

4. С. А. Понырко, И. В. Семушин. Построение обучающихся винеровских фильтров при ограниченном объеме априорной информации.— Изв. АН СССР. Сер. техническая кибернетика, 1971, № 5.
5. И. В. Семушин. Применение активной самонастройки в комплексной измерительной системе.— Автометрия, 1971, № 2.
6. Я. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
7. Sargent Burian, Belanger Pierre R. Identification of Optimal Filter Steady-State Gain for Systems With Unknown Noise Covariances.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, v. 18, N 6.
8. R. K. Mehra. Approaches to Adaptive Filtering.— IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, v. 17, N 5.
9. С. А. Понырко, И. В. Семушин. О выборе алгоритма начала — остановки при минимизации среднеквадратического критерия качества.— Автометрия, 1973, № 2.

Поступила в редакцию 16 июля 1974 г.

УДК 681.3.08

И. З. ЛИТВИН

(Харьков)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ОШИБКИ ПРИ ДИСКРЕТНОМ КОНТРОЛЕ

В системах централизованного контроля технологических объектов чаще всего встречается простой случай контроля, когда контролируемая величина сравнивается с уровнем, превышение которого является нарушением. Цель автоматического контроля заключается в обнаружении такого нарушения и выдаче сигнала о его наличии. В качестве основных характеристик процесса ошибки при дискретном контроле принято использовать среднюю частоту пропуска нарушения и среднюю частоту ложных тревог [1, 2]. Выбор частоты повторения алгоритма обработки информации при автоматическом дискретном контроле должен осуществляться по этим двум характеристикам ошибки, так как с увеличением периода обработки частота ложных тревог уменьшается, а частота пропуска нарушения растет. Имеющиеся оценки этих характеристик носят приближенный характер, а область их применения ограничивается классом дифференцируемых случайных процессов ошибки, для которого допустимо непосредственное использование результатов теории выбросов случайных процессов.

В настоящей статье делается дальнейшее обобщение этой задачи на случай недифференцируемых процессов ошибки дискретного контроля. С этой целью используется подход, основанный на вычислении характеристик процесса, получаемого из исходного контролируемого процесса путем интерполяции по дискретным отсчетам.

Частота пропуска нарушения. Рассмотрим влияние эффекта квантования по времени на частоту пропуска нарушения. В соответствии с [1] будем считать, что если сравнение случайного процесса $X(t)$ с некоторым уровнем C для обнаружения выхода процесса за уровень производится в дискретные моменты времени с периодом T , то выброс контролируемого процесса может быть пропущен, если его длительность $\tau < T$. Средняя частота пропуска выброса за уровень C $\mu_{01}(c)$ в этом случае может быть найдена из выражения

$$\mu_{01}(c) = \frac{1}{T} q(c), \quad (1)$$

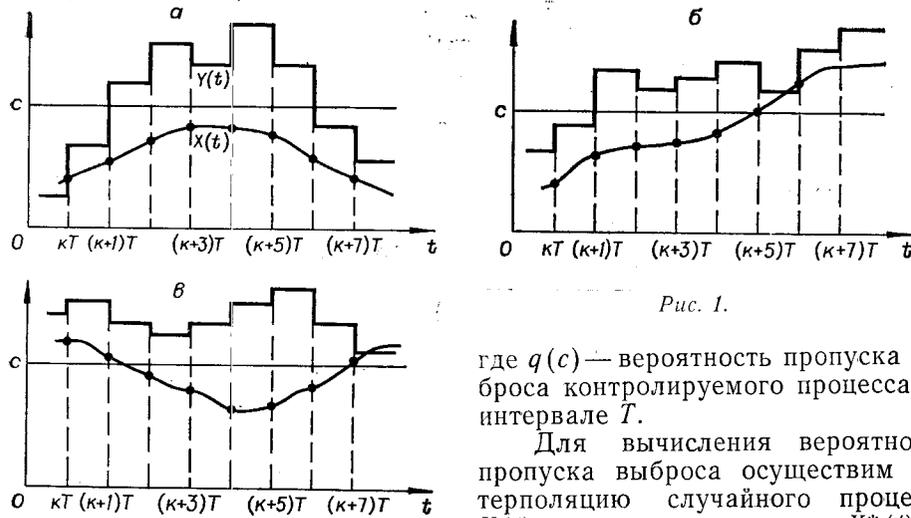


Рис. 1.

где $q(c)$ — вероятность пропуска выброса контролируемого процесса на интервале T .

Для вычисления вероятности пропуска выброса осуществим интерполяцию случайного процесса $X(t)$ некоторым процессом $X^*(t)$ по дискретным отсчетам процесса $X(kT)$. Способ интерполяции не оказывает влияния на интересующую нас характеристику, если на интервале T возможно только одно пересечение интерполированного процесса с уровнем C . Будем считать для определенности, что выполняется ступенчатая экстраполяция по текущему отсчету на весь период T до следующего отсчета, как показано на рис. 1.

Очевидно, что средняя частота выбросов интерполированного процесса $X^*(t)$ меньше средней частоты выбросов исходного контролируемого процесса $X(t)$ на величину, равную средней частоте пропущенных выбросов контролируемого процесса $\mu_{01}^n(c)$, т. е. имеет место зависимость

$$\mu_{01}^n(c) = \mu_{01}(c) - \mu_{01}^*(c). \quad (2)$$

Вычисление средней частоты выбросов исходного процесса за уровень C для дифференцируемых процессов решается в рамках теории выбросов случайных процессов и, в частности, для нормального стационарного процесса определяется известной формулой Райса

$$\mu_{01}(c) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R_0''} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{c - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}. \quad (3)$$

Вычислим теперь вероятность выброса $q_{01}(c)$ интерполированного процесса $X^*(t)$ на некотором произвольно выбранном интервале отсчета $(kT, kT+T)$:

$$q^*(c) = P\{X^*(kT) < c, X^*(kT+T) > c\}. \quad (4)$$

Если теперь ввести в рассмотрение двумерную плотность вероятностей ординат процесса $f(x_1, x_2)$, то вероятность выброса на интервале T выразится как

$$q^*(c) = \int_{-\infty}^c dx_1 \int_c^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2, \quad (5)$$

где $x_1 = x^*(t)$; $x_2 = x^*(t+T)$.

Теперь для частоты выбросов интерполированного процесса после подстановки (5) в (1) получим

$$\mu_{01}^n(c) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^c dx_1 \int_c^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2. \quad (6)$$

Для нормального стационарного процесса (6) принимает вид

$$\mu_{01}^*(c) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho(T^2)}} \int_{-\infty}^c dx_1 \int_c^{\infty} \exp\left\{\frac{x_1^2 - 2\rho(T)x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_x^2(1-\rho(T)^2)}\right\} dx_2. \quad (7)$$

Выражение (7) для практических расчетов удобно выразить через табулированную функцию Оуэна [3]:

$$\mu_{01}^*(c) = \frac{1}{T} 2\Gamma\left(\frac{c-m_x}{\sigma_x}, \sqrt{\frac{1-\rho(T)}{1+\rho(T)}}\right). \quad (8)$$

Отметим, что если устремить T к нулю, то (8) переходит в формулу Райса (3), а частота пропущенных выбросов стремится к нулю.

Для сравнения с результатами, приведенными в [1], вычислим условную вероятность пропуска нарушения

$$q_{01}(c) = \frac{\mu_{01}(c) - \mu_{01}^*(c)}{\mu_{01}(c)}. \quad (9)$$

В качестве примера на рис. 2 приведены сравнительные величины условной вероятности пропуска нарушения для однократно дифференцируемого случайного нормального процесса, имеющего корреляционную функцию вида

$$\rho(t) = \frac{4}{3}e^{-\alpha|t|} - \frac{1}{3}e^{-4\alpha|t|}.$$

Кривая 1 рассчитана по формуле

$$q_{01}(c) = 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{a(c)T} \left\{ \Phi[a(c)T] - \frac{1}{2} \right\}, \quad (10)$$

где

$$a(c) = \frac{(c-m_x)\sigma_x}{2\sigma_x^2}.$$

Кривая 2 — по формуле

$$q_{01}(c) = 1 - \frac{2\pi}{\alpha T} \exp\left\{\frac{(c-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \Gamma\left(\frac{c-m_x}{\sigma_x}, \sqrt{\frac{1-\rho(T)}{1+\rho(T)}}\right), \quad (11)$$

которая получена из (9) путем простых преобразований.

Из сравнения кривых 1 и 2 следует, что приближенное выражение (10) дает заниженное значение условной вероятности пропуска нарушения, особенно в области малых значений αT .

Частота ложных тревог. Будем рассматривать контролируемый случайный процесс $X(t)$, измеряемый в дискретные моменты времени kT . С ординатами процесса складываются в точках отсчета ординаты аддитивной приведенной ошибки $\psi(kT)$. Если теперь интерполировать ординаты полученного суммарного процесса

$$Y(kT) = X(kT) + \psi(kT)$$

любой неубывающей или невозрастающей функцией, то получим интер-

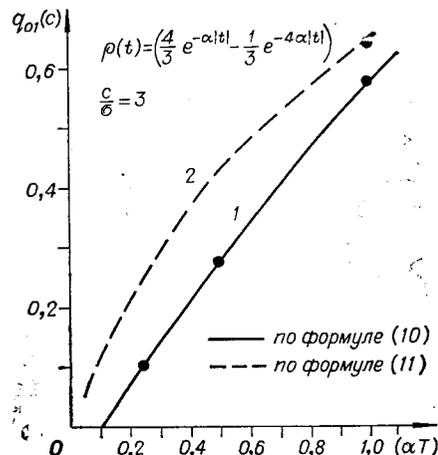


Рис. 2.

полированный процесс $Y(t)$. Назовем ложным такой отсчет процесса $Y(kT)$, когда выполняются условия

$$Y(kT) > c, X(kT) < c \text{ или } Y(kT) < c, X(kT) > c;$$

и будем считать ложным такой выброс интерполированного процесса $Y(t)$, когда за время существования выброса контролируемого процесса $X(t)$ все отсчеты окажутся ложными (см. рис. 1, а).

Вычислим вероятность ложного выброса. В общем случае для этого необходимо рассматривать всю совокупность отсчетов, составляющих выброс, а суммарная вероятность ложного выброса, состоящего из произвольного числа ложных отсчетов, выразится как

$$P_n^+(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^c dy_1 \int_c^{\infty} dy_2 \dots \int_c^{\infty} dy_{n+1} \int_{-\infty}^c dy_{n+2} \int_{-\infty}^c dx_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^c dx_{n+2} f(y_1, \dots, y_{n+2}, x_1 \dots x_{n+2}). \quad (12)$$

Так как вычисление по формуле (12) требует взятия бесконечно большого числа интегралов, найдем более простую оценку частоты ложных выбросов.

Вычислим вероятность $P_1(c)$ ложного пересечения уровня C интерполированным процессом $Y(t)$ с положительной производной (снизу вверх). Вероятность этого события на интервале T

$$P_1(c) = P\{Y(kT) < c, X(kT) < c, Y(kT+T) > c, X(kT+T) < c\}.$$

Однако ложное пересечение уровня C с положительной производной может привести к появлению как ложного выброса, показанного на рис. 1, а, так и к появлению истинного выброса интерполированного процесса, как это показано на рис. 1, б. Обозначим вероятность первого из них $P_a(c)$, а второго — $P_b(c)$, тогда

$$P_1(c) = P_a(c) + P_b(c). \quad (13)$$

Определим теперь вероятность $P_2(c)$ такого события, когда за ложным отсчетом, превышающим уровень C , последует истинный отсчет, превышающий уровень C :

$$P_2(c) = P\{Y(kT) > c, X(kT) < c, Y(kT+T) > c, X(kT+T) > c\}. \quad (14)$$

Из рис. 1, б, в нетрудно определить, что событие, описываемое вероятностью $P_2(c)$, может иметь место в каждом из этих случаев только один раз.

Если обозначить вероятность события, показанного на рис. 1, в, через P_c , то

$$P_2(c) = P_b(c) + P_c(c). \quad (15)$$

Решая совместно (13) и (15), исключим $P_b(c)$:

$$P_a(c) = P_1(c) - P_2(c) + P_c(c). \quad (16)$$

Величина $P_c(c)$ представляет собой вероятность пропуска отрицательного выброса за уровень C в результате ошибки $\psi(kT)$ и ею можно пренебречь. Этот результат непосредственно следует из теории выбросов случайных процессов, так как для дифференцируемых случайных процессов при высоком уровне $C (c \geq 3\sigma)$ в окрестностях выброса может находиться только один максимум [4]. Следовательно, для представляющих практический интерес случаев высокого уровня относительно

мала вероятность появления небольшого отрицательного выброса между двумя максимумами процесса, тем более мала вероятность потери такого выброса.

Обозначим вероятность ложного положительного выброса интерполированного процесса $Y(t)$ за уровень C на интервале T через $P_{л}^+(c)$ и в соответствии с (16) получим

$$P_{л}^+(c) = P_1(c) - P_2(c). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение четырехмерную совместную плотность вероятностей ординат процесса и ошибки, тогда из (17) получим

$$P_{л}^+(c) = \int_{-\infty}^c dx_1 \int_{-\infty}^c dx_2 \int_{c-x_1}^{\infty} d\psi_1 \int_{-\infty}^{c-x_2} f(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) d\psi_2 - \\ - \int_c^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^c dx_2 \int_{c-x_1}^{\infty} d\psi_1 \int_{c-x_2}^{\infty} f(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) d\psi_2. \quad (18)$$

Выражение (18) упрощается, если принять гипотезу о независимости контролируемого процесса и ошибки, как это часто имеет место на практике. В этом случае четырехмерная плотность вероятностей распадается на две двумерные, а для вычисления частоты ложных выбросов по формуле

$$\mu_{10}(c) = \frac{1}{T} P_{л}^+(c),$$

например для стационарного нормального процесса, достаточно иметь дисперсию процесса и ошибки и коэффициент корреляции на интервале квантования по времени.

Верхняя оценка величины $\mu_{01}(c)$ может быть получена, если считать ординаты ошибки некоррелированными. В этом случае вероятность того, что ложный выброс будет состоять более чем из одного ложного превышения уровня, относительно мала. При этих условиях для нормально-го процесса получим верхнюю оценку частоты ложных выбросов для нормального процесса в виде

$$\mu_{01}(c) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[\int_{-\infty}^{c/\sigma_x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \left[1 + \Phi\left(\frac{c-x}{\sqrt{2}\sigma_\psi}\right)\right] dx - \right. \\ \left. - \int_{c/\sigma_x}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \left[1 + \Phi\left(\frac{c-x}{\sqrt{2}\sigma_\psi}\right)\right] dx \right].$$

Заключение. Применение метода вычисления характеристик интерполированного случайного процесса позволяет в общем случае для недифференцируемого процесса ошибки получить расчетные соотношения для средней частоты пропуска нарушения и ложной тревоги при дискретном контроле.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Шенброт. Оценка эффективности автоматического контроля процессов.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 7.
2. И. М. Шенброт, М. Я. Гинзбург. Расчет точности систем централизованного контроля. М., «Энергия», 1970.
3. Н. В. Смирнов, Л. Н. Большов. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М., Изд. ВЦ АН СССР, 1962.
4. В. И. Тихонов. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию 19 сентября 1972 г.