

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 62-501

Г. ГАТЕВ, Н. МАДЖАРОВ, С. МАРКОВ

(София)

### ОБРАБОТКА ДАННЫХ И ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ \*

В последние годы растет интерес к проблемам оценок и идентификации. Разрабатываемая первоначально для целей управления техническими объектами современная теория оценок постоянно охватывает такие актуальные области, как изучение динамического поведения промышленных объектов, исследование биологических функций и поведения человека, моделирование экономических и социальных процессов, научный эксперимент и др.

Анализ объектов и синтез управления ими требует решения двух основных задач.

1. Составление математической модели процесса (объекта) и окружающей среды.

2. Получение достаточно точной информации о состоянии объекта.

Составление математической модели объекта, или идентификация, в большинстве практических случаев сводится к оцениванию параметров, т. е. к определению численных значений коэффициентов модели заданной структуры. Оценки параметров получаются из зашумленных измерений при помощи фильтров, реализуемых в виде технических устройств или программ ЦВМ.

Получение достаточно точной информации о состоянии процесса предполагает извлечение полезной информации из зашумленных сигналов, поступающих от измерительных приборов. Эта задача решается также при помощи фильтров.

Ниже будет показано, что проблему оценки параметров можно свести к проблеме оценивания состояния.

Современный синтез фильтров основывается на классическом методе Колмогорова — Винера и на методе последовательного линейного оценивания Калмана.

Охватить в обзорном докладе все проблемы, возникающие при оценивании и идентификации, все используемые решения невозможно. Авторами сделана попытка изложить главные идеи и особенности основных подходов и методов, применяющихся при изучении и при построении автоматических систем, а также современные пути решения, связанные с последовательным оцениванием, являющимся сутью адаптивного подхода.

В списке литературы к докладу перечисляются монографии, представляющие общий интерес [1—10, 12—14], и обзоры с обширной библиографией по проблемам оценивания и идентификации [15—19].

\* Доложено на конференции по автоматизации эксперимента. Враца, 1973.

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ

Основные результаты теории управления получены на основе использования аппарата дифференциальных и разностных уравнений для описания динамических свойств систем. Разностные уравнения (уравнения в конечных разностях) можно получить из соответствующих дифференциальных уравнений заменой в точках  $t=0, 1, 2, \dots$  производных

$$\left. \frac{d^i y(\bar{t})}{d\bar{t}^i} \right|_{\bar{t}=k} \rightarrow \Delta^i y(k), \quad (1)$$

где  $\bar{t}=t/T$ ,  $T$  — интервал квантования по времени;  $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$ ;

$$\Delta^i y(k) = \sum_{r=0}^i (-1)^r \binom{i}{r} y(k+i-r).$$

Разностными уравнениями описываются дискретные системы, а также непрерывные системы, в которых для целей управления используются ЦВМ.

**Модели линейных систем.** Модели линейных систем можно подразделить на параметрические и непараметрические, а также на стационарные и нестационарные. Ниже приводятся общие формулы для описания этих моделей.

Параметрические стационарные:

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_{m-j} u^{(j)}(t). \quad (2)$$

Параметрические нестационарные:

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i}(t) y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_{m-j}(t) u^{(j)}(t). \quad (3)$$

Непараметрические стационарные:

$$y(t) = \int_0^{\infty} W(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (4)$$

Непараметрические нестационарные:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t W(t, \tau) u(\tau) dt. \quad (5)$$

Здесь приняты обозначения  $u(t)$  и  $y(t)$  соответственно для входа и выхода системы.

**Модели нелинейных систем.**

Параметрические:

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t), u(t), C), \quad (6)$$

где  $C$  — вектор параметров.

Непараметрические:

$$y(t) = W_0 + \int_0^{\infty} W_1(\tau) u(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W_2(\tau_1, \tau_2) \times \\ \times u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (7)$$

В современной теории и практике управления понятие «состояния» играет важную роль. Состояние системы определяется вектором состояния. Вектор состояния и вектор входных величин полностью описывают поведение системы в каждый момент времени.

Линейная стационарная детерминированная система описывается моделью состояния  $S(A, B, C, D)$  в форме (см., например, [5, 19])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu; \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $u$  —  $p$ -мерный вектор управления;  $y$  —  $r$ -мерный вектор выходных величин;  $A, B, C, D$  — матрицы соответствующих размерностей.

В качестве компонентов вектора состояния могут рассматриваться: напряжения на конденсаторах и токи через индуктивности в электрических схемах;

скорости и положения в механических системах;

энтальпии в термических системах с материальными потоками;

магнитные потоки, скорости, углы поворота в электроприводах;

состав и энтальпии насыщенной жидкости на каждой тарелке в

ректификационных колоннах;

положения и скорости автомашины при моделировании уличного движения и пр.

Известно, что системы  $S(A, B, C, D)$  и  $S(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$ , где  $T$  — неособая матрица, эквивалентны: у них одна и та же зависимость между входом и выходом. В этом же смысле эквивалентными являются системы  $S(A, B, C, D)$  и  $S(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ , если  $D = \bar{D}$  и  $CA^k B = \bar{C}\bar{A}^k \bar{B}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Импульсная переходная функция (ИПФ) и передаточная функция (ПФ) представляют часть системы  $S$ , которая является полностью управляемой и полностью наблюдаемой [8]. ИПФ и ПФ можно определить сравнительно легко из модели состояния, тогда как обратный переход — определение модели состояния по ИПФ и ПФ — является более трудным и неоднозначным.

Так как зависимость между входом и выходом системы инвариантна по отношению к линейным преобразованиям переменных состояния, не все  $N_1$  параметров ( $N_1 = nr + n^2 + np + pr$ ) системы (8) могут быть определены на основе измерений входных и выходных величин. Поэтому представляет интерес получение канонической формы системы, т. е. формы, содержащей минимальное число параметров.

Если матрица  $A$  имеет попарно различные собственные значения, каноническое представление однозначно определяется преобразованием матрицы  $A$  к диагональной форме. Этот случай характеризует полностью управляемую и полностью наблюдаемую систему, если каждая строка матрицы  $B$  и каждый столбец матрицы  $C$  содержат хотя бы по одному элементу, отличному от нуля.

Если матрица  $A$  имеет кратные собственные значения и существует вектор  $b$  такой, что векторы  $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$  линейно независимы (т. е. матрица  $A$  является циклической), каноническое представление системы (8) определяется однозначно.

Если матрица  $A$  не является циклической, возможны различные структуры с одинаковым числом параметров.

В стохастическом случае рассматривается дискретная система (см., например, [9]):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + v(k); \\ y(k) &= \Theta x(k) + Du(k) + e(k). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $\{v(k)\}$  и  $\{e(k)\}$  — последовательности независимых, одинаково распределенных случайных векторов с нулевыми средними значениями и ковариационными матрицами  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

Количество параметров матриц  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $\Theta$ ,  $D$  можно уменьшать способами, используемыми для непрерывных линейных систем. Возникает вопрос об уменьшении количества параметров, представляющих возмущение. Здесь можно использовать теорему Калмана о фильтрации, из которой следует, что выход системы можно представить в виде [19]

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + K \varepsilon(k); \\ y(k) &= \Theta \hat{x}(k) + D u(k) + \varepsilon(k),\end{aligned}\quad (10)$$

где  $\hat{x}(k)$  — условное среднее значение  $x(k)$  при заданных  $y(k-1), y(k-2), \dots$ ;  $\{\varepsilon(k) = e(k) + \Theta(x(k) - \hat{x}(k))\}$  — последовательность независимых, одинаково распределенных векторов с нулевыми средними значениями и ковариационной матрицей  $R$ ; матрица  $K$  — коэффициент усиления фильтра.

Если матрица  $\Phi$  является диагональной, соотношение (10) представляет собой каноническую форму с числом параметров  $N = n(1 + p + 2r) + r(p + \frac{r+1}{2})$ . В тех случаях, когда структура идентифицированного объекта задается в форме (10), коэффициент усиления фильтра  $K$  определяется в результате идентификации. Этим значительно облегчается решение задач фильтрации и оценивания, так как отпадает интегрирование дифференциального уравнения Риккати, связанного с определением коэффициента  $K$ .

#### МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ\*

В зависимости от типа используемой модели — непараметрической или параметрической — методы оценивания и идентификации можно разделить на две группы:

- 1) методы определения динамических характеристик (частотных и временных);
- 2) методы определения параметров — коэффициентов дифференциальных уравнений модели.

**Непараметрическое оценивание.** Рассмотрим линейную одномерную систему (рис. 1), на вход которой поступает сигнал

$$u(t) = s(t) + n(t), \quad (11)$$

где  $n(t)$  — помеха,  $s(t)$  — полезный сигнал. Пусть  $n(t)$  и  $s(t)$  — стационарные случайные процессы с нулевыми средними значениями.

Выход системы  $y(t)$  определяется соотношением

$$y(t) = \int_{-\infty}^t W(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $W(t, \tau)$  — импульсная переходная функция. Выход системы  $y(t)$  должен быть в некотором смысле наилучшим приближением к сигналу  $s(t+\eta)$ , где  $\eta = \text{const}$ . При  $\tau > 0$  — это задача прогнозирования, при  $\eta = 0$  — задача фильтрации и при  $\eta < 0$  — задача оптимального сглаживания.

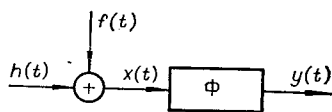


Рис. 1.

\* Рассматриваются статистические методы.

В классической постановке Колмогорова — Винера задача состоит в определении оптимальной импульсной переходной функции  $W(t, \tau)$  фильтра  $\Phi$ , минимизирующей ошибку

$$\varepsilon(t) = s(t + \eta) - y(t) \quad (13)$$

в среднеквадратичном смысле  $M(\varepsilon^2) = \min$  при известных характеристиках (корреляционных и автокорреляционных функций) входных воздействий.

В задаче фильтрации ( $\eta = 0$ ) оптимальная ИПФ должна удовлетворять интегральному уравнению (уравнению Винера) [1,8]

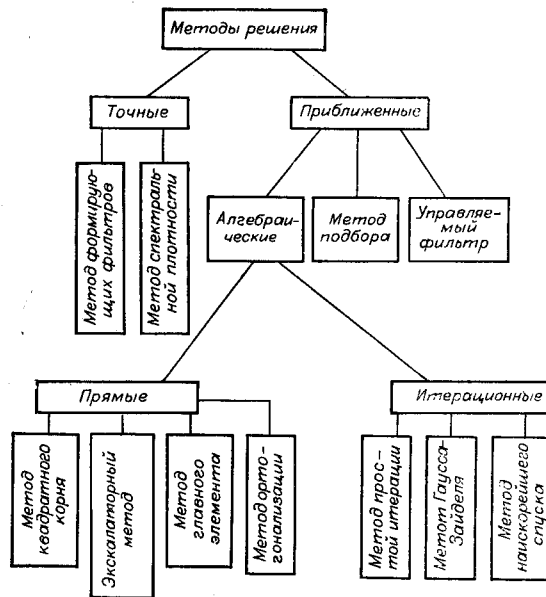


Рис. 2.

$$R_{yu}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^t W(t_1, \tau) R_u(t_2, \tau) d\tau, \quad (14)$$

где  $R_{yu}$ ,  $R_u$  — соответственно взаимно-корреляционная функция выходного и входного сигналов и автокорреляционная функция входного сигнала. Соотношение (14) является исходным уравнением непараметрической идентификации.

*Методы решения уравнения Винера.* (Классификация методов представлена на рис. 2.)

Точные методы [14].

1. Метод формирующих фильтров:

$$W(t_2, \Theta) = \int_{\Theta}^{t_2} \frac{W_0(t_1, \Theta)}{G(t_1)} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} W_0(t_1, \tau) \times \\ \times R_{yu}(t_2, \tau) dt. \quad (15)$$

Задача сводится к определению  $W_0(t_1, \tau)$  — весовой функции фильтра, преобразующего входной сигнал  $u(t)$  в белый шум с интенсивностью  $G(t_1)$ . Общего метода синтеза линейной системы, преобразующей случайный сигнал в белый шум, пока не существует. Задача решена для стационарного сигнала  $u(t)$  с дробно-рациональной спектральной плотностью.

Для этого случая

$$W_0(t_1, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t_1 - \Theta)}}{\psi(j\omega)} d\omega, \quad (16)$$

где  $\psi(j\omega)$  получается после факторизации спектральной плотности входного сигнала  $S_x(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$  и имеет нули и полюса в верхней полуплоскости  $\omega$ :

$$S_u(\omega) = \psi(j\omega) \psi^*(j\omega) = |\psi(j\omega)|^2. \quad (17)$$

2. Метод с использованием корреляционных функций:

$$W(t_2, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j\omega(t_2 - \theta - \mu)}}{\Psi(j\omega)} \times \\ \times d\omega \int_{-\infty}^\infty \frac{S_{yu}(t_2, \theta) e^{j\mu\theta}}{\Psi(-j\omega)}, \quad (18)$$

где

$$S_{yu}(t_2, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R_{yu}(t_2, t_2 - \eta) e^{-j\eta\theta} d\eta. \quad (19)$$

Приближенные методы [1].

1. Алгебраические методы.

Заменяя в уравнении (14) интеграл через конечную сумму, можно это уравнение представить в виде системы из  $N$  линейных алгебраических уравнений. Для стационарного случая

$$\frac{1}{T_0} R_{yu}(\tau) = \sum_{i=1}^N W(iT_0) R_u(\tau - iT_0). \quad (20)$$

Подставляя в последнее выражение  $\tau = T_0, 2T_0, \dots, NT_0$ , получим искомого алгебраическую систему

$$AW = R. \quad (21)$$

Здесь  $W, R$  —  $N$ -мерные вектор-столбцы:

$$W = [W(T_0), W(2T_0) \dots W(NT_0)]^T; \\ R = \left[ \frac{1}{T_0} R_{yu}(T_0), \frac{1}{T_0} R_{yu}(2T_0) \dots \frac{1}{T_0} R_{yu}(NT_0) \right]^T; \quad (22)$$

$A$  — симметричная матрица  $N \times N$ :

$$\|A\|_{ij} = R_u(|i-j|T_0). \quad (23)$$

Для численного решения уравнения (21) можно использовать следующие методы.

А. Прямые методы.

Метод квадратного корня. Характеризуется простой вычислительной схемой. Есть возможность потери значащих цифр.

Эскалаторный метод. Сложная вычислительная схема. Нет опасности потери значащих цифр.

Метод главных элементов. Удобен для проведения ручного вычисления.

Метод ортогонализации. Простой алгоритм, нет опасности потери значащих цифр. Большой объем вычислений.

Б. Итерационные методы.

Характеризуются простой вычислительной схемой. Недостатком является возможность медленной сходимости. Наиболее известны методы: простой итерации; Гаусса — Зайделя; наискорейшего спуска.

2. Метод подбора.

3. Метод с применением управляемого фильтра.

Удобен, когда входным сигналом является белый шум.

Численное решение системы, соответствующей интегральному уравнению (14), в случае, когда корреляционные функции определены экспериментальным путем, относится к классу некорректно поставленных задач. Решение системы существует, когда  $A$  — неособая матрица,

т. е.  $\det A \neq 0$ . Обычно матрица  $A$  является плохо обусловленной ( $\det A$  близок нулю), и небольшие отклонения в исходных данных приводят к большим отклонениям в решении.

Для получения устойчивого решения, когда матрица  $A$  плохо обусловлена, пользуются методами регуляризации [11]. Методы регуляризации основаны на минимизации сглаживающего функционала типа

$$M_\alpha [W(t), R_{yu}(t), R_u(t)] = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty R_u(\tau - t) \times \right. \\ \left. \times W(t) dt - R_{yu}(\tau) \right\}^2 d\tau + \alpha \int_0^\infty \sum_{i=0}^r g_i(t) \times [W^{(i)}(t)]^2 dt, \quad (24)$$

где  $\alpha > 0$ ;  $g_i(t) \geq 0$ .

В результате минимизации  $M_\alpha$  получается регуляризованное семейство приближенных решений  $\{W_\alpha(t)\}$ . При  $\alpha \rightarrow 0$   $W_\alpha(t)$  равномерно сходится к  $W(t)$ . Задача определения оптимального значения  $\hat{\alpha}$ , для которого

$$\varepsilon = \|W_{\hat{\alpha}}(t) - W(t)\| = \min, \quad (25)$$

не решена полностью.

**Нелинейные объекты.** Для описания нелинейных объектов применяется разложение в функциональные ряды. Простейшим является ряд Вольтерра

$$y(t) = W_0(t) + \int_0^\infty W_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty W_2 \times \\ \times (\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (26)$$

Обычно ограничиваются квадратичным членом, содержащим ядро второго порядка [13].

Основная задача — определение ядер  $W_0, W_1, \dots$  — обычно решается разложением этих ядер в ряд по ортогональным функциям

$$W_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{m_1=0}^\infty \dots \sum_{m_n=0}^\infty C_{m_1 \dots m_n} \times \\ \times \varphi_{m_1}(\tau_1) \dots \varphi_{m_n}(\tau_n). \quad (27)$$

Коэффициенты  $C_{m_1 \dots m_n}$  выбираются часто так, чтобы минимизировать функционал

$$M\{[y(t) - y_m(t)]^2\} = \min. \quad (28)$$

Винером показано, что, когда входным сигналом является белый шум, справедливо представление [2]

$$y(t) = \sum_{n=0}^\infty G_n [W_n x(t)], \quad (29)$$

где  $\{G_n\}$  — полный ряд ортогональных функционалов;  $W_n$  — описанные выше ядра. Винер представлял ядра разложением в ряд по ортогональным функциям Лагерра.

Идентификация нелинейных объектов связана с практическими трудностями, возникающими вследствие повышенной размерности описания.

### Параметрическая идентификация (оценивание параметров).

1. Метод наименьших квадратов (МНК).

Рассматривается дискретная стационарная модель с одним входом  $u$  и одним выходом  $y_m$ :

$$y_m(k) + a_1 y_m(k-1) + \dots + a_n y_m(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n). \quad (30)$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$V = V(y, y_m) = \sum_{k=n}^{n+N} e^2(k), \quad (31)$$

здесь  $y$  — выход объекта,  $e(k)$  — обобщенная ошибка.

$$e(k) = A^*(q^{-1}) [y(k) - y_m(k)], \quad (32)$$

где  $A^*(q^{-1}) = q^n A(q^{-1})$ :

$$A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_{n-1} q + a_n; \quad (33)$$

$$qy(k) \Delta y(k+1).$$

Вводятся обозначения:

$$y = [y(n+1) y(n+2) \dots y(n+N)]^T; \quad (34)$$

$$\beta = [a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n]^T;$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -y(n) & -y(n-1) & \dots & -y(1) & u(n) & u(n-1) & \dots & u(1) \\ -y(n+1) & -y(n) & \dots & -y(2) & u(n+1) & u(n) & \dots & u(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N+n-1) & -y(N+n-2) & \dots & -y(N) & u(N+n-1) & u(N+n-2) & \dots & u(N) \end{pmatrix}.$$

Теперь ошибка представляется соотношением

$$e = y - \Phi \beta. \quad (35)$$

Оптимальное значение  $\hat{\beta}$ , минимизирующее функционал (31), определяется соотношением

$$\hat{\beta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y. \quad (36)$$

Оценка  $\hat{\beta}$  является несмещенной при  $N \rightarrow \infty$ . Для больших  $N$  справедливо уравнение

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 [\Phi^T \Phi]^{-1}, \quad (37)$$

где

$$\sigma^2 = M(e^2(k)).$$

Определение порядка модели.

Рассматривается величина  $t$ :

$$t = \frac{V_1 - V_2}{V_2} \frac{N - n_2}{n_2 - n_1}, \quad (38)$$

где  $V_i$  — минимальное значение показателя качества (функционала (31)) для модели с  $n_i$  параметрами,  $i=1, 2$ ;  $N$  — количество пар наблюдений вход—выход. Для большого  $N$  случайная величина имеет асимптотически  $F(n_2 - n_1, N - n_2)$ -распределение.



Когда порядок модели увеличивается на единицу, количество параметров увеличивается на два. Например,

$$\begin{aligned} F(2,100) &= 3,09 \sim P\{t > 3,09\} = 0,05; \\ F(2, \infty) &= 3,00 \sim P\{t > 3,00\} = 0,05. \end{aligned} \quad (39)$$

Уменьшение показателя качества  $V$  значимо при 5%-ном риске, и  $N > 100$  тогда, когда  $t > 3,00$ .

2. Метод взвешенных наименьших квадратов.  
Показатель качества имеет вид

$$V = V(y, y_m) = \sum_{i=n}^{n+N} \lambda_i e^2(i), \quad (40)$$

где  $\lambda_i$  — весовые коэффициенты.

Методы наименьших квадратов и взвешенных наименьших квадратов дают несмещенные оценки параметров  $\beta$ , когда ошибки  $e(k)$  являются некоррелированными. При коррелированных ошибках возникает смещение, определяемое из соотношения

$$M(\hat{\beta} - \beta) = [M(\Phi^T \Phi)]^{-1} M(\Phi^T e). \quad (41)$$

Чтобы повысить точность оценок, используют [19]: а) обобщенный метод наименьших квадратов; б) корреляционный метод плюс метод наименьших квадратов; в) метод максимального правдоподобия; г) стохастическую аппроксимацию; д) метод аппаратных переменных и другие.

Каждый из этих алгоритмов можно представить в рекуррентном виде, что удобно для вычислений в реальном времени.

3. Обобщенный метод наименьших квадратов.

Коррелированные ошибки  $V(k)$  представляют в виде

$$V(k) = G^*(q^{-1})e(k), \quad (42)$$

где  $e(k)$  — последовательность некоррелированных случайных переменных;  $G^*(q^{-1})$  — соответствующая импульсная передаточная функция.

Рассматривая

$$\tilde{y}(k) = \frac{1}{G^*(q^{-1})} y(k); \quad \tilde{u}(k) = \frac{1}{G^*(q^{-1})} u(k) \quad (43)$$

соответственно как выход и вход системы, задачу сводят к обычному методу наименьших квадратов.

Обычно  $G^*(q^{-1})$  является неизвестной. Кларком предложена итеративная процедура для ее определения.

4. Корреляция плюс метод наименьших квадратов.

В уравнении (30) модели вместо  $y(k)$  и  $u(k)$  подставляются корреляционные функции  $R_y(\tau)$  и  $R_u(\tau)$ . Такой постановкой уменьшается влияние коррелированных ошибок.

5. Метод максимального правдоподобия.

Постулируется система с коррелированными остатками в виде

$$A^*(q^{-1})y(k) = B^*(q^{-1})u(k) + \lambda C^*(q^{-1})e(k), \quad (44)$$

где  $\{e(k)\}$  — последовательность нормально распределенных (0, 1) случайных величин. Параметры модели (44) определяются методом максимального правдоподобия. Функция правдоподобия  $L$  имеет вид

$$-\log L(\Theta, \lambda) = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) + \frac{N}{2} \log \lambda + \frac{N}{2} \log 2\pi, \quad (45)$$

где

$$C^*(q^{-1})\varepsilon(k) = A^*(q^{-1})e(k) - B^*(q^{-1})u(k); \quad (46)$$

$\Theta$  — вектор с компонентами  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ .  
 б. Стохастическая аппроксимация.

Предложена и исследована в работах Я. З. Цыпкина и др. (см. [3, 4]). Основывается на рекуррентном соотношении

$$\beta(k+1) = \beta(k) + \Gamma(k) [y(k+1) - \varphi(k+1)\beta(k)]. \quad (47)$$

Сходимость обеспечивается выбором

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} A\varphi^T(k+1), \quad (48)$$

где  $A$  — положительно определенная матрица;

$$\begin{aligned} \varphi(N+1) = & [-y(N) - y(N-1) \dots - y(N-n+1)u(N) \times \\ & \times u(N-1) \dots u(N-n+1)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Дисперсия оценок этого метода больше, чем у метода наименьших квадратов. Простая вычислительная схема, малый объем вычислений.

Сравнительная оценка описанных алгоритмов.

Оценка производилась для трех типов объектов: минимально-фазовых и неминимально-фазовых 2-го порядка и для объекта 3-го порядка с запаздыванием. Входное воздействие — случайный гауссов процесс. На выходе имеется известный гауссов шум, не коррелированный со входом. Критерий сравнительной оценки алгоритмов —

$$\min \Sigma \varepsilon^2 / \Sigma \text{coef } f^2,$$

где  $\varepsilon$  — ошибки определения коэффициентов.

Результаты: минимально-фазовый объект. Лучшими являются:

- 1) метод корреляционных функций плюс метод наименьших квадратов;
- 2) стохастическая аппроксимация.

Неминимально-фазовый объект: 1) метод корреляционных функций плюс метод наименьших квадратов; 2) метод аппаратной переменной.

Объект 3-го порядка с запаздыванием: 1) стохастическая аппроксимация плюс метод аппаратной переменной; 2) метод корреляционных функций плюс метод наименьших квадратов.

Точность вышеописанных методов ухудшается квантованием по времени и тем, что производные восстанавливаются по зашумленным измерениям. Эти трудности пытаются обойти применением интегральных методов, таких как метод моделирующих функций, метод Айзермана и др.

7. Алгоритмы последовательной линейной фильтрации.

Фильтр Калмана [19, 20].

Рассматривается линейная дискретная система:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + W(k); \quad (50)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + V(k).$$

Здесь  $x(k)$  — вектор состояния;  $u(k)$  — вектор детерминированных входных воздействий;  $y(k)$  — вектор наблюдаемых величин;  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  — известные матрицы;  $W(k)$  и  $V(k)$  — некоррелированные белые шумы с нулевыми средними значениями и известными корреляционными матрицами  $V_w(k)$  и  $V_v(k)$  соответственно.

Начальные условия для системы (50) задаются в виде

$$\mu_x(0) = E\{x(0)\}; \quad V_x(0) = \text{cov}\{x(0)\}. \quad (51)$$

Линейный фильтр — в виде

$$\hat{x}(k+1) = D(k)\hat{x}(k) + K(k+1)y(k+1) + E(k)u(k). \quad (52)$$

Здесь  $\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k)$  — оценка вектора состояния  $x$  на основе наблюдений  $y(1), \dots, y(k)$ .

Ошибка оценивания

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \quad (53)$$

Ставится требование несмещенности оценки, т. е.  $E\{\tilde{x}(k+1)\} = 0$ .  
Необходимые для этого условия:

$$\begin{aligned} [I - K(k+1)C(k+1)]A(k) &= D(k); \\ [I - K(k+1)C(k+1)]B(k) &= E(k). \end{aligned} \quad (54)$$

С учетом последних двух соотношений уравнение фильтра запишется как

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1)\tilde{y}(k+1), \quad (55)$$

где

$$\hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k); \quad (56)$$

$$\tilde{y}(k+1) = y(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k+1/k). \quad (57)$$

Уравнение (56) называют уравнением с предсказанием на одном шаге, (57) — уравнением обновления. Здесь  $\hat{x}(k+1/k)$  — оценка  $x(k+1)$ , основанная на наблюдениях  $y(1), \dots, y(k)$ .

Точность оценивания характеризуется ковариационной матрицей ошибки, для которой справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} V_{\tilde{x}}(k+1) &= [I - K(k+1)C(k+1)][A(k)V_{\tilde{x}}(k)A^T(k) + \\ &+ V_w(k)][I - K(k+1)C(k+1)]^T + K(k+1)V_v(k+1)K^T(k+1) \end{aligned} \quad (58)$$

с начальным условием

$$V_{\tilde{x}}(0) = V_x(0) = \text{cov}\{x(0)\}. \quad (59)$$

Задача состоит в определении оптимальной матрицы  $K(k+1)$ , которая минимизирует след матрицы  $V_{\tilde{x}}(k+1)$ . Для оптимального  $\hat{K}(k+1)$  можно получить

$$\begin{aligned} \hat{K}(k+1) &= V_{\tilde{x}}(k+1/k)C^T(k+1)[C(k+1)V_{\tilde{x}}(k+1/k) \times \\ &\times C^T(k+1) + V_v(k+1)]^{-1}, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$V_{\tilde{x}}(k+1/k) = A(k)V_{\tilde{x}}(k)A^T(k) + V_w(k). \quad (61)$$

Формулы (55) ÷ (61) дают полный набор алгоритмов для последовательной линейной фильтрации.

Расширенный фильтр Калмана [19, 20].

Для нелинейной системы

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f[x(k), u(k), k] + W(k); \\ y(k) &= h[x(k), k] + V(k) \end{aligned} \quad (62)$$

нелинейные функции  $f$  и  $h$  представляются линейным приближением, полученным при разложении их в ряд Тейлора в окрестностях нулевых ошибок. В результате можно получить набор алгоритмов, подобный набору для линейного случая, которые представляют расширенный фильтр Калмана.

Представляемые алгоритмы минимизируют среднеквадратичные ошибки оценки состояния. При реализации этих алгоритмов возникают три вида трудностей: а) неизвестны параметры системы; б) неизвестны априорные статистические характеристики  $V_w, V_v$ ; в) наличие небелого шума в измерениях, а также отсутствие шума при некоторых измерениях.

Первые две трудности можно преодолеть идентификацией параметров и моментов  $W(k)$  и  $V(k)$  (адаптивная фильтрация).

Покажем, как задачу идентификации параметров можно свести к задаче фильтрации. Для этого уравнение (62) представляется в виде

$$\begin{aligned} z(k+1) &= f'[z(k), p(k), u(k), k] + W'(k); \\ y(k) &= h'[z(k), P(k), k] + V'(k), \end{aligned} \quad (63)$$

где  $z(k)$  — вектор состояния;  $P(k)$  — вектор неизвестных параметров.

Рекомендуется вектор  $P(k)$  описывать соотношением

$$P(k+1) = P(k) + W(k) \quad (64)$$

(для стационарных систем). Здесь  $W(k)$  — белый шум, вводимый для обеспечения сходимости.

Задача идентификации сводится к оценке обобщенного вектора состояния  $x(k)$ :

$$x(k) = \begin{bmatrix} z(k) \\ P(k) \end{bmatrix}, \quad (65)$$

т. е. к задаче фильтрации.

При неизвестных характеристиках помех алгоритмы Калмана могут расходиться. Для оценивания моментов используются: а) алгоритмы для текущей коррекции  $V$ ; б) адаптивные Бейесовы алгоритмы; в) методы, основанные на принципе максимального правдоподобия и др.

Система «наблюдатель» [21].

В случаях когда некоторые выходные величины не являются шумленными и (или) когда шум при измерениях коррелирован, матрица  $V_x$  (ковариационная матрица ошибки) является часто плохо обусловленной. Возникающие в связи с этим трудности пытаются преодолеть при помощи систем, называемых «наблюдателями». «Наблюдатель» — это система с выходным вектором  $Z$ , представляющим собой оценку линейной комбинации  $T(k)x(k)$  компонент вектора состояния  $x(k)$ . С этой оценкой связывается ошибка  $e(k)$ .

Соотношения:

$$z(k) = T(k)x(k) + e(k); \quad (66)$$

$$z(k+1) = F(k)z(k) + G(k)u(k) + D(k)y(k) \quad (67)$$

— уравнение «наблюдателя»

$$T(k+1)A(k) = F(k)T(k) + D(k)C(k) \quad (68)$$

— фундаментальное уравнение «наблюдателя»

$$G(k) = T(k+1)B(k). \quad (69)$$

Пусть  $n$  — размерность  $x$ ;  $m$  — размерность  $z$ . Тогда наблюдатель порядка  $n-m$  (т. е.  $z(k)$  имеет размерность  $n-m$ ) называется «наблюдатель»

телем с минимальным порядком». Он должен удовлетворять (67), (68) таким образом, чтобы существовала матрица  $\begin{bmatrix} T(k) \\ C(k) \end{bmatrix}^{-1}$ .

Матрица  $T(k)$  выбирается таким образом, чтобы минимизировать

$$\text{var}\{\dot{x}(k) - \hat{x}(k)\}. \quad (70)$$

Оценка  $x$  получается из соотношения

$$\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} T(k) \\ C(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \Lambda(k)z(k) + \Theta(k)y(k). \quad (71)$$

При использовании «наблюдателя минимального порядка» дисперсия ошибки ненамного больше, чем при использовании фильтра Калмана.

#### 8. Адаптивные модели [3, 4].

Структурная схема адаптивной модели приведена на рис. 3.

Уравнение модели:

$$\hat{y}(t) = B[x(t), C], \quad (72)$$

где  $B[\cdot]$  — известный оператор;  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$  — вектор неизвестных параметров (коэффициентов модели). Часто используется

$$B[x(t), C] = C^T B[x(t)], \quad (73)$$

где  $B[x(t)] = (B_1[x(t)], \dots, B_n[x(t)])^T$ ;  $B_i[x(t)]$  — линейно независимые операторы.

Адаптация представляет собой выбор такого  $C$ , при котором выпуклый функционал

$$J(C) = M\{F[\varepsilon^2(t)]\} \quad (74)$$

достигает минимального значения. Здесь  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  — рассогласование между моделью и объектом.

Часто используется квадратичный функционал

$$J(C) = M\{\varepsilon^2(t)\}. \quad (75)$$

Условием минимума функционала (74) является

$$\nabla_C J(C) = M\{\nabla_C F[\varepsilon(t)]\}, \quad (76)$$

где

$$\nabla_C = \left( \frac{\partial}{\partial C_1} \dots \frac{\partial}{\partial C_n} \right).$$

Принципы построения адаптивных моделей: а) с автоматическим поиском; б) с аналитической настройкой.

Алгоритмы

$$\frac{dC}{dt} = -\Gamma(t) \nabla_C F[\varepsilon(t)] \text{ (непрерывный);} \quad (77)$$

$$C_n = C_{n-1} - \Gamma_n \nabla_C F[\varepsilon_{n-1}] \text{ (дискретный),} \quad (78)$$

где

$$\nabla_C F[\varepsilon(t)] = \nabla_C F[y(t) - C^T B(x(t))] = F'[y(t) - C^T B(x(t))] \nabla_C B(x(t)). \quad (79)$$

Для квадратичного критерия

$$\nabla_C F[\varepsilon(t)] = 2[y(t) - C^T B(x(t))] B(x(t)). \quad (80)$$

В заключение авторы хотят обратить внимание на некоторые задачи, которые они

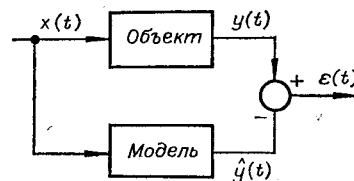


Рис. 3.

считают актуальными в настоящее время. Это: 1) сравнительная количественная оценка алгоритмов, выявление областей применения и условий целесообразности применения; 2) увеличение скорости сходимости адаптивных алгоритмов; 3) доказательство сходимости алгоритмов, связанных с получением несмещенных оценок; 4) разработка проблемно ориентированного математического обеспечения ЦВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. С. Усков. Статистический анализ объектов регулирования. М., Машгиз, 1960.
2. Н. Винер. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М., ИЛ, 1961.
3. Я. З. Цыпкин. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
4. З. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
5. И. И. Красовский. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
6. Н. С. Райбман. Адаптивные модели в системах управления. М., «Советское радио», 1966.
7. Н. С. Райбман. Идентификация объектов управления. М., ЦЭМИ АН СССР, 1967.
8. Я. Н. Ройтенберг. Автоматическое управление. М., «Наука», 1971.
9. М. Аоки. Оптимизация стохастических систем. М., «Наука», 1971.
10. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.
11. А. Н. Тихонов. О методах регуляризации задач оптимального управления.— ДАН СССР, 1965, т. 162, № 4.
12. Т. Петков. Идентификация на объекте за автоматизация. София, «Техника», 1972.
13. Н. М. Александровский, С. В. Егоров, Р. Е. Кузин. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами. М., «Энергия», 1973.
14. Я. А. Гельфандбейн. Методы кибернетической диагностики динамических систем. Рига, «Зинатне», 1967.
15. P. Euykroff. Process Parameters and State Estimation. IFAC-Symp.— In: Identification in Autom. Control Systems. Prague, 1967. Survey Paper.
16. A. V. Bolakrishnan, V. Peterka. Identification in Automatic Control Systems.— In: Proc. Fourth IFAC Congress. Warsaw, 1969. Survey Paper.
17. M. Cuenod, A. Sage, Comparison of Some Methods Used for Process Identification IFAC-Symp.— In: Identification in Autom. Control Systems. Prague, 1967. Survey Paper.
18. P. Euykhoff, P. M. Vander Grinten, H. Kwakernaak, B. P. Veltman. Systems Modelling and Identification.— In: Proc. Third IFAC Congress. London, 1966. Survey Paper.
19. K. J. Åström, P. Euykhoff. A Survey.— Automatica, 1971, v. 7, N 2.
20. A. Sage. Estimation and Identification. (In: Proc. Fifth IFAC-Congress. Paris, 1972.
21. T. Leondes, L. M. Novak. Optimal Minimal-Order Observers for Discrete-Time Systems — a Unified Theory.— In: Proc. Fifth IFAC-Congress. Paris, 1972.

*Поступила в редакцию 16 апреля 1974.*

УДК 519.2 : 681.3

**А. Н. ДОМАРАЦКИЙ, Л. Н. ИВАНОВ**

*(Новосибирск)*

### **ОБЩИЙ ПОДХОД К СТРУКТУРНОМУ ПОСТРОЕНИЮ ОПЕРАТИВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ АНАЛИЗАТОРОВ**

В технике аппаратного анализа случайных сигналов наметилась тенденция, направленная на построение оперативных статистических анализаторов (корреляторов, спектральных анализаторов и анализаторов