

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 681.3.001 : 518.5

А. Н. ОБОТНИН, Е. Э. СТРАШИННИН

(Свердловск)

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОЛЬЗЯЩЕГО СПЕКТРА

Рассматривается задача построения алгоритмов спектрального анализа дискретных сигналов на скользящих интервалах времени в реальном времени. Построение таких алгоритмов возможно на основе рекуррентных формул вычисления коэффициентов спектральных разложений,

которые рассматривались в ряде работ [1—3]. Однако непосредственное применение этих формул приводит к постепенной потере точности вычислений вследствие накопления ошибок округлений.

В данной работе предлагаются устойчивые алгоритмы вычисления спектральных характеристик сигналов на скользящих интервалах времени, требующие для своей реализации небольшого числа арифметических операций и малого объема памяти. Все алгоритмы синтезируются в виде структурных схем дискретных фильтров. Такой подход значительно упрощает синтез алгоритмов и вполне адекватен рассматриваемой задаче.

Скользящее разложение Фурье. Пусть имеется некоторая функция x дискретного аргумента γ (рис. 1). На оси времени $o\gamma$ выделим отрезок наблюдения $[n-N+1, n]$, состоящий из N точек. Выберем на отрезке наблюдения систему ортогональных экспоненциальных функций:

$$\exp\left(j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - n + N - 1)\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$\gamma \in [n - N + 1, n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

В этой системе функция x может быть разложена следующим образом:

$$x[\gamma] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} C_k[n] \exp\left(j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - n + N - 1)\right), \quad (2)$$

где

$$C_k[n] = \frac{2}{N} \sum_{\gamma=n-N+1}^n x[\gamma] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k (\gamma - n + N - 1)\right) =$$

$$= \frac{2}{N} \sum_{\gamma=0}^{N-1} x[\gamma + n - N + 1] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k \gamma\right). \quad (3)$$

Из последнего равенства (3) видно, что разложение (2) представляет собой обычное дискретное разложение Фурье сужения функции x в подвижной системе координат $x'o'\gamma'$ (см. рис. 1).

Совокупность коэффициентов $C_k[n]$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) будем называть скользящим спектром сигнала x .

Рекуррентные соотношения для $C_k[n]$. Процесс вычисления коэффициентов $C_k[n]$ можно рассматривать как фильтрацию сигнала x при помощи дискретных фильтров с весовыми функциями

$$W_k[\gamma] = \begin{cases} 0, & \gamma \notin [0, N-1]; \\ \frac{2}{N} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k(N-1-\gamma)\right), & \gamma \in [0, N-1]. \end{cases} \quad (4)$$

Это утверждение становится очевидным, если сопоставить выражение (3) с суммами свертки дискретных сигналов.

Используя Z -преобразование, найдем передаточные функции этих фильтров:

$$W_k(z) = \frac{2}{N} \frac{z^{-N} - 1}{z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5)$$

Осуществив обратное Z -преобразование от (5), получим рекуррентные соотношения для вычисления $C_k[n]$:

$$C_k[n] = \left(C_k[n-1] + \frac{2}{N} (x[n] - x[n-N])\right) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} k\right). \quad (6)$$

Алгоритм I. Алгоритм I представляет собой непосредственную реализацию совокупности передаточных функций (5) в виде структурной схемы, изображенной на рис. 2, а.

Если сигнал x является действительной функцией, то $C_k[n] = C_{N-k}^*[n]$. При этом структурная схема алгоритма I, изображенная на рис. 2, б, требует для реализации наименьшего числа операций.

Структурные схемы рис. 2 одновременно являются и алгоритмическими, если комплексную переменную Z^{-1} рассматривать как оператор запаздывания.

При реализации вычислений по схеме рис. 2 происходит постепенная потеря точности вычислений коэффициентов $C_k[n]$ с ростом n . Это вызвано накоплением ошибок округлений, которое происходит вследствие того, что функции $W_k(Z)$ имеют полюсы с единичным модулем.

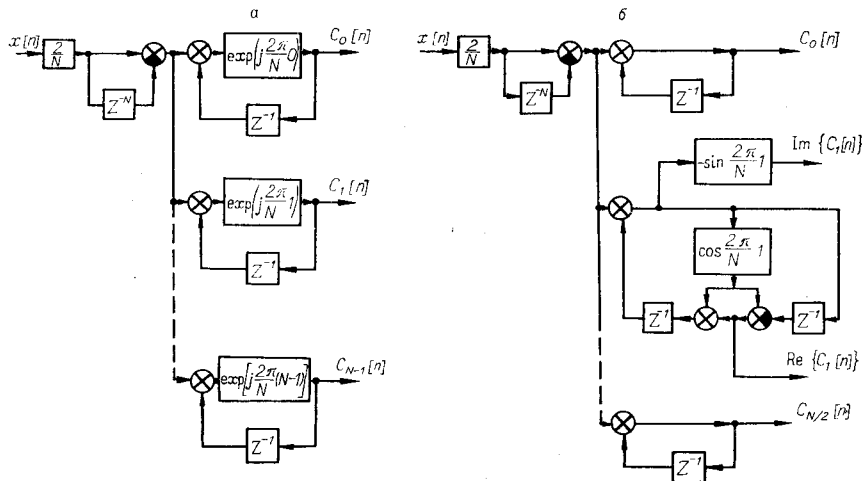


Рис. 2.

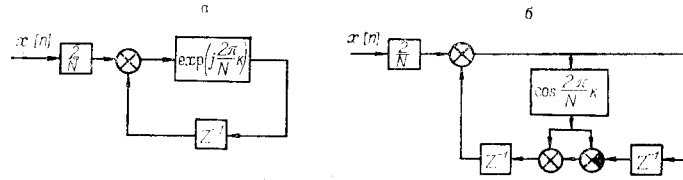


Рис. 3.

Можно предложить простую процедуру коррекции вычислений по алгоритму I, основанную на том, что фильтры (5) с весовыми функциями (4) обладают конечной памятью длины N . Для коррекции воспользуемся фильтрами со структурными схемами, представленными на рис. 3, а, б. Структурные схемы рис. 3, по существу, являются частями структур рис. 2.

Чтобы осуществить коррекцию вычислений произвольного коэффициента $C_k[n]$, на корректирующий фильтр, находящийся в нулевом состоянии, следует подавать сигнал x с некоторого произвольного момента m до момента $m+N-1$ включительно и после этого переслать числа из ячеек запоминания корректирующего фильтра в соответствующие ячейки запоминания k -го рабочего фильтра.

При помощи одного корректирующего фильтра можно осуществлять коррекцию всех N коэффициентов $C_k[n]$ через N^2 шагов по переменной n . Если использовать l фильтров, то коррекцию можно проводить в l раз чаще. Предложенная процедура эффективна при $n \gg N$.

Алгоритм II. Алгоритм II является устойчивым алгоритмом и строится для N , являющегося степенью числа 2.

Если $N=2^M$, где M — некоторое целое число, то имеет место разложение

$$Z^{-N} - 1 = (Z^{-1} - R^k) \prod_{l=1}^M (Z^{-N/2^l} + R^{kN/2^l}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где $R = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$.

С учетом (7) передаточные функции (5) примут вид:

$$W_k(Z) = \frac{2}{N} \prod_{l=1}^M (Z^{-N/2^l} + R^{kN/2^l}) = \frac{2}{N} \prod_{l=1}^M (Z^{-N/2^l} + R^{[k(\bmod 2^l)]N/2^l}),$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Алгоритм II представляет реализацию совокупности передаточных функций (8) с использованием минимального числа арифметических операций и объема памяти.

Из (8) видно, что все передаточные функции с индексами k , для которых числа $k(\bmod 2^l)$ одинаковы, имеют общие множители: $Z^{-N/2^l} + R^{[k(\bmod 2^l)]N/2^l}$.

Выделение номеров k , для которых $W_k(Z)$ имеют общие множители, удобно проводить с использованием двоичной системы счисления. Поскольку $k=0, 1, \dots, N-1$, то для записи любого k потребуется $M = \log_2 N$ двоичных разрядов, т. е.

$$(k)_{10} = (\epsilon_{M-1}\epsilon_{M-2} \dots \epsilon_0)_2. \quad (9)$$

Все номера k , у которых двоичные числа ϵ_0 совпадают, имеют одинаковые значения $k(\bmod 2)$; все номера k , у которых совпадают оба двоичных числа $\epsilon_1\epsilon_0$, имеют одинаковые значения $k(\bmod 4)$ и т. д. Таким

образом, все номера k с одинаковыми значениями $k \pmod{2^l}$ имеют в двоичной записи одинаковые l младших разрядов.

По записи номера k в виде (9) легко написать и выражение соответствующей передаточной функции $W_k(Z)$. Очевидно, что

$$W_k(Z) = \frac{2}{N} (Z^{-N/2} + R^{(N/2)(\epsilon_0)_2}) \dots (Z^{-N/N} + R^{(N/N)(\epsilon_{M-1} \dots \epsilon_0)_2}).$$

Процесс определения индексов передаточных функций, имеющих общие множители, удобно представить в виде прямоугольной таблицы, состоящей из N строк и M столбцов. Для $N=8$ представлена табл. 1. Строкой таблицы с номером p является последовательность двоичных чисел $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{M-1}$ из двоичного представления номера строки

$$(p)_{10} = (\epsilon_{M-1} \dots \epsilon_1 \epsilon_0)_2. \quad (10)$$

Возьмем теперь произвольную строку из таблицы с номером p и поставим ей в соответствие номер m такой, что $(m)_{10} = (\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{M-1})_2$, и передаточную функцию

$$W_m(Z) = \frac{2}{N} (Z^{-N/2} + R^{(N/2)(\epsilon_0)_2}) \dots (Z^{-N/N} + R^{(N/N)(\epsilon_0 \epsilon_1 \dots \epsilon_{M-1})_2}).$$

На основании проведенных выше рассуждений можно утверждать, что все $W_m(Z)$ с номерами m , имеющими одинаковые числа в нулевом столбце, имеют общий множитель $Z^{-N/2} + R^{(N/2)(\epsilon_0)_2}$. Все передаточные функции с номерами m , имеющими одинаковые элементы в первых двух столбцах, имеют общий множитель $Z^{-N/4} + R^{(\epsilon_0 \epsilon_1)_2 (N/4)}$ и т. д.

Для удобства изображения представим алгоритм II в виде графа прохождения сигналов. Поскольку для построения графа алгоритма II достаточно повторить рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при построении табл. 1, то ограничимся лишь изложением общих правил построения графа для произвольного $N=2^M$ и конкретным примером при $N=8$, представленным на рис. 4.

Правила построения графа алгоритма II.

1). Графом алгоритма II является дерево, состоящее из $\log_2 N$ ярусов и $1 + \log_2 N$ рангов. Каждый ранг состоит из 2^l вершин, где l — номер ранга.

2). Из каждой вершины l -го ранга выходят две дуги, оканчивающиеся в вершинах $(l+1)$ ранга, причем в одной вершине может оканчиваться лишь одна дуга.

3). Для получения отметок вершин l -го ранга требуется занумеровать эти вершины по по-

Таблица 1

p	l			
	0	1	2	m
0	0	0	0	0
1	1	0	0	4
2	0	1	0	2
3	1	1	0	6
4	0	0	1	1
5	1	0	1	5
6	0	1	1	3
7	1	1	1	7

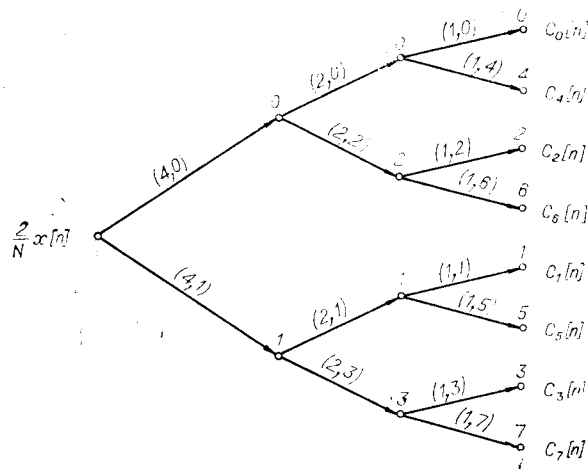


Рис. 4.

ряду, начиная с нуля, в двоичной системе счисления с использованием l разрядов, а затем провести инверсию (изменение порядка следования разрядов на обратный). Получившиеся двоичные числа определяют номер отмечаемой вершины.

4). Дуги графа l -го яруса отмечаются двумя индексами (p, q) , где $p = N/2^l$, номер q равен отметке вершины $l+1$ ранга, в которой оканчивается отмечаемая дуга. Каждой отметке дуги графа соответствует элементарная передаточная функция $W_{p,q}(Z) = Z^{-p} + R^{pq}$.

5). Отметки вершин наивысшего ранга совпадают с номерами получаемых коэффициентов.

Алгоритм III. Алгоритм III является устойчивым алгоритмом, построенным в виде замкнутой схемы. Синтез алгоритма основан на представлении передаточных функций $W_k(Z)$ в следующем виде:

$$W_k(Z) = \frac{-W'_k(Z)}{1 - \frac{1}{2} Z^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} W'_k(Z)}, \quad (11)$$

где

$$W'_k(Z) = \frac{2}{N} \frac{1}{Z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Для того чтобы показать равенство функций (11) и (5), достаточно подставить (12) в (11) и провести соответствующие преобразования. Структурные схемы алгоритма III для комплексного и действительного сигналов представлены на рис. 5, а, б.

Обсуждение алгоритмов I—III. Вычисление k -го коэффициента по алгоритму I проводится независимо от вычисления остальных коэффициентов, но при этом происходит постепенная потеря точности вычислений. Поэтому алгоритм I следует применять при ограниченном времени решения задачи или использовать предложенную выше процедуру коррекции.

Алгоритм II является устойчивым и имеет наивысшую точность по сравнению с остальными рассмотренными алгоритмами. Вычисление коэффициентов проводится по ветвящейся процедуре.

Алгоритм III следует применять в случае, когда требуется вычислять полностью скользящий спектр сигнала x . На точность вычисления

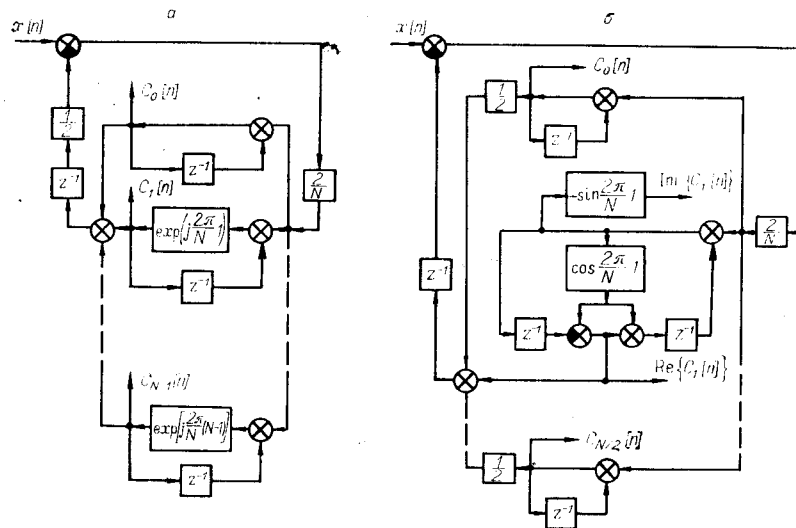


Рис. 5.

Т а б л и ц а 2

Число операций	Алгоритм I	Алгоритм II	Алгоритм III	БПФ
Комплексного умножения	$N+1$	$2N-1$	$N+2$	$N\log_2 N$
Комплексного сложения	$N+1$	$2N-2$	$2N+1$	$N\log_2 N$
Число ячеек памяти комплексных чисел	$2N$	$\frac{N}{2}\log_2 Ng$	$N+1$	$2N$

k -го коэффициента влияют точности вычислений остальных коэффициентов. Алгоритм III устойчив.

Сопоставление алгоритмов по числу используемых арифметических операций и по затратам памяти проводится в табл. 2. Там же алгоритмы I—III сравниваются с методом быстрого преобразования Фурье (БПФ) при использовании его для вычисления скользящих спектров.

Оставляя данные из табл. 2 и рассматривая краткие характеристики алгоритмов, можно отметить, что улучшение какого-то одного показателя алгоритма (точность, память, число арифметических операций) неизбежно влечет ухудшение других. Поэтому выбор того или иного алгоритма должен определяться условиями конкретной задачи.

Предлагаемые в работе алгоритмы предназначены для использования в цифровых системах оперативной обработки информации и автоматического управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод формулы (7). Формула (7) получается путем последовательного применения формулы разности квадратов двух чисел к исходному выражению. При этом число 1 записывается в экспоненциальной форме. Первый этап вывода формулы (7) основывается на приведении исходного соотношения к виду

$$Z^{-N}-1=Z^{-N}-\exp(-j2\pi k)=Z^{-N}-R^{hN}. \quad (13)$$

К правой части равенства (13) применим формулу разности квадратов двух чисел и получим

$$Z^{-N}-1=(Z^{-N/2}-R^{hN/2})(Z^{-N/2}+R^{hN/2}). \quad (14)$$

Затем к левому сомножителю в (14) снова применяем формулу разности квадратов и т. д. Поскольку $N=2^M$, то указанную выше процедуру можно применить M раз. В итоге получается разложение (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вывод формулы (11). Для того чтобы показать тождественность выражений (11) и (5), достаточно доказать равенство

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}W'_k(Z)}=1-Z^{-N}, \quad (15)$$

где $W'_k(Z)$ имеет вид, представленный в выражении (12).

Вычислим сначала сумму

$$\sum_{k=0}^{N-1} W'_k(Z) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{Z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}. \quad (16)$$

Для этого в (16) проведём ряд тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{Z^{-1} - \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} &= \frac{2}{N} \frac{1 - Z^N}{1 - Z^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{Z}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} = \\ &= \frac{2}{N} \frac{Z}{1 - Z^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1 - Z^N}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Каждый член полученной суммы можно представить через сумму членов геометрической прогрессии, т. е.

$$\frac{1 - Z^N}{1 - Z \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} k\right)} = \sum_{l=0}^{N-1} Z^l \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} l k\right). \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (17) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} W'_k(Z) = \frac{2}{N} \frac{Z}{1 - Z^N} \sum_{l=0}^{N-1} Z^l \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} l k\right) = \frac{2Z}{1 - Z^N}. \quad (19)$$

Используя (19), легко проверить равенство (15), откуда следует тождественность (11) и (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Хемминг. Численные методы для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
2. Халберштейн. Применение рекурсивного комплексного анализа Фурье для реального времени.— ТИИЭР, 1966, т. 54, № 6.
3. Bruce James D. Discrete Fourier Transforms, Linear Filters and Spectrum Weighting.— IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1968, v. AU-16, № 4.

Поступила в редакцию 12 декабря 1972 г.;
окончательный вариант — 15 апреля 1974 г.

УДК 517.948.33

А. С. ГОЛЬЦОВ, Д. Ф. СИМБИРСКИЙ
(Харьков)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ТЕПЛОВОГО ОБЪЕКТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Одной из наиболее сложных проблем экспериментальной теплофизики является измерение температурного поля и входных воздействий (граничных условий) высокотемпературных теплозащитных покрытий. Обычно теплозащитное покрытие представляет собой бесконечную пла-