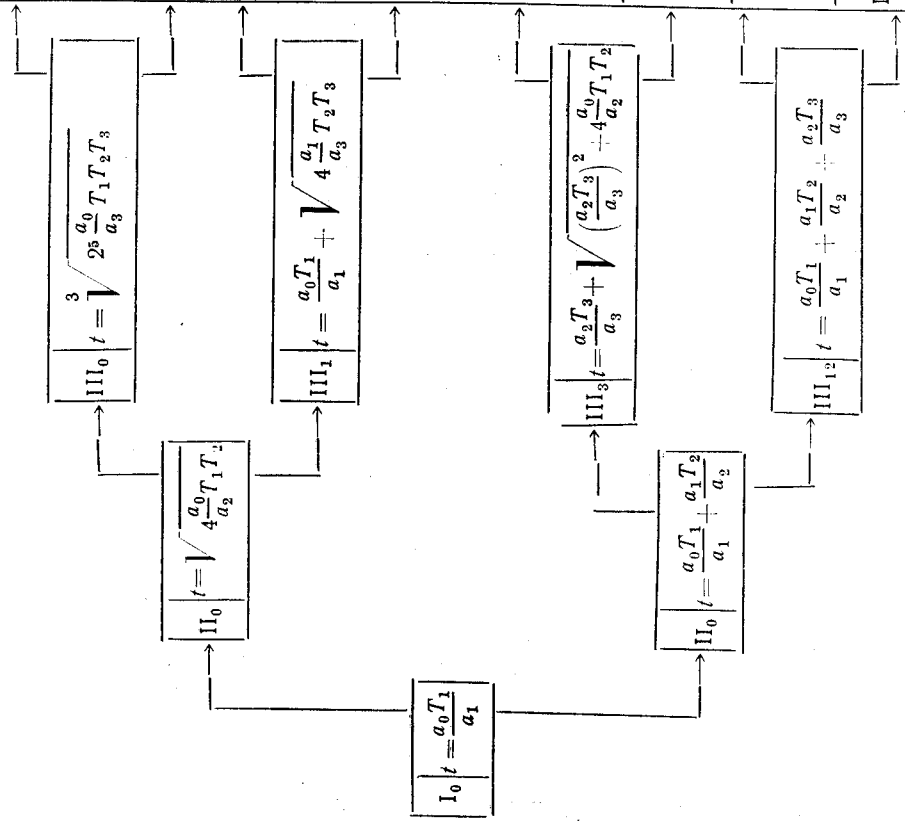
$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1} T_k}{a_k}. \quad (14)$$

Результаты расчета длительности оптимальных процессов, являющихся композициями «предельных» до 4-го порядка включительно, приведены в табл. 1.

Особенности достижения промежуточными координатами ограничения. Результатом процесса оптимального управления в позиционной системе является некоторое изменение выходной координаты. Если это изменение выходной координаты достаточно мало, то ни одна из фазо-

Таблица I

IV ₀	$t = \sqrt[4]{2^5 \cdot 6 \frac{a_0}{a_4} T_1 T_2 T_3 T_4}$
IV ₁	$t = \frac{a_0 T_1}{a_1} + \sqrt[3]{2^5 \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4}$
IV ₂	$t = \sqrt[4]{4 \frac{a_0}{a_2} T_1 T_2 + 4 \frac{a_2}{6} T_3 T_4} + \sqrt[4]{4 \frac{a_2}{a_4} T_3 T_4}$
IV ₁₂	$t = \frac{a_0 T_1}{a_1} + \frac{a_1 T_2}{a_2} + \sqrt[4]{4 \frac{a_2}{a_4} T_3 T_4}$
IV ₃	$t = \frac{a_2 T_4}{a_4} + \sqrt[3]{16 \frac{a_0}{a_3} T_1 T_2 T_3} + \sqrt{\left(16 \frac{a_0}{a_3} T_1 T_2 T_3\right)^2 - \left[\frac{4}{3} \left(\frac{a_2}{a_4} T_4\right)^{213}\right]} + \sqrt[3]{16 \frac{a_0}{a_3} T_1 T_2 T_3 - \sqrt{\left(16 \frac{a_0}{a_3} T_1 T_2 T_3\right)^2 - \left[\frac{4}{3} \left(\frac{a_2}{a_4} T_4\right)^{213}\right]}}$
IV ₁₃	$t = \frac{a_0 T_1}{a_1} + \frac{a_3 T_4}{a_4} + \sqrt{\left(\frac{a_3 T_4}{a_4}\right)^2 + 4 \frac{a_1}{a_3} T_2 T_3}$
IV ₂₃	$t = \frac{a_2 T_3}{a_3} + \frac{a_3 T_4}{a_4} + \sqrt{\left(\frac{a_2 T_3}{a_3}\right)^2 + 4 \frac{a_0}{a_2} T_1 T_2}$
IV ₁₂₃	$t = \frac{a_0 T_1}{a_1} + \frac{a_1 T_2}{a_2} + \frac{a_2 T_3}{a_3} + \frac{a_3 T_4}{a_4}$



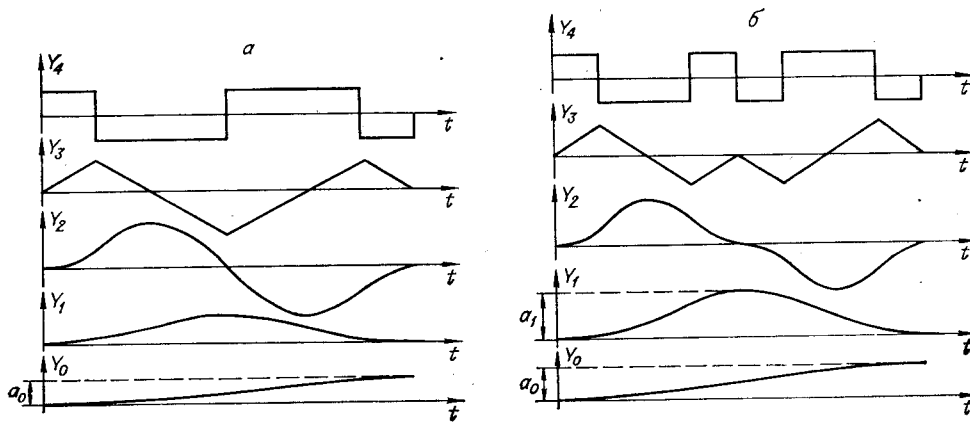


Рис. 3.

вых координат системы (кроме управляющего сигнала) ограничения не достигает. С ростом требуемого изменения выходной координаты (шага позиционирования) ограничения может достигнуть любая промежуточная координата. В случае достижения ограничения i -й координаты появляются один или несколько интервалов управления, на которых i -я координата поддерживается на уровне своего ограничения, а производные более высокого порядка на этом интервале обращаются в нуль.

При дальнейшем росте шага позиционирования увеличивается только длительность интервала, на котором i -я производная поддерживается на уровне ограничения. Длительность других интервалов управления, а следовательно, и экстремальных значений более старших производных продолжает поддерживаться на уровне, обеспечивающем оптимальное достижение i -й производной ограничения.

В случаях, когда ограниченная координата определена от входа тремя и более интеграторами, появляются дополнительные интервалы управления, вызванные необходимостью к моменту достижения i -й производной ограничения привести производные более высокого порядка в нулевое состояние. Качественное изменение формы оптимального управления в этих случаях приводит к тому, что зависимость

$$t_{\text{opt}} = f(a_0)$$

может иметь разряды 1-го рода. Здесь t_{opt} — длительность оптимального переходного процесса; a_0 — шаг позиционирования.

В качестве примера рассмотрим процесс оптимального управления системой 4-го порядка. При малой величине шага позиционирования (a_0) система не достигает ни одного из возможных ограничений и характер изменения фазовых координат соответствует рис. 3, а. С ростом величины a_0 возрастает длительность интервалов управления и амплитуда фазовых координат. При некоторой величине шага позиционирования (a_{01}) амплитудное значение координаты Y_1 достигает величины ограничения a_1 . Длительность оптимального процесса в этом случае составляет

$$t_1 = 2 \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2}) \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4}, \quad (15)$$

а предельная величина шага позиционирования определяется выражением

$$a_{01} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \frac{a_1}{T_1} \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2}) \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4}. \quad (16)$$

Дальнейший рост шага позиционирования до величины $a_0 > a_{01}$ по алгоритму управления, соответствующему рис. 3, а, невозможен, так как при этом величина координаты Y_1 превзойдет ограничение a_1 . Чтобы этого не произошло, форма оптимального управления, учитывающая ограничение координаты Y_1 , должна принять вид, приведенный на рис. 3, б. В этом случае длительность процесса управления составит величину

$$t_2 = 2 \sqrt[3]{2^5 \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4}. \quad (17)$$

Величина шага позиционирования, соответствующая t_2 , определяется

$$a_{02} = \frac{a_1}{T_1} \sqrt[3]{2^5 \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4}. \quad (18)$$

Анализ выражений (15), (16), (17), (18) показывает, что изменение формы оптимального управления, связанное с достижением координаты Y_1 ограничения a_1 , приводит к скачкообразному увеличению как времени переходного процесса, так и величины шага позиционирования:

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 2 \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4} \left(\sqrt[3]{2^5} - \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2})} \right),$$

$$\Delta a_0 = a_{02} - a_{01} = \frac{a_1}{T_1} \sqrt[3]{\frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4} \left(\sqrt[3]{2^5} - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2})} \right).$$

Чтобы получить прежнюю величину шага позиционирования при форме оптимального управления, соответствующей рис. 3, б, необходимо уменьшить длительность всех интервалов оптимального уравнения. Однако при этом координата Y_1 перестанет достигать своего ограничения a_1 , а длительность t_3 оптимального переходного процесса отработки шага позиционирования a_{01} возрастает до величины

$$t_3 = 2 \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2})} \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4 \sqrt[4]{\frac{2^5}{4!}},$$

которая больше t_1 на величину

$$\Delta t_2 = 2 \sqrt[3]{3! (2 + \sqrt{2})} \frac{a_1}{a_4} T_2 T_3 T_4 \left(\sqrt[4]{\frac{2^5}{4!}} - 1 \right).$$

Рассмотренный пример иллюстрирует механизм образования разрывов 1-го рода в зависимости $t_{\text{онт}} = f(a_0)$.

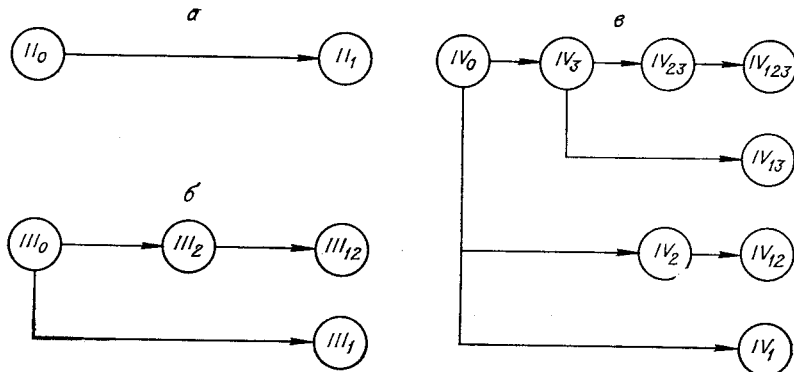


Рис. 4.

№ п.п.	Переход	Условия переходов
1	II ₀ → II ₁	$\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} > \frac{a_1}{a_2}$
2	III ₀ → III ₂	$\sqrt[3]{\frac{a_0}{2a_3}} > \frac{a_2}{a_3}$
3	III ₀ → III ₁	$\sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3}\right)^2} > \frac{a_1}{a_3}$
4	III ₂ → III ₁₂	$\sqrt{\frac{a_0}{a_2} + \left(\frac{a_2}{2a_3}\right)^2} + \frac{a_2}{2a_3} > \frac{a_1}{a_2}$
5	IV ₀ → IV ₃	$\left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^4 \sqrt{2^6 \cdot 6 \frac{a_0}{a_4}} > \frac{a_3}{a_4}$
6	IV ₀ → IV ₂	$\left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^4 \sqrt{2^6 \cdot 6 \frac{a_0}{a_4}} > \sqrt{\frac{a_2}{a_4}}$
7	IV ₀ → IV ₁	$\left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^4 \sqrt{\left(2^6 \cdot 6 \frac{a_0}{a_4}\right)^3} > 24 \frac{a_1}{a_4}$
8	IV ₃ → IV ₂₃	$\sqrt[3]{\frac{a_0}{4a_3} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{4a_3}\right)^2 - \left[\frac{1}{12} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2\right]^3}} +$ $+ \sqrt[3]{\frac{a_0}{4a_3} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{4a_3}\right)^2 - \left[\frac{1}{12} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2\right]^3}} - \frac{a_3}{2a_4} > \frac{a_2}{a_3}$
9	IV ₃ → IV ₁₃	$\sqrt[3]{\left(\frac{a_0}{4a_3} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{4a_3}\right)^2 - \left[\frac{1}{12} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2\right]^3}\right)^2} +$ $+ \sqrt[3]{\left(\frac{a_0}{4a_3} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{4a_3}\right)^2 - \left[\frac{1}{12} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2\right]^3}\right)^2} - \frac{5}{24} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2 > \frac{a_1}{a_3}$
10	IV ₂ → IV ₁₂	$\sqrt{\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_2}{6a_4}} - \sqrt{\frac{2a_2}{9a_4}} > \frac{a_1}{a_2}$
11	IV ₂₃ → IV ₁₂₃	$\sqrt{\frac{a_0}{a_2} + \left(\frac{a_2}{2a_3}\right)^2} - \frac{a_2}{2a_3} - \frac{a_3^3}{24a_2a_4^2} > \frac{a_1}{a_2}$

Определение условий перехода от одной формы оптимального управления к другой. Из табл. 1 видно, что выражения для длительности оптимальных процессов при разных комбинациях ограниченных координат различны, поэтому необходимо определить условия, при которых существуют те или иные формы оптимальных управлений.

Формы оптимального управления для системы соответствующего порядка определяются значением выходной координаты и соотношением между величинами ограничений промежуточных координат. Эти соотношения, а также указанные выше особенности достижения промежуточных координат ограничения обуславливают определенную после-

довательность появления различных форм оптимальных процессов при росте обрабатываемой величины выходной координаты (рис. 4).

Условия перехода от одной формы оптимального управления к другой, соответствующие рис. 4, приведены в табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
2. Л. С. Понтрягин и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
3. И. П. Натансон. Конструктивная теория функции. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

*Поступила в редакцию 19 марта 1973 г.,
окончательный вариант — 2 октября 1973 г.*

УДК 681.142.5

И. А. МАЛЕВИЧ, Ю. И. ПОСТОЯНОВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ
(Минск)

МЕТОД МНОГОКАНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ФЛЮКТУАЦИЙ ПЕРИОДОВ ФАЗИРУЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

При построении цифровых время-измерительных устройств нониусного типа, фазлируемых временных селекторов с квазижущим режимом работы, гребенчатых фильтров, использующих фазлируемые генераторы с запаздывающей обратной связью, и т. д. [1, 2] весьма важно знание вероятностных и спектральных характеристик флюктуаций их времязадающих функциональных элементов. Ниже рассмотрен метод исследования флюктуаций, в котором достигнута высокая точность анализа благодаря использованию время-амплитудного принципа преобразования выделенной флюктуационной вариации периодов исследуемых сигналов. Разработанный метод исследования флюктуаций объединяет достоинства метода усреднения по большому числу периодов [3] и принципа многоканального временного анализа [4]. Функциональная структурная схема и временная диаграмма, поясняющая метод измерения, показаны на рис. 1.

Измерение плотности вероятности флюктуаций. Измерение плотности вероятности флюктуаций периодов сигнала $Fx(t)$ производится путем регистрации большого числа единичных оценок флюктуаций при помощи сетки дискретных каналов многоканального временного анализатора (МВА), которые охватывают весь возможный диапазон флюктуаций. Начало цикла измерения (см. рис. 1, а) соответствует фазированию исследуемой импульсной системы (ИИС) с периодом колебаний T_x сигналом образцового генератора с периодом T_0 . Одновременно с запуском ИИС начинается отсчет эталонного интервала времени в блоке выбора времени усреднения τ_0 . Величина набега нестабильности периода ИИС τ_x фиксируется после окончания эталонного интервала усреднения $\tau_0 = nT_0$ между последним импульсом эталонной серии и началом следующего за ним периода T_x (или nT_x). Величина нестабильности периода исследуемого генератора T_x измеряется время-амплитудным преобразователем (преобразователь $t \rightarrow A$) с электрическим разрешающим временем $\sim 10^{-10}$ с (в диапазоне от 2,5 нс до 0,5 мкс), что