

3. Усовершенствованный спектрометр. Патент Англии, 1961, № 868554, класс 40(3) А 5 (D1 : M2 : P1B : P2B).
4. В. М. Осипов, Ю. В. Попов. Спектроскопический анализатор масла в парафине УАП-64.— Химия и технология топлива и масла, 1966, № 3.
5. А. А. Тудоровский, Ю. В. Попов, В. М. Осипов. Фазометрический метод в двухлучевом ультрафиолетовом анализаторе для нефтепереработки.— «ИВУЗ. Сер. приборостроение, 1966, т. 9, № 2.
6. Ю. В. Попов. Некоторые вопросы применения фазометрического метода в фотометрических приборах.— Приборы и системы управления, 1968, № 9.
7. И. Т. Лосицкий, А. Г. Меламед, В. А. Рылов. Способ анализа газов и жидкостей, 1969. Авторское свидетельство № 243952, класс 42е, 4/13.
8. И. В. Корблев. Об оптимизации параметров фазового абсорбциометра.— Журнал прикладной спектроскопии, 1972, т. 16, № 6.
9. Ю. В. Попов. К теории фазометрического метода в фотометрических приборах.— Автометрия, 1965, № 6.
10. Ю. М. Колпаков, Ю. Я. Медведев. О минимуме порога чувствительности оптических газоанализаторов с фазометрической схемой.— Автометрия, 1971, № 5.

Поступила в редакцию 16 августа 1973 г.

УДК 681.325.36

Г. В. ЕВЗЛИНА ; Г. С. ТЕР-ИСРАЕЛОВ, А. А. ТЕР-ХАЧАТУРОВ

(Сумгаит)

ДАТЧИК ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАВНОВЕРОЯТНЫХ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

При аналого-цифровом моделировании различных процессов, проектировании приборов для статистического анализа, исследовании психофизиологических реакций человека возникает необходимость в простых и надежных датчиках периодической последовательности равновероятных величин (в аналоговой или цифровой форме) с непрерывным контролем их статистических характеристик.

В настоящей статье приводится описание принципа действия такого датчика, построенного с использованием простейшего потока импульсов [1], и производится аналитическое исследование статистической зависимости получаемых случайных величин.

В [2, 3] описан способ получения равновероятных временных интервалов путем наложения регулярного потока импульсов на пуассоновский. Равновероятными являются интервалы $\dots, \tau_m, \dots, \tau_{m+N}, \dots$ между импульсами двух потоков (рис. 1).

В датчике, разработанном авторами настоящей статьи, исключен основной недостаток этого способа — аperiodичность выдачи равновероятных временных интервалов.

Датчик (рис. 2) содержит: генератор тактовой частоты 1, работающий в старт-стопном режиме, генератор моментов опроса 2, генера-

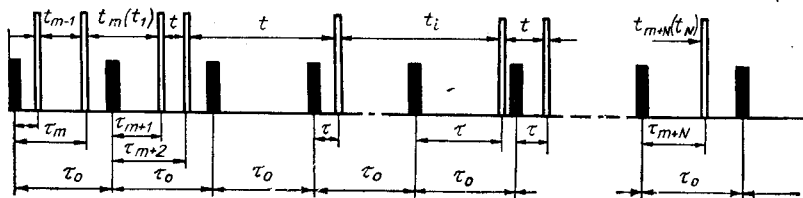


Рис. 1.

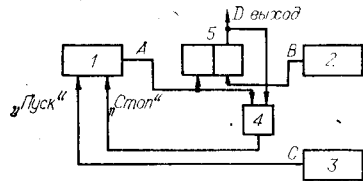


Рис. 2.

тор пуассоновского потока 3, ячейку совпадения И 4 и триггер выделения интервалов 5. Временная диаграмма работы датчика показана на рис. 3, А, В, С, D.

Импульс от генератора 2 перебрасывает триггер 5, формируя передний фронт случайного временного интервала. Первый же импульс от генератора 1, следующий за импульсом от генератора 2,

возвращает триггер 5 в исходное состояние, формируя задний фронт. Одновременно, пройдя через ячейку 4, он поступает на вход «Стоп» генератора 1, прекращая его работу. Генератор 1 начинает вновь работу после поступления на его другой вход «Пуск» импульса от генератора пуассоновского потока 3. Таким образом, каждый раз после остановки тактовая последовательность импульсов от генератора 1 сдвигается на случайный промежуток времени, распределенный по экспоненциальному закону. Статистическая связь между получаемыми временными интервалами зависит от произведения параметра пуассоновского потока λ на период тактовой последовательности τ_0 , т. е. от $\lambda\tau_0$.

Найдем аналитическое выражение статистической зависимости в виде коэффициента корреляции при условии кратности периодов такта τ_0 и опроса $T: T/\tau_0 = h^*$.

Для определения коэффициента корреляции необходимо знать условную функцию распределения получаемых временных интервалов. Вывод условной функции распределения $\tau_{(m+N)}$ -го случайного временного интервала (см. рис. 3, D) при условии, что τ_m -й интервал принял значение, равное τ_x , производим методом индукции.

Как видно из рис. 3, А, D, временной интервал τ_{m+N} представляет собой разность между суммой N случайных отрезков времени t_i и τ_x и ее целой частью при делителе, равном периоду тактовой частоты:

$$\tau_{m+N} = \left(\sum_{i=m}^{m+N} t_i + \tau_x \right) - \left\lfloor \frac{\sum_{i=m}^{m+N} t_i + \tau_x}{\tau_0} \right\rfloor \tau_0.$$

Таким образом, мы приходим к схеме получения случайных временных интервалов, изображенной на рис. 1.

Из рис. 1 становится ясной причина корреляции между получаемыми временными интервалами: чем больше выпадет случайных импульсов в одном промежутке между регулярными (а их количество зависит от $\lambda\tau_0$), тем сильнее корреляция, так как выборка случайных величин (временные интервалы $\tau_{m+1}, \tau_{m+2} \dots$) производится в порядке их возрастания.

Искомую условную функцию распределения τ_{m+1} второго временного интервала (следующего после τ_x) можно найти как сумму вероятностей поступления события М в К несовместных случаях.

Событие М для данного случая заключается в том, что второй временной интервал меньше τ (где τ — текущее значение) при условии, что предыдущий равен τ_x .

Первый случай. Второй временной интервал образован случайным импульсом, находящимся в первом периоде, т. е. в том же, где и временной интервал τ_x . Этому случаю соответствует вероятность

$$P_2^0(M) = P_2^0[\tau < \tau/\tau_x];$$

$$P_2^0[\tau < \tau/\tau_x] = P(t_1 + \tau_x < \tau) = 1 - e^{-\lambda(\tau - \tau_x)^+}.$$

* Особенности выбора величины h указаны далее.

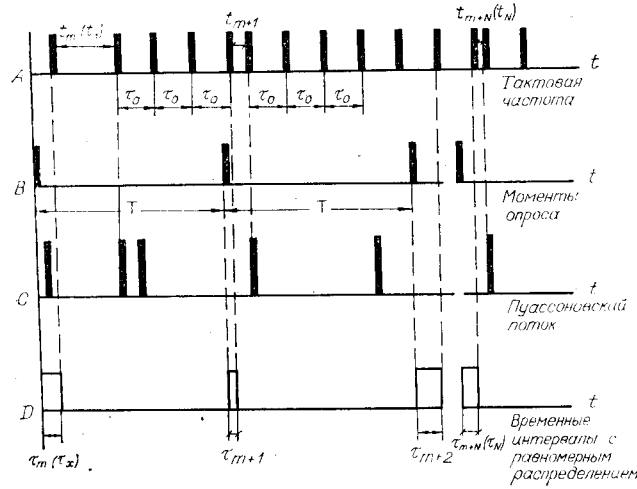


Рис. 3.

Второй случай. Второй временной интервал образован случайным импульсом, находящимся во втором периоде τ_0 . В этом случае вероятность события M равна вероятности того, что расстояние между выпавшим импульсом и задним фронтом τ_x будет не меньше, чем $(\tau_0 - \tau_x)$, и не больше, чем $(\tau_0 - \tau_x + \tau)$:

$$P_2^1[\tau < \tau/\tau_x] = P[t_1 + \tau_x - \tau_0 < \tau] - P[t_1 + \tau_x < \tau];$$

$$P_2^1[\tau < \tau/\tau_x] = e^{-\lambda(\tau_0 - \tau_x)}(1 - e^{-\lambda\tau}).$$

Рассуждая аналогично, для (K -го) случая имеем

$$P_2^K[\tau < \tau/\tau_x] = e^{-\lambda(k\tau_0 - \tau_x)}(1 - e^{-\lambda\tau}).$$

Согласно теореме о сумме вероятностей несовместных событий [4],

$$F_2(\tau/\tau_x) = \sum_{r=0}^K P_2^K[\tau < \tau/\tau_x];$$

$$F_2(\tau/\tau_x) = 1 - e^{-\lambda(\tau - \tau_x)^+} + \lambda\tau_x(1 - e^{-\lambda\tau})A_{12},$$

где

$$A_{12} = \sum_{r=1}^K e^{-\lambda\tau_0 r}.$$

Определим условную функцию распределения третьего случайного временного интервала $F_3(\tau/\tau_x)$. При этом, так же рассматривая сумму вероятностей наступления события M в $2K$ несовместных случаях, следует учесть, что величина суммы двух случайных сдвигов (см. рис. 1) может изменяться от 0 до $2K\tau_0$, а само событие M заключается в том, что временной интервал меньше τ при условии, что первый τ_m интервал равен τ_x :

$$F_3(\tau/\tau_x) = 1 - e^{-\lambda(\tau - \tau_x)^+} [1 + \lambda(\tau - \tau_x)] + [1 - e^{-\lambda\tau}(1 + \lambda\tau)] e^{\lambda\tau_x} A_{13} + [1 - e^{-\lambda\tau}] e^{\lambda\tau_x} \lambda(\tau_0 A_{23} - \tau_x A_{13}),$$

где

$$A_{13} = \sum_{r=1}^2 e^{-\lambda\tau_0 r}; \quad A_{23} = \sum_{r=1}^{2K} e^{-\lambda\tau_0 r}.$$

Аналогично можно вывести $F_4(\tau/\tau_x)$, $F_5(\tau/\tau_x)$ и т. д.

Условная функция распределения для N -го случайного временного интервала, полученная по индукции, будет

$$F_N(\tau/\tau_x) = 1 - e^{-\lambda(\tau-\tau_x)^+} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{[\lambda(\tau-\tau_x)^+]^i}{i!} + e^{\lambda\tau_x} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(\lambda\tau_0)^{n-1}}{(n-1)!} \left[1 - e^{-\lambda\tau} \sum_{i=0}^{N-1-n} \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} \right] \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{j}{n-1} \left(\frac{\tau_x}{\tau_0}\right)^j A_{n-j,N}, \quad (1)$$

где $\binom{j}{n-1}$ — число сочетаний из $(n-1)$ по j ; $A_{n-j,N} = \sum_{r=1}^{(N-1)K} e^{-\lambda\tau_0 r} r^{n-j-1}$.

Так как теоретически событие M может произойти в бесконечном количестве случаев, то $K \rightarrow \infty$, и

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = \dots = A_{1N} = A_1;$$

$$A_{23} = A_{24} = A_{25} = \dots = A_{2N} = A_2;$$

$$\dots$$

$$A_{n-j,N} = A_{n-j}.$$

Таким образом, зная выражение условной функции распределения любого временного интервала, можно найти коэффициенты корреляции между первым и вторым, первым и третьим, первым и N -м временными интервалами. Для этого необходимо располагать соответствующим данному случаю математическим ожиданием и дисперсией случайных временных интервалов.

Ввиду того что они равновероятны,

$$\mu_x = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_N = \frac{1}{2} \tau_0;$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_N^2 = \frac{1}{12} (\tau_0)^2,$$

где $\mu_x, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N$ — математическое ожидание первого, второго, третьего, ..., N -го случайных временных интервалов; $\sigma_x^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_N^2$ — соответственно их дисперсия.

Учитывая, что

$$\mu_{1N} = \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} f(\tau_x) f_N(\tau/\tau_x) \tau \tau_x d\tau d\tau_x, \quad (2)$$

где $f(\tau_x)$ — плотность распределения первого временного интервала; $f(\tau/\tau_x)$ — плотность распределения « N -го» временного интервала при условии, что первый равен τ_x , и, подставив (1) в (2), получаем окончательное выражение для смешанного начального момента первого порядка между первым и N -м временными интервалами:

$$\begin{aligned} \mu_{1N} = & \frac{\tau_0^2}{3} + \frac{\tau_0(N-1)}{2\lambda} - \frac{\lambda^{N-1}}{\tau_0(N-2)!} \sum_{l=0}^{N-2} (-1)^l \binom{l}{N-2} D_{l+1} \frac{(N-l-1)!}{\lambda^{N-l}} + \\ & + \frac{\lambda^{N-1}}{\tau_0(N-2)!} \sum_{l=0}^{N-2} (-1)^l \binom{l}{N-2} B_{N-l} D_{l+1} + \\ & + \lambda^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\tau_0^{n-2} A_n}{(N-n-1)!(n-1)!} \sum_{l=0}^{N-n-1} (-1)^l \binom{l}{N-n-1} B_{N-l-n} D_{l+1}, \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь

$$B_N = \int_0^{\tau_0} \tau^N e^{-\lambda\tau} d\tau,$$

$$D_N = \int_0^{\tau_0} \tau^N e^{2\lambda\tau} d\tau \dots \quad [5].$$

Используя выведенное соотношение (3), легко определить коэффициенты корреляции:

$$\rho_{1N} = \frac{\mu_{1N} - \mu_x \mu_N}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_N^2}} = \frac{12}{\tau_0^2} (\mu_{1N} - 0,25\tau_0^2).$$

При выводе было принято $K \rightarrow \infty$, что эквивалентно моментам опроса через бесконечно большие промежутки времени. Однако исходя из физических параметров датчика, например для $\lambda\tau=1$, $h=K=10$ оказывается достаточным, так как вероятность того, что случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону, будет больше, чем $(K-1)\tau_0$, равна

$$P[t > 9\tau_0] = 10^{-4}.$$

Случаи при $t > (K-1)\tau_0$ обуславливают методическую погрешность при определении математического ожидания случайного процесса методом Монте-Карло, использовании получаемых временных интервалов при моделировании и т. п., так как тогда случайный временной интервал равен τ_0 (на рис. 2 принудительный возврат триггера в исходное состояние после интервала времени, равного τ_0 , не показан).

Коэффициенты корреляции, полученные в результате эксперимента, моделирования на ЭЦВМ и по выведенным формулам для случаев $T/\tau_0=10$ и $\lambda\tau_0=1; 10$, сведены в таблицу. Количество выборок при эксперименте и при моделировании было соответственно 10^4 и 1500 .

ρ_{1N}	$\lambda\tau_0=1$			$\lambda\tau_0=10$		
	Расчет	Эксперим.	Моделир.	Расчет	Эксперим.	Моделир.
ρ_{12}	+0,016	-0,034	-0,002	+0,520	+0,516	+0,509
ρ_{13}	-0,015	-0,043	-0,016	+0,159	+0,170	+0,185
ρ_{14}	+0,001	-0,003	-0,028	-0,084	-0,119	-0,044
ρ_{15}	0	-0,024	-0,026	-0,216	-0,231	-0,197
ρ_{16}	0	+0,009	-0,002	-0,251	-0,288	-0,236
ρ_{17}	0	-0,019	-0,004	-0,211	-0,215	-0,210
ρ_{18}	0	+0,024	-0,001	-0,129	-0,121	-0,142
ρ_{19}	0	-0,01	+0,008	-0,034	-0,027	-0,058

Более существенное отклонение экспериментальных данных объясняется нестабильностью λ во время измерения, аппаратными погрешностями и примененным алгоритмом вычисления коэффициентов корреляции через смешанные начальные моменты.

Как видно, принятые допущения при эксперименте и моделировании (конечность K и упрощения схемы генерирования, сведение ее к случаю, соответствующему рис. 1) не повлияли на результаты, которые хорошо согласуются.

Генератор тактовой частоты, задающий пределы изменения временного интервала и работающий в старт-стопном режиме, собран по мостовой схеме (рис. 4).

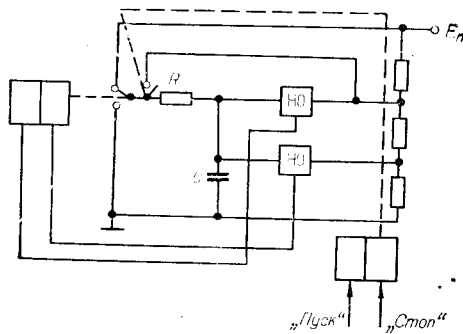


Рис. 4.

Для RC -цепочки применены сопротивления $R=5,0$ кОм типа С2-13 и конденсатор $C=0,02$ мкФ типа К70-7 м.

В качестве нуль-органов (НО) взято сравнивающее устройство, описанное в [6]. Характеристики генератора, полученные в результате экспериментального исследования, следующие: период генерируемых колебаний 400 мкс; временной дрейф периода 0,02% в течение 8 ч; температурная стабильность периода $+0,01\%$ на 10°C . При изменении

напряжения питания на $\pm 15\%$ период изменялся на $\pm 0,1\%$. «Выбег» из-за старт-стопного режима генератора отсутствует.

Остановка генератора производится путем ограничения напряжения на конденсаторе RC -цепи на уровне срабатывания одного из НО.

ВЫВОДЫ

В результате приведенных выше исследований установлено.

1. Разработанный датчик периодической последовательности равновероятных временных интервалов обладает стабильными статистическими характеристиками, контроль наиболее важной из которых — корреляционной зависимости генерируемых величин — сводится к контролю λ используемого пуассоновского потока, а равномерность обеспечивается самим механизмом их получения.

2. Выведенные зависимости можно использовать для определения соответствия данного потока пуассоновскому, а примененную методику вывода — для случая непуассоновского потока импульсов.

3. Стабилизация λ позволяет применять датчик для проверки статистических анализаторов.

4. При $\lambda\tau_0=1$ имеет место почти некоррелированная последовательность временных интервалов ($\rho_{12 \text{ теор}} < 0,02$).

5. Путем снижения корреляции является уменьшение величины $\lambda\tau_0$ или запуск тактового генератора случайным по счету импульсом.

6. Комбинированием T/τ_0 и $\lambda\tau_0$ можно задать любую скорость получения и степень последствия генерируемых величин.

7. Разработанный датчик обладает простотой схемного решения и легко может быть выполнен в чисто дискретном варианте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Розанов. Случайные процессы. М., «Наука», 1971.
2. Г. В. Евзлина, Т. М. Алиев, Ю. В. Щербинин, А. А. Тер-Хачатуров. К вопросу использования метода статистических испытаний в задачах автотририи.— В кн.: Автоматический контроль и методы электрических измерений. М., «Наука», 1971.
3. Г. В. Евзлина, Т. М. Алиев, А. А. Тер-Хачатуров, Ю. В. Щербинин. Исследование погрешностей статистического интегрирования при корреляционной связи генерируемых случайных величин.— Автотририя, 1968, № 6.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
6. В. И. Нефтяков. Диодно-регенеративный компаратор.— Приборостроение, 1968, № 2.

Поступила в редакцию 14 мая 1973 г.;
окончательный вариант — 23 ноября 1973 г.