

И. И. КОРШЕВЕР

(Новосибирск)

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОЛЬШИХ МАССИВОВ

Недостатком алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) в их наиболее распространенных формах [1] является необходимость организации вычислительной процедуры с обращением к произвольному адресу памяти. Этот недостаток не позволяет, например, непосредственно использовать в этих целях неоперативные запоминающие устройства, пригодные, как правило, лишь к последовательному обращению (цифровые магнитофоны, память на сдвиговых регистрах, магнитные барабаны и диски *). Особенно это ощутимо при обработке числовых массивов, размер которых превышает объем оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) вычислителя (ЭВМ или специализированного вычислительного устройства). Это актуально, например, в задачах полосовой цифровой фильтрации ** [2], в спектроскопии высокого разрешения [3], в многомерном Фурье-анализе [4, 5].

Существует, однако, прием, позволяющий уменьшить эти неудобства. Основным содержанием этого приема является упорядочение операндов между итерациями с помощью их перестановки таким образом, чтобы обращение к памяти в каждой итерации стало последовательным. Поскольку алгоритм БПФ есть поэтапное Фурье-преобразование векторов многомерного массива [1], то переупорядочение, приводящее к последовательному обращению, определяется как транспонирование таблиц, являющихся сечениями этого массива в одном из его измерений, столбцы (строки) которых подвергаются на данном этапе Фурье-преобразованию.

Впервые в алгоритмы БПФ поитеративные перестановки были введены в [6]. С появлением алгоритма БПФ по основанию 2^k [7] было предложено сократить число итераций системного уровня при реализации БПФ по сравнению с [6] при помощи процессора, выполняющего Фурье-преобразование над подмассивом из 2^k операндов без промежуточного обращения к памяти с последовательным обращением (ППО). Необходимое число циклов рециркуляции ППО при этом сокращается, однако значительно возрастает оборудование [8].

В данной работе проанализированы известные способы реализации БПФ больших массивов, основанные на транспонировании двумерных таблиц, и описан алгоритм с позонным переупорядочением массивов, в котором, используя поблочное транспонирование, удастся значительно сократить время, необходимое для переупорядочения. Этот алгоритм не противопоставляется известным — он позволяет лишь повысить их эффективность и сэкономить необходимое для их реализации оборудование.

Алгоритм дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с поитеративными перестановками. Пусть $\|F(r_{n-1} \dots r_p r_{p-1} \dots r_0)\|$ — ДПФ от последовательности из $N=2^n$ чисел $\|f(k_{n-1} \dots k_{n-p} k_{n-p-1} \dots k_0)\|$, а $\|A(r_{p-1} \dots r_0 r_{n-1} \dots r_p)\|$ — последовательность коэффициентов ДПФ, полученная

* Последние два устройства, в принципе, могут быть использованы и как память с обращением к произвольному адресу. Цикл такого обращения в этом случае, однако, весьма велик, и непосредственное использование этой возможности для реализации классических алгоритмов БПФ больших массивов крайне неэффективно.

** Имеется в виду по меньшей мере инфранизкочастотный диапазон, где полосовая фильтрация с использованием обычных аналоговых средств затруднительна.

из исходной путем переупорядочения их номеров следующим образом:

$$\|F(r_{n-1} \dots r_p r_{p-1} \dots r_0)\| = P_n^p \|A(r_{p-1} \dots r_0 r_{n-1} \dots r_p)\|,$$

где

$$P_n^p = \|a_{ij}\| = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \xrightarrow{2^{n-p}} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

— перестановочная матрица порядка N , в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=r_{n-1} \dots r_p r_{p-1} \dots r_0, \ j=r_{p-1} \dots r_0 r_{n-1} \dots r_p; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда ДПФ может быть осуществлено таким образом [1]:

$$\|F_n(r_{n-1} \dots r_0)\| = P_n^p (E_p \times \Phi_{n-p}) D (\Phi_p \times E_{n-p}) \|f(k_{n-1} \dots k_0)\|, \quad (1a)$$

где E_{n-p} , E_p — единичные матрицы порядка 2^{n-p} и 2^p соответственно; Φ_{n-p} , Φ_p — матрицы Фурье-коэффициентов порядка 2^{n-p} , 2^p соответственно;

$$D = \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{p-1} r_{p-1} + \dots + 2^0 r_0) (2^{n-p-1} k_{n-p-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] \right\|$$

— диагональная матрица порядка N ; \times — символ кронекеровского произведения ($A \times B = \|a_{ij} B\|$ [9]).

Выражение (1a) можно интерпретировать как преобразование двумерной таблицы $\|f(k_{n-1} \dots k_{n-p}, k_{n-p-1} k_0)\|$ размером $2^{n-p} \times 2^p$ [1]. На первом этапе осуществляется ДПФ ее столбцов:

$$\|A(r_{p-1} \dots r_0, \chi_{n-p-1} \dots \chi_0)\| = \Phi_p \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p}, \chi_{n-p-1} \dots \chi_0)\|, \quad (1б)$$

а на втором — строк предварительно взвешенных промежуточных результатов:

$$\|A(\rho_{p-1} \dots \rho_0, r_{n-1} \dots r_0)\| = \Phi_{n-p} \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{p-1} r_{p-1} + \dots + 2^0 r_0) (2^{n-p-1} k_{n-p-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] A(\rho_{p-1} \dots \rho_0, k_{n-p-1} \dots k_0) \right\|, \quad (1в)$$

где $\{\rho_i\}$ и $\{\chi_i\}$ — зафиксированные значения переменных $\{r_i\}$ и $\{k_i\}$ (выражения (1б) и (1в) описывают преобразование единственного столбца и строки соответственно). На рис. 1 изложенная процедура иллюстрируется преобразованием последовательности из 4 чисел (a — представленной в виде таблицы 2×2 , b — в виде вектор-столбца). Здесь

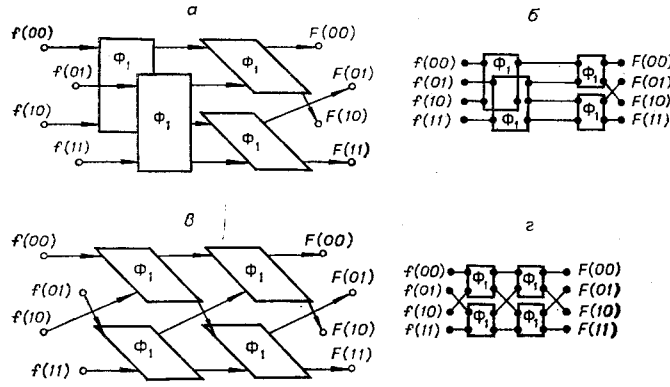


Рис. 1.

и дальше для упрощения опущены экспоненциальные комплексные коэффициенты, на которые множатся результаты между итерациями.

Поскольку предполагается, что операторы $\Phi_{n-p}(\Phi_p)$ реализуются с помощью алгоритма БПФ, то здесь использована частотно-временная индексация операндов, при которой каждому временному индексу в правой стороне преобразования соответствует частотный индекс в левой его стороне [1]. Предполагается также, что двоично-инвертированная последовательность индексов, образующаяся в результате такого преобразования и соответственно такой индексации, упорядочена в самом операторе $\Phi_{n-p}(\Phi_p)$.

Очевидно, что в (1б) обращение к операндам $\|f(k_{n-1} \dots k_{n-p} \chi_{n-p-1} \dots \chi_0)\|$ станет последовательным, если преобразованный в (1а) вектор-столбец представляет собой таблицу, полученную из исходной путем ее транспонирования:

$$\|f'(\chi_{n-p-1} \dots \chi_0 k_{n-1} \dots k_{n-p})\| = P_n^p \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p} \chi_{n-p-1} \dots \chi_0)\|,$$

где P_n^p определена выше; таким образом, P_n^p транспонирует таблицу размером $2^{n-p} \times 2^p$, представленную в виде вектор-столбца.

Учитывая необходимость осуществить повторное (или, что все равно, обратное [9]) транспонирование результатов первого этапа (1б) перед осуществлением второго его этапа (1в), выражение (1а) можно преобразовать таким образом:

$$\|F(r_{n-1} \dots r_0)\| = P_n^p (E_p \times \Phi_{n-p}) D P_n^p (E_{n-p} \times \Phi_p) P_n^p \|f(k_{n-1} \dots k_0)\|. \quad (2a)$$

Здесь по сравнению с (1а)

$$P_n^{n-p} (E_{n-p} \times \Phi_p) P_n^p = \Phi_p \times E_{n-p}, \quad (2б)$$

что может быть интерпретировано как двукратное транспонирование трехмерной матрицы $(\Phi_p \times E_{n-p})$, не изменяющее в результате ее положения в пространстве.

В общем случае для $N = 2^{km}$

$$\|F(r_0 \dots r_{m-1})\| = \prod_{i=1}^m (E_{k(m-1)} \times \Phi_k) D_i P_{km}^k \|f(k_{m-1} \dots k_0)\|,$$

где $\{r_0 \dots r_{m-1}\}$ и $\{k_{m-1} \dots k_0\}$ — номера полученной и преобразованной последовательностей, выраженные в коде 2^k ;

$$D_i = \left\| \exp \left[\frac{2\pi}{N} (2^{k(i-2)} r_{i-2} + \dots + 2^0 r_0) 2^{k(m-i)} k_{m-i} \right] \right\|$$

— диагональная матрица. Для $k=1$ получим алгоритм Синглтона [6]

$$\|F(r_0 \dots r_{n-1})\| = \prod_{i=1}^n (E_{n-1} \times C) D_i P_n^1 \|f(k_{n-1} \dots k_0)\|, \quad (2в)$$

где

$$C = \Phi_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Алгоритм (2в) можно интерпретировать как m -этапное преобразование m -мерной таблицы с транспонированием одного ее сечения на каждом этапе.

На рис. 1, в алгоритм (2а) проиллюстрирован с помощью БПФ-таблицы размером 2×2 , а на рис. 1, г то же преобразование представлено в виде графа для вектор-столбца из 4 чисел.

Поблочное транспонирование матрицы. В отличие от ОЗУ в ППО таблица может храниться только в виде вектора, и, следовательно, транспонирование таблицы размером $2^{n-p} \times 2^p$, вообще говоря, требует 2^{n-p} циклов рециркуляции ППО, на каждом из которых формируется один ее столбец. Естественно стремление уменьшить число циклов, осуществляя переупорядочение операндов в ППО позонно. Такой операции соответствует поблочное транспонирование матрицы, при котором на одном из этапов производится транспонирование номеров блока матрицы, а на другом — транспонирование самих блоков с помощью ОЗУ.

Порядок разбиения таблицы на блоки определяется при этом размерами таблицы и возможностями используемой системы. Пусть $n-p > p$, тогда матрицу удобно представить в виде $2^a \times 2^p$ блоков, каждый размер $2^a \times 2^p$ (рис. 2, а):

$$\|f(k_{n-1} \dots k_{n-p}, k_{n-p-1} \dots k_a k_{a-1} \dots k_0)\|$$

Транспонированию номеров ее блоков $\{k_{n-p-1} \dots k_a\}$ соответствует следующее преобразование вектора:

$$\begin{aligned} & \|f(k_{n-p-1} \dots k_a k_{n-1} \dots k_{n-p}, k_{a-1} \dots k_0)\| = \\ & = (P_{n-a}^p \times E_a) \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p}, k_{n-p-1} \dots k_a k_{a-1} \dots k_0)\|. \end{aligned}$$

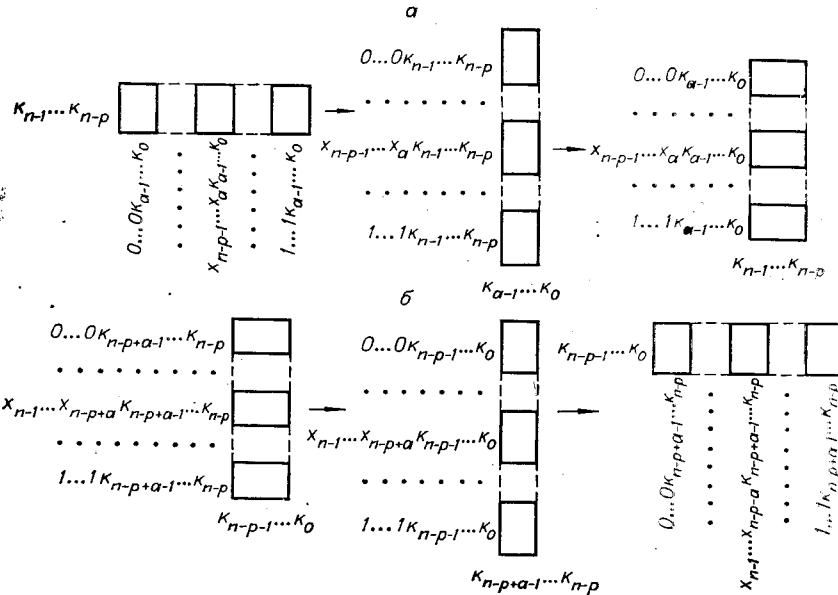


Рис. 2.

Это означает, что подпоследовательность $\|f(\chi_{n-1} \dots \chi_{n-p} \chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{a-1} \dots k_0)\|$ при переупорядочении сохраняет вид единого блока размером 2^a .

Транспонированию блоков $\|f(\chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{n-1} \dots k_{n-p} k_{a-1} \dots k_0)\|$ полученной матрицы соответствует преобразование

$$\begin{aligned} & \|f(k_{n-p-1} \dots k_a k_{a-1} \dots k_0 k_{n-1} \dots k_{n-p})\| = \\ & = (E_{n-p-a} \times P_{p+a}^p) \|f(k_{n-p-1} \dots k_a k_{n-1} \dots k_{n-p} k_{a-1} \dots k_0)\|. \end{aligned}$$

Это означает, что подпоследовательность $\|f(\chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{n-1} \dots k_{n-p} k_{a-1} \dots k_0)\|$ переупорядочивается в $\|f(\chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{a-1} \dots k_0 k_{n-1} \dots k_{n-p})\|$ в пределах единого блока размером 2^{p+a} :

$$\begin{aligned} & \|f(\chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{a-1} \dots k_0 k_{n-1} \dots k_{n-p})\| = \\ & = P_{p+a}^a \|f(\chi_{n-p-1} \dots \chi_a k_{n-1} \dots k_{n-p} k_{a-1} \dots k_0)\|. \end{aligned}$$

Следовательно, для двухэтапной реализации перестановки

$$P_n^p = (E_{n-p-a} \times P_{p+a}^p) (P_{n-a}^p \times E_a) \quad (3a)$$

необходимо иметь ППС, объем зоны которой 2^a , и ОЗУ, объем которого 2^{p+a} .

Пусть теперь $p > n-p$; тогда исходную матрицу удобно представить в виде блочной матрицы размером $2^{p-a} \times 2^a$ из блоков размером $2^a \times 2^{n-p}$ (см. рис. 2, б):

$$\|f(k_{n-1} \dots k_{n-p+a} k_{n-p+a-1} \dots k_p, k_{p-1} \dots k_0)\|.$$

Транспонированию ее блоков $\|f(\chi_{n-1} \dots \chi_{n-p+a} k_{n-p+a-1} \dots k_{n-p}, k_{n-p-1} \dots k_0)\|$ соответствует переупорядочение вектора следующим образом:

$$\begin{aligned} & \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p+a}, k_{n-p-1} \dots k_0 k_{n-p+a-1} \dots k_{n-p})\| = \\ & = (E_{p-a} \times P_{n-p+a}^a) \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p+a} k_{n-p+a-1} \dots k_{n-p} k_{n-p-1} \dots k_0)\|, \\ & \text{а номерам этих блоков } \{k_{n-1} \dots k_{n-p+a}\} \text{ — преобразование} \\ & \|f(k_{n-p-1} \dots k_0 k_{n-1} \dots k_{n-p})\| = \\ & = (P_{n-a}^{p-a} \times E_a) \|f(k_{n-1} \dots k_{n-p+a} k_{n-p-1} \dots k_0 k_{n-p+a-1} \dots k_{n-p})\|. \end{aligned}$$

Для реализации перестановки

$$P_n^p = (P_{n-a}^{p-a} \times E_a) (E_{p-a} \times P_{n-(p-a)}^a) \quad (36)$$

необходимы зона ППС объемом 2^a и ОЗУ объемом 2^{n-p+a} .

Следует отметить, что матричные сомножители разложения P_n^p в обоих случаях неперестановочны.

На рис. 3 представлены графы, иллюстрирующие перестановки для $n=5$ и $p=2$:

$$P_5^2 = (E_1 \times P_4^2) (P_3^2 \times E_2) \quad \text{для } a=2;$$

$$P_5^2 = (P_4 \times E_1) (E_1 \times P_4^1) \quad \text{для } a=1.$$

Алгоритм ДПФ с позонным переупорядочением. А. ДПФ одномерных массивов. Пусть $n=2m$ и $p=m$. Тогда

$$P_{2m}^m = (E_{m-a} \times P_{m+a}^{-a}) (P_{2m-a}^m \times E_a) = (P_{2m-a}^{-m} \times E_a) (E_{m-a} \times P_{m+a}^a), \quad (4a)$$

а выражение (2a) принимает вид

$$\|F(r_{2m-1} \dots r_0)\| = P_{2m}^m (E_m \times \Phi_m) D P_{2m}^m (E_m \times \Phi_m) P_{2m}^m \|f(k_{2m-1} \dots k_0)\|, \quad (46)$$

где

$$D = \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{m-1} r_{m-1} + \dots + 2^0 r_0) (2^{m-1} k_{m-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] \right\|,$$

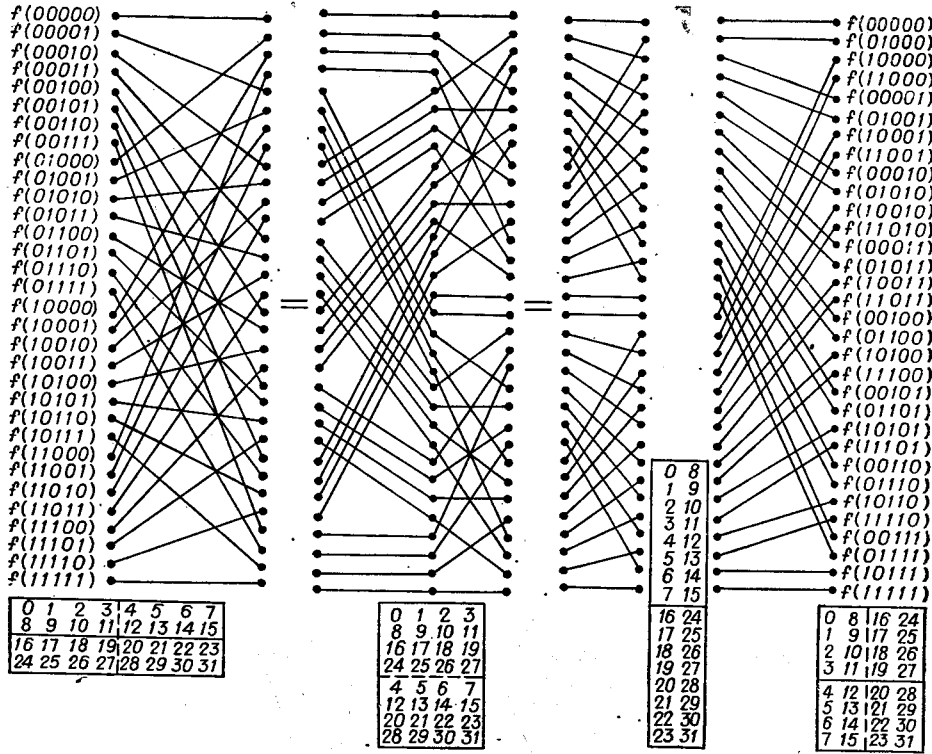


Рис. 3.

или по итерациям:

$$\left\{ \begin{aligned} \|f'(\chi_{m-1} \dots \chi_a k_{2m-1} \dots k_m k_{a-1} \dots k_0)\| &= \\ &= \|f(k_{2m-1} \dots k_m \chi_{m-1} \chi_a k_{a-1} \dots k_0)\|, \\ \|A_1(\chi_{m-1} \dots \chi_a k_{a-1} \dots k_0 r_{m-1} \dots r_0)\| &= \\ &= (E_a \times \Phi_m) P_{m+a}^m \|f'(\chi_{m-1} \dots \chi_a k_{2m-1} \dots k_m k_{a-1} \dots k_0)\|; \end{aligned} \right. \quad (4B)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_1'(\rho_{m-1} \dots \rho_a k_{m-1} \dots k_0 r_{a-1} \dots r_0) &= \\ &= \|A(k_{m-1} \dots k_0 \rho_{m-1} \dots \rho_a r_{a-1} \dots r_0)\|, \\ A_2(\rho_{m-1} \dots \rho_a r_{a-1} \dots r_0 r_{2m-1} \dots r_m) &= \\ &= (E_a \times \Phi_m) D' P_{m+a}^m \|A_1'(\rho_{m-1} \dots \rho_a k_{m-1} \dots k_0 r_{a-1} \dots r_0)\|, \\ \text{где } D' &= \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{m-1} \rho_{m-1} + \dots + 2^a \rho_a + 2^{a-1} r_{a-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + 2^0 r_0) (2^{m-1} k_{m-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] \right\|; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \|F'(\rho_{2m-1} \dots \rho_{m+a} r_{m-1} \dots r_0 r_{m+a-1} \dots r_m)\| &= \\ &= \|F(r_{m-1} \dots r_0 \rho_{2m-1} \dots \rho_{m+a} r_{2m+a-1} \dots r_m)\|, \\ \|F(\rho_{2m-1} \dots \rho_{m+a} r_{m+a-1} \dots r_0)\| &= \\ &= P_{m+a}^m \|F'(\rho_{2m-1} \dots \rho_{m+a} r_{m-1} \dots r_0 r_{m+a-1} \dots r_m)\|. \end{aligned} \right.$$

На рис. 4, а приведен граф, иллюстрирующий прохождение сигнала при реализации алгоритма ДПФ для массива из 16 чисел с переупорядочением одним словом, а на рис. 4, б — с использованием зоны ППО

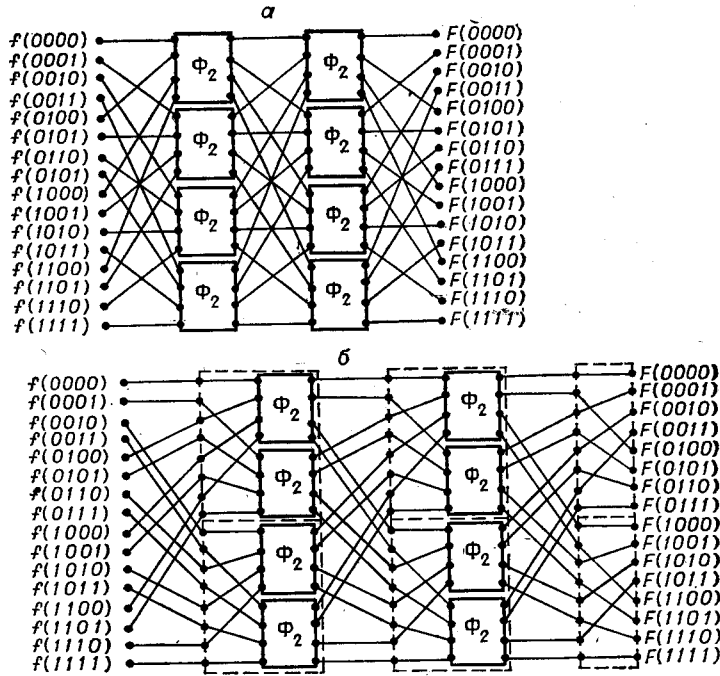


Рис. 4.

из 2 слов и ОЗУ объемом из 8 слов. При таких условиях

$$\|F(r_3 r_2 r_1 r_0)\| = P_4^2 (E_2 \times \Phi_2) \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{16} (2r_1 + r_0) (2k_1 + k_0) \right] \right\| \\ P_4^2 (E_2 \times \Phi_2) P_4^2 \|f(k_3 k_2 k_1 k_0)\|,$$

где

$$P_4^2 = (E_1 \times P_3^2) (P_3^2 \times E_1),$$

или по итерациям:

$$\begin{cases} \|f'(\chi_1 k_3 k_2 k_0)\| = \|f(k_3 k_2 \chi_1 k_0)\|, \\ \|A_1(\chi_1 k_0 r_1 r_0)\| = (E_1 \times \Phi_2) P_3^2 \|f'(\chi_1 k_3 k_2 k_0)\|; \\ \|A_1'(\rho_1 k_1 k_0 r_0)\| = \|A_1(k_1 k_0 \rho_1 r_0)\|, \\ \|A_2(\rho_1 r_0 r_3 r_2)\| = (E_1 \times \Phi_2) \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{16} (2\rho_1 + r_0) (2k_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + k_0) \right] \right\| P_3^2 \|A_1'(\rho_1 k_1 k_0 r_0)\|; \\ \|F_1'(\rho_3 r_1 r_0 r_2)\| = \|A_2(r_1 r_0 \rho_3 r_2)\|, \\ \|F(\rho_3 r_2 r_1 r_0)\| = P_3^2 \|F_1'(\rho_3 r_1 r_0 r_2)\|. \end{cases}$$

Если n нечетно, то его удобно представить в виде $n=2m+a$, где a нечетно. Тогда (2а) преобразуется так:

$$\|F(r_{n-1} \dots r_0)\| = P_n^m (E_m \times \Phi_{n-m}) D P_n^{-m} (E_{n-m} \times \\ \times \Phi_m) P_n^m \|f(k_{n-1} \dots k_0)\|, \quad (5a)$$

где

$$D = \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{m-1} r_{m-1} + \dots + 2^0 r_0) (2^{m+a-1} k_{m+a-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] \right\|$$

и в соответствии с (3а) и (3б)

$$P_n^m = (E_m \times P_{m+a}^m) (P_{2m}^m \times E_a),$$

$$P_n^{-m} = P_n^{n-m} = (P_{2m}^{m+a} \times E_a) (E_m \times P_{m+a}^a) = (P_{2m}^{m+a} \times E_a) (E_m \times P_{m+a}^{-m}),$$

ибо

$$P_n^{n-m} = P_n^{m+a}, \quad P_{m+a}^a = P_{m+a}^{a-(m+a)} = P_{m+a}^{-m}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|F(r_{n-1} \dots r_0)\| &= (E_m \times P_{m+a}^m) (P_{2m}^m \times E_a) (E_m \times \Phi_{m+a}) (P_{2m}^m \times \\ &\times E_a) (E_m \times P_{m+a}^{-m}) (E_m \times E_a \times \Phi_m) (E_m \times P_{m+a}^m) (P_{2m}^m \times \\ &\times E_a) \|f(k_{n-1} \dots k_0)\| = (E_m \times P_{m+a}^m) (P_{2m}^m \times E_a) (E_m \times \\ &\times \Phi_{m+a}) (P_{2m}^m \times E_a) [E_m \times (\Phi_m \times E_a)] (P_{2m}^m \times E_a) \|f(k_{n-1} \dots k_0)\|, \end{aligned} \quad (5б)$$

ибо

$$\begin{aligned} (E_m \times P_{m+a}^{-m}) [E_m \times (E_a \times \Phi_m)] (E_m \times P_{m+a}^m) &= \\ = E_m \times P_{m+a}^{-m} (E_a \times \Phi_m) P_{m+a}^m &= E_m \times (\Phi_m \times E_a). \end{aligned}$$

Здесь использовано $E_{m+a} = E_m \times E_a$, $(A \times B) (C \times D) (E \times F) = ACE \times BDF$, $E_m E_m E_m = E_m$ [9] и в соответствии с (2б)

$$P_{m+a}^{-m} (E_a \times \Phi_m) P_{m+a}^m = \Phi_m \times E_a.$$

Поитеративно (5б) имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \|f'(\chi_{m+a-1} \dots \chi_a k_{n-1} \dots k_{m+a} k_{a-1} \dots k_0)\| &= \\ = \|f(k_{n-1} \dots k_{m+a} \chi_{m+a-1} \dots \chi_a k_{a-1} \dots k_0)\|, \\ \|A_1(\chi_{m+a-1} \dots \chi_a r_{m-1} \dots r_0 k_{a-1} \dots k_0)\| &= \\ = (\Phi_m \times E_a) \|f'(\chi_{m+a-1} \dots \chi_a k_{n-1} \dots k_{m+a} k_{a-1} \dots k_0)\|; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \|A_1'(\rho_{m-1} \dots \rho_0 k_{m+a-1} \dots k_a k_{a-1} \dots k_0)\| &= \\ = \|A_1(k_{m+a-1} \dots k_a \rho_{m-1} \dots \rho_0 k_{a-1} \dots k_0)\|, \\ \|A_2(\rho_{n-1} \dots \rho_0 r_{n-1} \dots r_m)\| &= \Phi_{m+a} D \|A_1'(\rho_{m-1} \dots \rho_0 k_{m+a-1} \dots k_0)\|, \\ \text{где } D &= \left\| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (2^{m-1} \rho_{m-1} + \dots + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2^0 \rho_0) (2^{m+a-1} k_{m+a-1} + \dots + 2^0 k_0) \right] \right\|; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \|A_2'(\rho_{n-1} \dots \rho_{m+a} r_{m-1} \dots r_0 r_{m+a-1} \dots r_m)\| &= \\ = \|A_2(r_{m-1} \dots r_0 \rho_{n-1} \dots \rho_{m+a} r_{m+a-1} \dots r_m)\|, \\ \|F(\rho_{n-1} \dots \rho_{m+a} r_{m+a-1} \dots r_m r_{m-1} \dots r_0)\| &= \\ = P_{m+a}^m \|A_2'(\rho_{n-1} \dots \rho_{m+a} r_{m-1} \dots r_0 r_{m+a-1} \dots r_m)\|. \end{aligned} \right.$$

Следует отметить, что алгоритм (5б) в равной степени пригоден и для четных n .

На рис. 5 приведен граф, иллюстрирующий ДПФ по алгоритму (5а÷5в) для $n=3$, $m=1$, $a=1$:

$$\begin{aligned} \|F(r_2 r_1 r_0)\| &= (E_2 \times P_2^1) (P_2^1 \times E_2) (E_2 \times \Phi_2) \left\| \exp \left(-j \frac{2\pi}{8} r_0 (2k_1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + k_0) \right) \right\| (P_2^1 \times E_2) [E_2 \times (\Phi_1 \times E_2)] (P_2^1 \times E_2) \|f(k_2 k_1 k_0)\| \end{aligned}$$

или поитеративно:

$$\begin{cases} \|f'(\chi_1 k_2 k_0)\| = \|f(k_2 \chi_1 k_0)\|, \\ \|A_1(\chi_1 r_0 k_0)\| = (\Phi_1 \times E_2) \|f'(\chi_1 k_2 k_0)\|; \\ \left\{ \begin{aligned} \|A_1(\rho_0 k_1 k_0)\| &= \|A_1(k_1 \rho_0 k_0)\|, \\ \|A_2(\rho_0 r_2 r_1)\| &= \Phi_2 \left\| \exp\left(-j \frac{2\pi}{8} \rho_0 (2k_1 + k_0)\right) \right\| \|A_1(\rho_0 k_1 k_0)\|; \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \|A_2(\rho_2 r_0 r_1)\| &= \|A_2(r_0 \rho_2 r_1)\|, \\ \|F(\rho_2 r_1 r_0)\| &= P_2^1 \|A_2^1(\rho_2 r_0 r_1)\|. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Подставляя (3а) и (3б) в (2в), получим для более чем двух итераций

$$\|F(r_0 \dots r_{m-1})\| = \prod_{i=1}^m [E_{n-(k+a)} \times (E_a \times \Phi_k)] D_i (P_{n-a}^k \times E_a) \|f(k_{m-1} \dots k_0)\|. \quad (5в)$$

Мы не останавливаемся более подробно на этом общем случае, так как, на наш взгляд, две итерации системного уравнения удовлетворяют большинству возможных задач (почти всегда можно обеспечить $b > k+a$, где 2^b — объем ОЗУ, 2^a — объем зоны ППО, 2^k — объем подмассива, поступающего на вход оператора БПФ).

Б. ДПФ двумерных массивов. При ДПФ двумерных числовых массивов

$$\begin{aligned} \|F(r_{m-1}^i \dots r_0^i, r_{m-1}^j \dots r_0^j)\| &= \\ &= \Phi_m \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, \\ & \quad k_{m-1}^j \dots k_0^j)\| \Phi_m, \quad (6) \end{aligned}$$

где $\|F(r_{m-1}^i \dots r_0^i, r_{m-1}^j \dots r_0^j)\|$ и $\|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\|$ — соответственно преобразованные и преобразуемые матрицы порядка 2^m [4, 5]. Если эти матрицы представлены в виде вектор-столбцов, для чего необходимо транспонировать их строки, то (6) преобразуется таким образом:

$$\begin{aligned} \|F(r_{m-1}^i \dots r_0^i, r_{m-1}^j \dots r_0^j)\| &= (E_m \times \Phi_m) (\Phi_m \times \\ & \times E_m) \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\| = (\Phi_m \times \Phi_m) \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\| = \\ &= (\Phi_m \times E_m) (E_m \times \Phi_m) \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\|, \quad (7а) \end{aligned}$$

где $(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$, а также $EA = AE = A$ [9].

Используя (2б) и (4а), (7а) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \|F(r_{m-1}^i \dots r_0^i, r_{m-1}^j \dots r_0^j)\| &= P_{2^m}^m (E_m \times P_m) P_{2^m}^m (E_m \times \\ & \times \Phi_m) \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\| = (P_{2^m-a}^{-m} \times E_a) [E_{m-a} \times (\Phi_m \times \\ & \times E_a)] (P_{2^m-a}^m \times E_a) (E_m \times \Phi_m) \|f(k_{m-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\| \quad (7б) \end{aligned}$$

или поитеративно:

$$\begin{aligned} \|A(\chi_{m-1}^i \dots \chi_a^i k_{a-1}^i \dots k_0^i, r_{m-1}^j \dots r_0^j)\| &= (E_a \times \\ & \times \Phi_m) \|f(\chi_{m-1}^i \dots \chi_a^i k_{a-1}^i \dots k_0^i, k_{m-1}^j \dots k_0^j)\|, \end{aligned}$$

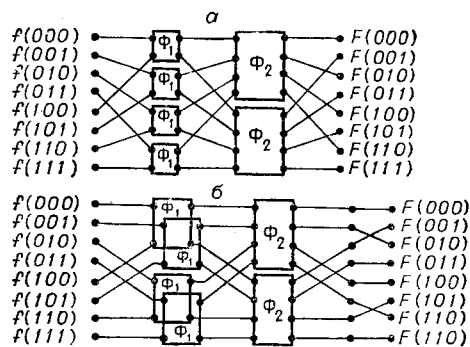


Рис. 5.

$$\begin{aligned} & \|A'(\rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i k_{m-1}^i \dots k_a^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\| = \\ & = \|A(k_{m-1}^i \dots k_0^i \rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\|, \\ & \|F^1(\rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i r_{m-1}^i \dots r_0^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\| = (\Phi_m \times \\ & \times E_a) \|A'(\rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i k_{m-1}^i \dots k_0^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\|, \\ & \|F(r_{m-1}^i \dots r_0^i \rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\| = \|F^1(\rho_{m-1}^i \dots \rho_a^i r_{m-1}^i \dots r_0^i r_{a-1}^i \dots r_0^i)\|. \end{aligned}$$

На рис. 5, а приведен граф, иллюстрирующий ДПФ числового двумерного массива размером 4×4 с помощью упорядочения одним словом, а на рис. 5, б — двумя словами:

$$\begin{aligned} \|F(r_i^i r_0^i r_i^i r_0^i)\| &= (P_3^{-2} \times E_1) [E_1 \times (\Phi_2 \times E_1)] (P_3^2 \times \\ & \times E_1) (E_2 \times \Phi_2) \|f(k_i^i k_0^i k_i^i k_0^i)\| \end{aligned}$$

или поитеративно:

$$\begin{aligned} \|A(\chi_i^i k_0^i r_i^i r_0^i)\| &= (E_1 \times \Phi_2) \|f(\chi_i^i k_0^i k_i^i k_0^i)\|, \\ \|A'(\rho_i^i k_i^i k_0^i r_0^i)\| &= \|A(k_i^i k_0^i \rho_i^i r_0^i)\|, \\ \|F(\rho_i^i r_i^i r_0^i r_0^i)\| &= (\Phi_2 \times E_1) \|A'(\rho_i^i k_i^i k_0^i r_0^i)\|, \\ \|F(r_i^i r_0^i \rho_i^i r_0^i)\| &= \|F'(\rho_i^i r_i^i r_0^i r_0^i)\|. \end{aligned}$$

Практические рекомендации. Переупорядочение последовательности, хранящейся в одном комплекте ППО, требует столько циклов ее рециркуляции, сколько столбцов в исходной таблице: для формирования каждой строки транспонированной матрицы необходим отдельный цикл рециркуляции ППО. Если таблица близка к квадратной, то такая процедура переупорядочения становится непомерно громоздкой.

Стремление ускорить процесс переупорядочения выразилось [6, 8] в распараллеливании комплектов ППО так, что каждый столбец таблицы до транспонирования располагается в отдельном комплекте и форми-

рование столбца транспонированной таблицы происходит путем общего сдвига всех комплектов ППО на один шаг. Если строка исходной таблицы велика, то количество оборудования, необходимого для ее транспонирования по такой схеме, непомерно возрастает, и соображения повышения производительности здесь приходят в противоречие с соображениями экономии.

Рассмотренные здесь алгоритмы ДПФ вводят элемент распараллеливания в этап переупорядочения не путем увеличения числа комплектов ППО, а путем поблочного обмена и тем самым как бы сокращают эффективную длину носителя ППО, а следовательно, и время, необходимое для его рециркуляции. В принципе, такой обмен делает практическим и переупорядочение с единст-

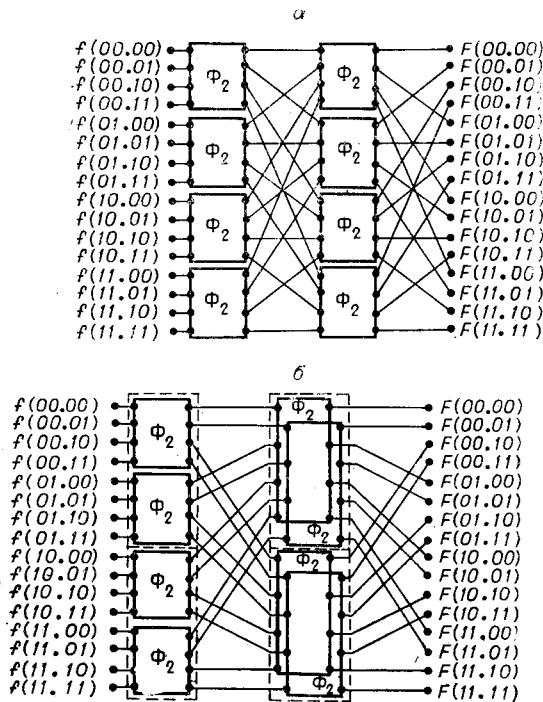


Рис. 6.

венного комплекта ППО, хотя наиболее эффективен он в сочетании с известными алгоритмами*.

Особенно эффективна реализация такого алгоритма с помощью магнитных дисков или барабанов, где перезапись подмассива в ОЗУ может быть ускорена специальной упаковкой исходного массива в ППО, а рециркуляция не требует возвратного движения. Если ППО — магнитофон, то число циклов может быть сокращено вдвое при использовании возвратного движения ленты (следует помнить при этом, что индексы операндов заменяются их дополнениями).

Для реализации алгоритма ДПФ двумерных массивов нет необходимости в двух комплектах ППО, ибо, как видно из рис. 6 а, б, результаты обеих итераций возвращаются в те же зоны, из которых происходило считывание. Организовать такой обмен не представляет труда в памяти рециркуляционного типа, в которой заносимая и считываемая зоны будут следовать друг за другом. С использованием возвратного движения ленты для этих целей понадобится буферизация считываемых из ППО зон, ибо при возврате их адреса опережают адреса зон, в которые должно произойти занесение из ОЗУ. Обеспечение этих мер позволит сократить число циклов рециркуляции еще в два раза.

Принимая во внимание, что при системотехнической организации ДПФ существенно большая часть времени расходуется на переупорядочение числовых массивов, приведенные алгоритмы должны значительно повысить эффективность вычислений при решении подобных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Голд, Ч. Рэйдер. Цифровая обработка сигналов. М., «Советское радио», 1973.
2. J. E. Welch, Jr. D. F. Guinn. FFT Organization for High-Speed Digital Filtering.— IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1970, v. AU-18, № 2.
3. Ж. Конни и др. Фурье-спектроскопия с использованием миллиона точек интерферограммы.— В кн.: Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения. М., «Мир», 1972.
4. Хуанг и др. Обработка изображений.— ТИИЭР, 1971, т. 59, № 11.
5. Хант. Структура и организация вычислений при цифровом улучшении качества изображений.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 7. (См. также в кн.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. М., «Мир», 1973).
6. R. C. Singleton. A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited High-Speed Storage.— IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1967, v. AU-15, p. 91—98.
7. R. C. Singleton. An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform.— IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1969, v. AU-17, p. 93—103.
8. R. L. Veenkand. A Serial Minded FFT.— IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1972, v. AU-20, № 3.
9. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

*Поступила в редакцию 5 марта 1974 г.;
окончательный вариант — 3 мая 1974 г.*

* В частности, таким образом может быть ускорен и алгоритм Синглтона [6].