

И. В. СЕМУШИН

(Ульяновск)

АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ СИСТЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ КОВАРИАЦИЯМИ ШУМОВ

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную линейную многомерную систему, описываемую векторными разностными уравнениями

$$x_i = \Phi_{i-1}x_{i-1} + \omega_{i-1}, \quad (1)$$

$$z_i = H_i x_i + v_i \quad (2)$$

для $i=1, 2, \dots$ с начальным состоянием x_0 . Значения $M[x_0]=0$, $M[x_0x_0^T]=P_0$, где M — символ математического ожидания, заданы. Размерность вектора состояния x_i и вектора возмущающего шума ω_i равна n , размерность вектора измерения z_i и вектора v_i ошибки (шума) измерения равна m . Переходная матрица состояния Φ_{i-1} имеет размерность $(n \times n)$, H_i — матрица измерений размерности $(m \times n)$. Предполагается, что эти матрицы известны как функции дискретного времени i и система (1), (2) полностью наблюдаема.

Шумы ω_i и v_i считаются взаимно некоррелированными гауссовскими белыми последовательностями с нулевыми средними значениями и ковариациями:

$$M[\omega_j \omega_i^T] = Q_i \delta_{ij}, \quad M[v_{j+1} v_{i+1}^T] = R_{i+1} \delta_{ij} \quad (3)$$

для любых $i, j=0, 1, \dots$; δ_{ij} — дельта-функция Кронекера; Q_i и R_{i+1} — положительно определенные матрицы ковариаций, фактические значения которых неизвестны.

В этих условиях неопределенности возникает проблема адаптивной фильтрации и предсказания, состоящая в получении оптимальных оценок вектора x_i .

Пусть, как обычно, $x_{i|j}^*$ — линейная оценка значения x_i , основанная на множестве измерений $Z^j = \{z_1, z_2, \dots, z_j\}$, и

$$\tilde{x}_{i|j}^* = x_i - x_{i|j}^* \quad (4)$$

— ошибка оценки с матрицей ковариаций

$$P_{i|j}^* = M[\tilde{x}_{i|j}^* (\tilde{x}_{i|j}^*)^T]. \quad (5)$$

Качество фильтрации и предсказания определяется значениями соответствующих функционалов

$$J_{i|i}^* = Sp P_{i|i}^*, \quad J_{i+1|i}^* = Sp P_{i+1|i}^* \quad (6)$$

при $i=1, 2, \dots$, где Sp — обозначение следа матрицы. Известно, что в оптимальном фильтре Калмана задачи минимизации функционалов (6) для каждого момента времени i взаимосвязаны и решаются одновременно [1]. А именно, если $\hat{x}_{i|i}$ — оптимальная текущая оценка (в задаче фильтрации) и $\hat{x}_{i|i-1}$ — оптимальное предсказание, то эти оценки описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i-1} &= \Phi_{i-1} \hat{x}_{i-1|i-1}, \\ \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + K_i \tilde{z}_{i|i-1}, \\ \tilde{z}_{i|i-1} &= z_i - H_i \hat{x}_{i-1|i-1} \end{aligned}$$

$\hat{x}_{0|0} = 0, i=1, 2, \dots$, где K_i — матрица передачи оптимального фильтра Калмана. Она имеет размерность $(n \times m)$ и определяется с помощью соотношений [1]

$$\begin{aligned} K_i &= P_{i|i-1} H_i^T U_i^{-1}, \\ U_i &= H_i P_{i|i-1} H_i^T + R_i, \\ P_{i|i-1} &= \Phi_{i-1} P_{i-1|i-1} \Phi_{i-1}^T + Q_{i-1}, \\ P_{i|i} &= (I - K_i H_i) P_{i|i-1} \end{aligned}$$

для $i=1, 2, \dots$ при $P_{0|0} = M [x_0 x_0^T] = P_0$. Здесь матрицы P_{ij} получаются из выражений (4), (5) при замене в них оценки x_{ij}^* на ее оптимальное значение \hat{x}_{ij} . Субоптимальные же оценки $x_{i|i-1}^*, x_{i|i}^*$ при неизвестных матрицах Q_{i-1}, R_i получаются в форме уравнений

$$x_{i|i-1}^* = \Phi_{i-1} x_{i-1|i-1}^*, \quad (7)$$

$$x_{i|i}^* = x_{i|i-1}^* + K_i^* z_{i|i-1}^*, \quad (8)$$

$$z_{i|i-1}^* = z_i - H_i x_{i|i-1}^*, \quad (9)$$

$x_{0|0}^* = 0, i=1, 2, \dots$, где K_i^* обозначает субоптимальную матрицу передачи. Следовательно, для всех $i=1, 2, \dots$

$$\min_{K_i^*} J_{i|i}^* = Sp P_{i|i}; \quad \min_{K_i^*} J_{i+1|i}^* = Sp P_{i+1|i}, \quad (10)$$

причем указанные минимумы достигаются при $K_i^* = K_i$.

Однако вести адаптивное оценивание оптимальной матрицы K_i непосредственно по любому из критериев (10) невозможно, так как ошибка (4) недоступна регистрации. Учитывая это обстоятельство, поставим задачу выполнить указанное оценивание по минимуму некоторого вспомогательного функционала, зависящего лишь от наблюдаемых процессов, т. е. процессов, доступных регистрации. Такая задача ранее ставилась [2, 3] и рассматривалась для частных случаев [4, 5]. Ниже с использованием свойства полной наблюдаемости системы получены более общие результаты.

Нестационарный вариант. Исходя из уравнений (1), (2), для некоторого $N > 0$ введем mN -мерные векторы

$$\begin{aligned} Z_{i,N}^T &= \|z_{i-N+1}^T | z_{i-N+2}^T | \dots | z_i^T\|, \\ V_{i,N}^T &= \|v_{i-N+1}^T | v_{i-N+2}^T | \dots | v_i^T\| \end{aligned} \quad (11)$$

(τ — символ транспонирования) и nN -мерный вектор

$$W_{i-1,N}^T = \|w_{i-N}^T | w_{i-N+1}^T | \dots | w_{i-1}^T\|, \quad (12)$$

а также $(mN \times n)$ -матрицу

$$H_{i,N}^T = \|\Phi_{i-N,1}^T H_{i-N+1}^T | \Phi_{i-N+1,2}^T H_{i-N+2}^T | \dots | \Phi_{i-1,N}^T H_i^T\|,$$

$(mN \times nN)$ -матрицу

$$F_{i,N} = \left\| \begin{array}{cccc} H_{i-N+1} & & & \\ H_{i-N+2} \Phi_{i-N+1,1} & H_{i-N+2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_i \Phi_{i-1,N-1} & H_i \Phi_{i-1,N-2} & \dots & H_i \end{array} \right\|,$$

$(n \times n)$ -матрицы

$$\Phi_{i-1,k} = \Phi_{i-1} \Phi_{i-2} \dots \Phi_{i-k}, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

и $(n \times nN)$ -матрицу

$$G_{i,N} = \|\Phi_{i-1,N-1} | \Phi_{i-1,N-2} | \dots | \Phi_{i-1,1} | I\|.$$

С помощью этих обозначений для $i=N, N+1, \dots$ составим уравнения

$$x_i = \Phi_{i-1,N} x_{i-N} + G_{i,N} W_{i-1,N}, \quad (13)$$

$$Z_{i,N} = H_{i,N} x_{i-N} + F_{i,N} W_{i-1,N} + V_{i,N}. \quad (14)$$

Определим также обобщенную обратную матрицу

$$H_{i,N}^+ = (H_{i,N}^T H_{i,N})^{-1} H_{i,N}^T, \quad (15)$$

которая всегда существует для некоторого $N > 0$, так как система полностью наблюдаема [1].

Основной полученный результат сформулируем в виде теоремы.
Теорема. Минимум функционала

$$J_i(\varepsilon) = M[\varepsilon_i^T \varepsilon_i] = Sp M[\varepsilon_i \varepsilon_i^T] \quad (16)$$

от наблюдаемого процесса

$$\varepsilon_i = H_{i,N}^+ Z_{i,N} - x_{i-N|i-N}^* \quad (17)$$

в каждый момент времени $i=N+1, N+2, \dots$ при некотором $N > 0$ является необходимым и достаточным условием оптимальности фильтра (7)–(9) с запаздывающим на N тактов выходом, т. е. условием выполнения равенства $K_{i-N}^* = K_{i-N}$.

Доказательство. Подставляя уравнение (14) в формулу (17) и учитывая выражения (4), (15), для $i=N+1, N+2, \dots$ получим

$$\varepsilon_i = \tilde{x}_{i-N|i-N}^* + H_{i,N}^+ F_{i,N} W_{i-1,N} + H_{i,N}^+ V_{i,N}, \quad (18)$$

$$\tilde{x}_{i-N|i-N}^* = x_{i-N} - x_{i-N|i-N}^*. \quad (19)$$

В ошибке фильтрации (19) первое слагаемое зависит только от множества значений

$$W^{i-N-1} = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-N-1}\} \quad (20)$$

возбуждающего шума ω_{i-1} , так как, согласно (13),

$$x_{i-N} = \Phi_{i-N-1, i-N} x_0 + G_{i-N, i-N} W_{i-N-1, i-N}.$$

Второе слагаемое, как видно из уравнений (7)–(9) и (1), (2), зависит только от множества $V^{i-N} = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-N}\}$ шумов измерений и от множества (20). Указанные множества с множествами компонент векторов (11), (12) не пересекаются. Отсюда и с учетом свойств (3) получаем, что первое слагаемое с двумя другими слагаемыми уравнения (18) не коррелировано. Следовательно, для $i=N+1, N+2, \dots$ выполняется равенство

$$J_i(\varepsilon) = M[\varepsilon_i^T \varepsilon_i] = J_{i-N|i-N}^* + C_i,$$

где C_i — величина, не зависящая от матрицы передачи K_i^* фильтра (7)–(9), а именно:

$$C_i = Sp[H_{i,N}^+ F_{i,N} Q_{i-1,N} F_{i,N}^T (H_{i,N}^+)^T] + Sp[H_{i,N}^+ R_{i,N} (H_{i,N}^+)^T],$$

$$Q_{i-1,N} = \begin{pmatrix} Q_{i-N} & & & & \\ & Q_{i-N+1} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & Q_{i-1} \end{pmatrix},$$

$$R_{i,N} = \begin{pmatrix} R_{i-N+1} & & & & \\ & R_{i-N+2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & R_i \end{pmatrix}.$$

В связи с этим для всех $i=N+1, N+2, \dots$ имеем

$$\min_{K_{i-N}^*} J_i(\varepsilon) = \min_{K_{i-N}^*} J_{i-N|i-N}^* + C_i,$$

что и доказывает теорему.

Этот результат иллюстрируется схемой (рис. 1) и временной диаграммой (рис. 2), из которых видно, что все оценки запаздывают во времени на N тактов. Обычно N возрастает при уменьшении m , поэтому для уменьшения запаздывания желательно обеспечивать достаточную размерность m вектора измерений z_i , а также уменьшить величину такта между измерениями. Практическое применение схемы (см. рис. 1) затруднено тем, что минимизация функционала (16) должна выполняться в реальном масштабе времени, т. е. для каждого $i=N+1, N+2, \dots$.

Стационарный вариант. Указанные затруднения и запаздывание устраняются в случае стационарной системы

$$x_i = \Phi x_{i-1} + \omega_{i-1},$$

$$z_i = H x_i + v_i,$$

$Q_i = Q, R_{i+1} = R$ и установившегося субоптимального фильтра

$$x_{i|i-1}^* = \Phi x_{i-1|i-1}^*, \quad (21)$$

$$x_{i|i}^* = x_{i|i-1}^* + K^* \tilde{z}_{i|i-1}^*, \quad (22)$$

$$\tilde{z}_{i|i-1}^* = z_i - H x_{i|i-1}^*, \quad (23)$$

$i \rightarrow -\infty$. Этот фильтр отвечает оптимальному фильтру

$$\hat{x}_{i|i-1} = \Phi \hat{x}_{i-1|i-1},$$

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_{i|i-1} + K \tilde{z}_{i|i-1},$$

$$\tilde{z}_{i|i-1} = z_i - H \hat{x}_{i|i-1} \quad (24)$$

в установившемся состоянии, где K — соответствующая матрица передачи. Она определяется в виде $K = E H^T U^{-1}$, где

$$E = M [(x_i - \hat{x}_{i|i-1})(x_i - \hat{x}_{i|i-1})^T]$$

— ковариация оптимальной установившейся ошибки предсказания, удовлетворяющая уравнению

$$E = \Phi E \Phi^T - \Phi E H^T U^{-1} H E \Phi^T + Q,$$

U — ковариация установившейся невязки измерений или обновляющего процесса (24) оптимального фильтра, равная

$$U = M [\tilde{z}_{i|i-1} \tilde{z}_{i|i-1}^T] = H E H^T + R.$$

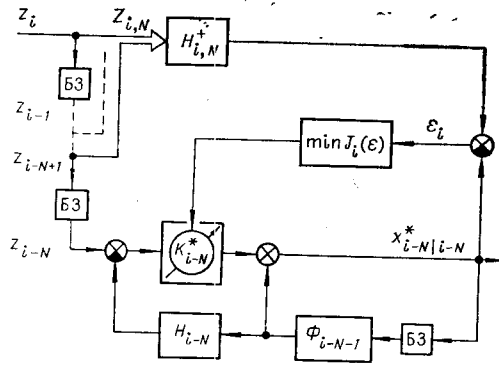


Рис. 1. Схема нестационарного фильтра с запаздывающим выходом (БЗ — здесь и далее блок задержки).

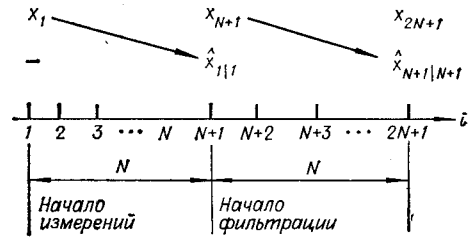


Рис. 2. Временная диаграмма получения запаздывающих оптимальных оценок.

Рис. 3. Схема адаптивного оценивания для стационарных условий фильтрации АФ⁻¹В⁺.

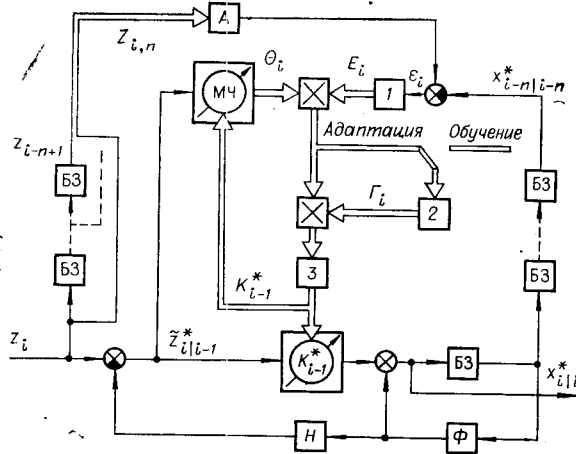


Рис. 4. Схема адаптивного фильтра с алгоритмом стохастической аппроксимации:

АФ⁻¹В⁺, МС — модель чувствительности, 1 — преобразование вектора ϵ_i в квазидиагональную блочную матрицу ϵ_i , 2 — правило начала — остановки, 3 — дискретный интегратор.

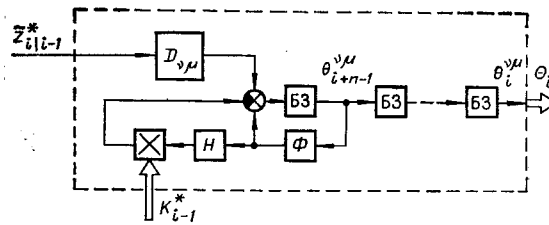


Рис. 5. Схема модели чувствительности.

Для рассматриваемых условий $N=n$ и $H_{i,N}=B\Phi$, $H_{i,N}^+ = A = \Phi^{-1}B^+$,

$$B^T = \|H^T; \Phi^T H^T; \dots; (\Phi^T)^{n-1} H^T\|$$

— матрица наблюдаемости системы [1], $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ — обобщенная обратная матрица. Так как в данном случае все процессы стационарны, то функционал (16) инвариантен относительно сдвига во времени, поэтому из теоремы получаем следующий вывод.

С л е д с т в и е. Минимум функционала

$$J(\varepsilon) = M [\varepsilon_i^T \varepsilon_i] = Sp M [\varepsilon_i \varepsilon_i^T] \quad (25)$$

от наблюдаемого процесса

$$\varepsilon_i = \Phi^{-1} B^+ Z_{i,n} - x_{i-n/i-n}^*$$

является необходимым и достаточным условием оптимальности установившегося фильтра (21)—(23), т. е. условием выполнения равенства $K^* = K$.

В соответствующей схеме (рис. 3) для минимизации функционала (25) целесообразно использовать алгоритмы стохастической аппроксимации. Так как уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial k^{\nu\mu}} = -M \left[\varepsilon_i^T \frac{\partial x_{i-n/i-n}^*}{\partial k^{\nu\mu}} \right] = 0,$$

где $k^{\nu\mu}$ — компоненты матрицы $K^* = \|k^{\nu\mu}\|$, $\nu=1, \dots, n$; $\mu=1, \dots, m$, выражают необходимые (в данном случае и достаточные) условия минимума функционала (25), то стохастическая аппроксимация, разделяемая по всем компонентам $k^{\nu\mu}$, осуществляется согласно уравнениям

$$k_i^{\nu\mu} = k_{i-1}^{\nu\mu} + \gamma_i \varepsilon_i^T \theta_i^{\nu\mu} (\|k_{i-1}^{\nu\mu}\|) \quad (26)$$

для $i=i_0+1, i_0+2, \dots$, где i_0+1 — момент пуска процедуры (26) с некоторым начальным значением $K_{i_0}^* = \|k_{i_0}^{\nu\mu}\|$;

$$\theta_i^{\nu\mu} = \theta_i^{\nu\mu} (\|k^{\nu\mu}\|) = \frac{\partial x_{i-n/i-n}^*}{\partial k^{\nu\mu}} \quad (27)$$

— векторная функция чувствительности процесса $x_{i-n/i-n}^*$ относительно компоненты $k^{\nu\mu}$, имеющая размерность n . Она определяется в модели чувствительности (МЧ), получаемой из уравнений (7)—(9) в виде соотношений

$$\theta_i^{\nu\mu} = (I - K^* H) \Phi \theta_{i-1}^{\nu\mu} + D_{\nu\mu} \tilde{z}_{i-n/i-n-1}^* \quad (28)$$

где

$$D_{\nu\mu} = \partial K^* / \partial k^{\nu\mu}$$

— постоянная матрица размерности $(n \times m)$. Скалярный множитель $\gamma_i > 0$ выбирается из условий сходимости [5]. Функции (27), (28) образуют матрицу

$$\theta_i = \theta_i(K^*) = \|\theta_i^{\nu\mu}\| \quad (29)$$

функций чувствительности, которая может рассматриваться как блочная матрица, в которой каждый из $(n \times m)$ блоков $\theta_i^{\nu\mu}$ ($\nu=1, \dots, n$; $\mu=1, \dots, m$) представляет собой матрицу-столбец размерности $(n \times 1)$, т. е. общая размерность матрицы (29) равна $(n^2 \times m)$.

Вводя квазидиагональную блочную матрицу

$$E_i = \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_i & & \circ \\ & \varepsilon_i & \\ \circ & & \ddots \\ & & & \varepsilon_i \end{array} \right\|$$

размерности $(n^2 \times n)$, алгоритм (26) представим в компактной форме

$$K_i^* = K_{i-1}^* + \Gamma_i E_i^T \theta_i(K_{i-1}^*), \quad i = i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, \quad (30)$$

где вместо скалярного множителя γ_i для большей общности записан матричный множитель Γ_i размерности $(n \times n)$. Он обуславливает связанную по всем компонентам k^{*m} стохастическую аппроксимацию и может быть оптимизирован по известной методике [6]. При любом начальном значении $K_{i_0}^*$, алгоритм (30) с вероятностью единица сходится: $K_i^* \rightarrow K$ при $i \rightarrow \infty$, и, следовательно, оценка $x_{i,i}^*$ с той же вероятностью сходится к оптимальной оценке $\hat{x}_{i,i}$ (рис. 4). Схема модели чувствительности, соответствующая уравнениям (28), приведена на рис. 5.

Заключение. С использованием свойства полной наблюдаемости системы доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности фильтра по минимуму функционала от процесса (17), доступного непосредственной регистрации. Для стационарной системы и установившегося фильтра построены практические алгоритмы адаптации. От известных методов [7, 8] они отличаются меньшим объемом вычислений, так как в процессе адаптации не требуется обращение матриц (матрица $A = \Phi^{-1}B^+$ вычисляется заранее). Объем вычислений определяется главным образом моделью чувствительности, имеющей на выходе размерность $(n^2 \times m)$. Принципиальное же отличие алгоритмов заключается в том, что они обеспечивают адаптацию или обучение фильтра по замкнутой схеме без непосредственного вычисления характеристик каких-либо процессов, как того требует большинство из методов [7], [8]. Алгоритмы могут быть дополнены правилом начала — остановки, генерирующим последовательность Γ_i в одном из двух режимов: «Адаптация» или «Обучение» (см. рис. 4). В режиме «Обучение» происходит однократное включение последовательности Γ_i , после чего вычисленное оптимальное значение матрицы передачи фильтра фиксируется. Этот режим используется, если ковариации шумов неизвестны, но постоянны. В режиме «Адаптация» включение последовательности Γ_i происходит автоматически всякий раз, как только алгоритм начала — остановки обнаружит неоптимальность фильтра относительно неизвестных и, возможно, изменившихся (непредвиденным образом) ковариаций шумов. В этом случае схема адаптации действует согласно принципу замкнутой схемы, следящей за изменениями ковариаций шумов непосредственно по минимуму функционала качества фильтрации. Алгоритм начала — остановки может быть построен по известной методике [9]. Регулируя его параметры (порог и объем выборки), можно придать желаемые свойства чувствительности адаптивного фильтра к вариациям характеристик шумов.

Результаты данной работы могут найти применение при оценке состояния системы как в реальном масштабе времени (например, в навигации, для целей управления подвижным объектом или технологическим процессом), так и при анализе результатов эксперимента после его окончания (при обработке данных телеметрии и траекторных измерений, при анализе протекания химического процесса и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Медич. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. Пер. с англ. под ред. А. С. Шаталова. М., «Энергия», 1973.
2. И. В. Семушин. Многоканальный адаптивный фильтр активного типа. — Изв. высш. учеб. заведений. Сер. приборостроение, 1969, № 10.
3. С. А. Понырко, И. В. Семушин. Использование активного принципа при построении самонастраивающихся фильтров. — Изв. АН СССР. Сер. техническая кибернетика, 1971, № 1.

4. С. А. Понырко, И. В. Семушин. Построение обучающихся винеровских фильтров при ограниченном объеме априорной информации.— Изв. АН СССР. Сер. техническая кибернетика, 1971, № 5.
5. И. В. Семушин. Применение активной самонастройки в комплексной измерительной системе.— Автометрия, 1971, № 2.
6. Я. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
7. Sargent Burian, Belanger Pierre R. Identification of Optimal Filter Steady-State Gain for Systems With Unknown Noise Covariances.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, v. 18, N 6.
8. R. K. Mehra. Approaches to Adaptive Filtering.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, v. 17, N 5.
9. С. А. Понырко, И. В. Семушин. О выборе алгоритма начала — остановки при минимизации среднеквадратического критерия качества.— Автометрия, 1973, № 2.

Поступила в редакцию 16 июля 1974 г.

УДК 681.3.08

И. З. ЛИТВИН

(Харьков)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ОШИБКИ ПРИ ДИСКРЕТНОМ КОНТРОЛЕ

В системах централизованного контроля технологических объектов чаще всего встречается простой случай контроля, когда контролируемая величина сравнивается с уровнем, превышение которого является нарушением. Цель автоматического контроля заключается в обнаружении такого нарушения и выдаче сигнала о его наличии. В качестве основных характеристик процесса ошибки при дискретном контроле принято использовать среднюю частоту пропуска нарушения и среднюю частоту ложных тревог [1, 2]. Выбор частоты повторения алгоритма обработки информации при автоматическом дискретном контроле должен осуществляться по этим двум характеристикам ошибки, так как с увеличением периода обработки частота ложных тревог уменьшается, а частота пропуска нарушения растет. Имеющиеся оценки этих характеристик носят приближенный характер, а область их применения ограничивается классом дифференцируемых случайных процессов ошибки, для которого допустимо непосредственное использование результатов теории выбросов случайных процессов.

В настоящей статье делается дальнейшее обобщение этой задачи на случай недифференцируемых процессов ошибки дискретного контроля. С этой целью используется подход, основанный на вычислении характеристик процесса, получаемого из исходного контролируемого процесса путем интерполяции по дискретным отсчетам.

Частота пропуска нарушения. Рассмотрим влияние эффекта квантования по времени на частоту пропуска нарушения. В соответствии с [1] будем считать, что если сравнение случайного процесса $X(t)$ с некоторым уровнем C для обнаружения выхода процесса за уровень производится в дискретные моменты времени с периодом T , то выброс контролируемого процесса может быть пропущен, если его длительность $\tau < T$. Средняя частота пропуска выброса за уровень C $\mu_{01}(c)$ в этом случае может быть найдена из выражения

$$\mu_{01}(c) = \frac{1}{T} q(c), \quad (1)$$