

## ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 621.316.53+512.24

А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, В. С. КИРИЧУК  
(Новосибирск)

### ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА, ОПИСЫВАЕМОГО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

1. При постановке физического эксперимента, ориентированного на разработку математической модели исследуемого процесса, во многих случаях можно предположить, что этот процесс в некоторых точках фазового пространства имеет особенности, и заранее оценить ту область, внутри которой лежит особая точка. Подобная ситуация, например, всегда имеет место при исследовании процессов, сопровождающихся фазовыми переходами. Как известно, при фазовых переходах первого рода испытывают скачок плотность и термодинамические функции, а при фазовых переходах второго рода — их производные по физическим параметрам. Этот факт можно использовать для оценивания координат особых точек (в которых начинается или заканчивается фазовый переход) по результатам измерений величин, связанных с плотностью или термодинамическими функциями. Следует ожидать, что вблизи особой точки скачком изменяются либо параметры, либо структура математической модели процесса и результаты измерений отражают эти изменения. Необходимо оценить координаты особой точки, исследовать ее траекторию как функцию начальных условий эксперимента и проверить «качество» исходной математической модели.

2. Итак, пусть математическое описание процесса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(X, A), & X \in \Omega_1; \\ \dot{X} = f_2(X, B), & X \in \Omega_2. \end{cases} \quad (1)$$

где функции  $f_1$  и  $f_2$  описывают структуру модели,  $X$  — вектор независимых переменных,  $A$  и  $B$  — неизвестные векторы параметров. Необходимо по результатам измерений процесса  $m(X)$  определить области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а также векторы  $A$  и  $B$ . Затем на основе полученных данных проверить гипотезу о допустимости описания (1). В дальнейшем будем считать, что  $f_1$  и  $f_2$  являются функциями одной переменной  $x$ ,  $x \in [x_n, x_k]$ :

$$m(x) = \begin{cases} f_1(x, A), & x_n \leq x < \tilde{x}; \\ f_2(x, B), & \tilde{x} \leq x \leq x_k. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\tilde{x}$  — особая точка, область существования которой априори задана  $\tilde{x}_n \leq x \leq \tilde{x}_k$ .

3. Построим алгоритм определения координаты особой точки  $\tilde{x}$  и векторов  $A$  и  $B$  в следующих предположениях.

Процесс измеряется дискретно в точках  $x_1, \dots, x_n$ , измерения сопровождаются шумом с нулевым средним  $y(x_i) = m(x_i) + \xi(x_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Функции  $f_1$  и  $f_2$  представимы в виде линейного разложения по некоторым известным априори базисным функциям:

$$\begin{aligned} f_1(x_i) &= \sum_{j=1}^q \varphi_j(x_i) a_j, & x_1 \leq x_i < \tilde{x}; \\ f_2(x_i) &= \sum_{j=1}^m \psi_j(x_i) b_j, & \tilde{x} \leq x_i \leq x_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Некоторые из компонентов векторов  $A$  и  $B$  могут быть линейно связанными:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}; \quad B_1 = \Phi A. \quad (4)$$

С учетом (3), (4) вектор результатов измерений  $Y$  представим в виде

$$Y = F\eta + \Xi, \quad (5)$$

где  $F$  — матрица описания, полученная из  $\varphi_j(x_i)$ ,  $\psi_p(x_i)$  в соответствии с условием (4),  $\eta$  — вектор неизвестных параметров (размерности  $l = q + m_2$ ),  $\Xi$  — вектор шума.

Элементы матрицы  $F$  зависят от координаты особой точки  $\tilde{x}$ :  $F = F(\tilde{x})$ .

Выбрав в качестве критерия метод наименьших квадратов (МНК) [1], приходим к задаче минимизации функционала

$$J = (Y - F(\tilde{x})\eta)^T (Y - F(\tilde{x})\eta) \quad (6)$$

по вектору параметров  $\eta$  и  $\tilde{x}$ . Для любого фиксированного  $\tilde{x}$  минимум  $J$  по  $\eta$  достигается при

$$\eta = [F^T(\tilde{x})F(\tilde{x})]^{-1} F^T(\tilde{x})Y. \quad (7)$$

Таким образом, можно найти  $\tilde{x}$  из условия минимума

$$\begin{aligned} J^*(\tilde{x}) &= (Y - F(\tilde{x})\hat{\eta})^T (Y - F(\tilde{x})\hat{\eta}) = \eta^T F^T \Lambda(\tilde{x}) F \eta + \\ &+ 2\eta^T F^T \Lambda(\tilde{x}) \Xi + \Xi^T \Lambda(\tilde{x}) \Xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Lambda(\tilde{x}) = I - F(\tilde{x}) [F^T(\tilde{x})F(\tilde{x})]^{-1} F^T(\tilde{x}).$$

Математическое ожидание

$$M\{J^*(\tilde{x})\} = \eta^T F^T \Lambda(\tilde{x}) F \eta + (n-l)\sigma^2.$$

Так как  $\nabla F = 0$ , то минимум  $M\{J^*(\tilde{x})\}$  достигается в особой точке

$$\min_{\tilde{x}} M\{J^*(\tilde{x})\} = (n-l)\sigma^2.$$

Минимизируя  $J^*(\tilde{x})$  на дискретном множестве точек  $x_i$  ( $\tilde{x}_n \leq x_i \leq \tilde{x}_n$ ), находим  $\tilde{x}$  (с точностью до одного шага дискретности). После этого определяем вектор параметров  $\eta$  по формуле (7).

4. Оценим приближенно дисперсии оценок параметров при гауссовском распределении шума. В этом случае МНК равносильен методу максимального правдоподобия (ММП), а оценки ММП характеризуются

ются тем, что их совместное асимптотическое распределение гауссовское [2] с корреляционной матрицей  $K$ , равной

$$\{K^{-1}\}_{ij} = -M\left\{\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right\},$$

где  $L$  — совместная плотность распределения вектора отсчетов;

$$\begin{aligned} U = \ln L &= C - \frac{1}{2\sigma^2} (Y^T Y - 2\eta^T F^T Y + \eta^T F^T F \eta); \\ -M\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right\} &= -\frac{1}{\sigma^2} F^T F = \frac{1}{\sigma^2} S; \quad -M\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \tilde{x}}\right\} = -\frac{1}{\sigma^2} F^T \frac{dF}{d\tilde{x}} \eta = \frac{1}{\sigma^2} V; \\ -M\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \tilde{x}^2}\right\} &= \frac{1}{\sigma^2} \eta^T \frac{dF^T}{d\tilde{x}} \frac{dF}{d\tilde{x}} \eta = \frac{1}{\sigma^2} d. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, асимптотическая корреляционная матрица полного вектора оценок имеет следующий вид:

$$K = \sigma^2 \begin{vmatrix} S & V \\ V^T & d \end{vmatrix}^{-1} = \sigma^2 \begin{vmatrix} S^* & V^* \\ V^{*T} & d^* \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} S^* &= S^{-1} + S^{-1} V V^T S^{-1} d^*; \\ V^* &= -S^{-1} V d^*; \\ d^* &= 1/(d - V^T S^{-1} V). \end{aligned} \quad (10)$$

Асимптотическая корреляционная матрица вектора  $\eta$  равна  $S^*$ , и второй член в формуле для  $S^*$  характеризует увеличение дисперсий оценок за счет неточного определения особой точки. При известном  $\tilde{x}$  корреляционная матрица  $\eta$  равна  $\sigma^2 (F^T F)^{-1}$ . Аналогично дисперсия оценки координаты особой точки приближенно равна  $d^*$ ; если  $A$  и  $B$  известны, то  $\sigma^2(\tilde{x}) = 1/d$ .

5. Если результаты измерений зависят нелинейно от искоемых параметров  $A$  и  $B$ , то в этом случае для нахождения требуемых оценок необходимо использовать итерационные процедуры минимизации  $J$ . Полученные оценки остаются оптимальными в рамках метода максимального правдоподобия.

При негауссовском исходном шуме оценки оптимальны в рамках метода наименьших квадратов, но поскольку в этом случае ММП неэквивалентен МНК, предположение об асимптотической нормальности параметров является достаточно грубым и асимптотические характеристики точности необходимо воспринимать с большой осторожностью.

6. Предложенный алгоритм был проверен на нескольких тестовых задачах, одна из которых описана ниже. Процесс на обоих участках линеен, а в особой точке испытывает скачок его первая производная:

$$\begin{aligned} y_i &= a_1 + a_2 i + \xi_i, \quad 1 \leq i < i; \\ y_i &= a_1 + a_2 i + b(i - \tilde{i}) + \xi_i, \quad i \leq i \leq n \end{aligned}$$

( $\xi_i$  — независимые гауссовские величины с единичной дисперсией). Для этой модели оценка  $\tilde{x}$  является несмещенной и не зависит от  $a_1$  и  $a_2$ . Дисперсия оценки также не зависит от  $a_1$  и  $a_2$  и приближенно равна  $16\sigma_2/b^2 n$ .

$$\begin{aligned} \text{При } n=20 \text{ и } b=0,4\sigma \quad \sigma(\tilde{x}) &= 2,24\sigma; \\ b=0,5\sigma \quad \sigma(\tilde{x}) &= 1,8\sigma. \end{aligned}$$

Численные эксперименты, проведенные в широкой области изменения параметров  $A$  и  $B$ , подтвердили работоспособность алгоритма.

На рис. 1 приведены результаты одного из этих экспериментов.

7. Если описание процесса справа от особой точки неизвестно, приходится определять значение  $x$  по отклонениям величин  $y_i$  от  $f_1(x, A)$ .

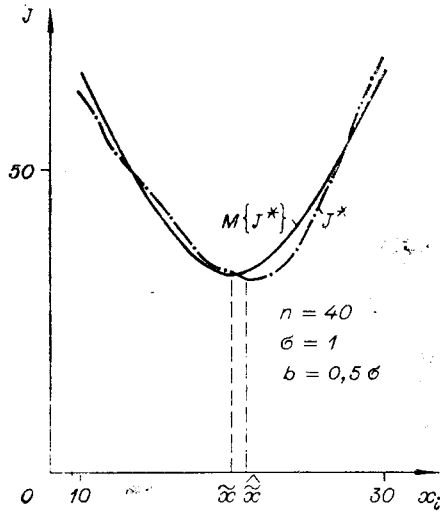


Рис. 1.

Равенство (2) для линейной относительно параметров функции  $f_1(x, A)$  в матричной записи принимает вид

$$Y = FA + \delta + \Xi, \quad M\{\Xi\} = 0.$$

Здесь  $Y$  — вектор результатов измерений;  $F$  — матрица описания, составленная из значений базисных функций на участке  $x_n < x_i < x_n$ ;  $\Xi$  — вектор некоррелированного гауссовского шума с нулевым средним. Вектор  $\delta$  характеризует отклонение описания процесса от  $f_1(x, A)$ , причем  $\delta_i = 0$  при  $x_i < x_n$ , где  $x_n$  — априорная левая граница области существования особой точки. В такой постановке задача оценивания  $x$  сводится к определению первой компоненты вектора  $\delta$ , отличной от

нуля, или, в терминах теории статистических гипотез, к проверке множественной гипотезы:

$$\begin{array}{ll}
 H_0: \delta_{k_1} = 0 & \text{при альтернативе } K_0: \delta_{k_1} \neq 0; \\
 \vdots & \vdots \\
 H_i: \delta_{k_1} = \dots = \delta_{k_1+i} = 0 & \text{—} \rangle \text{—} \quad K_i: \delta_{k_1} = \dots = \delta_{k_1+i-1} = 0, \\
 \vdots & \vdots \\
 H_{k_2-k_1}: \delta_{k_1} = \dots = \delta_{k_2} = 0 & \text{—} \rangle \text{—} \quad K_{k_2-k_1}: \delta_{k_1} = \dots = \delta_{k_2-1} = \\
 & = 0, \quad \delta_{k_2} \neq 0,
 \end{array} \tag{11}$$

где  $x_{k_1} = \tilde{x}_l$ ,  $x_{k_2} = \tilde{x}_n$ .

Для проверки гипотезы построим вектор  $Z$  в соответствии с приведенной ниже процедурой и покажем, что задача проверки множественной гипотезы эквивалентна проверке гипотез о равенстве нулю математических ожиданий компонент гауссовского вектора  $Z$  с некоррелированными составляющими.

Оценим вектор  $A$  по отсчетам  $y_1, \dots, y_{k_1-1}$  (вектору  $Y_1$ ), используя МНК:

$$\hat{A} = (F_1^T F_1)^{-1} F_1^T Y_1, \quad K_{\hat{A}} = M\{(\hat{A} - M\{\hat{A}\})(\hat{A} - M\{\hat{A}\})^T\} = \sigma_2^2 (F_1^T F_1)^{-1}.$$

Тогда величина  $z_1 = y_{k_1} - \varphi_{k_1} \hat{A}$  распределена нормально с параметрами

$$M\{z_1\} = \delta_{k_1}, \quad D\{z_1\} = \sigma^2 d_1, \quad d_1 = (1 + \varphi_{k_1} [F_1^T F_1]^{-1} \varphi_{k_1}^T)$$

и независима от оценки дисперсии

$$S_1^2 = \frac{1}{k_1 - q} (Y_1 - F_1 \hat{A})^T (Y_1 - F_1 A).$$

Увеличиваем размерность вектора  $Y_1$ , включая в него измерение  $y_{k_1}$ , вновь рассчитываем вектор оценок  $\hat{A}$  и отклонение для  $y_{k_1+1}$  измерения:

$$z_2 = y_{k_1+1} - \varphi_{k_1+1} \hat{A}.$$

Если  $\delta_{k_1} = 0$ , то  $M\{z_2\} = \delta_{k_1+1}$ ,  $D\{z_2\} = \sigma^2(1 + \varphi_{k_1+1} (F_2^T F_2)^{-1} \varphi_{k_1+1})$ . Таким образом определяем  $(k_2 - k_1)$ -мерный вектор  $Z$ . Легко показать, что компоненты вектора некоррелированы.

Андерсон [3, 4] предложил равномерно наиболее мощный несмещенный критерий для проверки гипотез о равенстве нулю математических ожиданий компонент вектора  $Z$ , сводящийся к следующему.

Проверяем гипотезу  $H_0: \delta_{k_1} = 0$ . Критерий отвергает эту гипотезу, если

$$W_1 = \frac{|z_1|}{\sqrt{d_1 \sigma^2}} > C_1,$$

$C_1$  —  $\alpha/2$ -квантиль нормального распределения. Если же  $H_0$  принимается, то проверяется  $H_1$  и процесс продолжается до тех пор, пока на некотором шаге гипотеза  $\nu$  не будет отвергнута, т. е. принимается гипотеза о том, что измерение  $y_{k_1+\nu}$  уже не принадлежит описанию  $f_1(x, A)$ .

При неизвестной дисперсии шума происходит очевидная модификация критерия: гипотеза отвергается, если

$$W_\nu^* = |z_\nu| / \sqrt{d_\nu S_\nu^2} > C_2.$$

Здесь  $S_\nu^2$  — оценка дисперсии, полученная по  $k_1 + \nu$  измерениям, а  $C_2$  —  $\alpha/2$ -квантиль распределения Стьюдента с  $k_1 + \nu - q$  степенями свободы.

Ошибка первого рода такого критерия зависит от числа шагов и равна  $1 - (1 - \alpha)^\nu$ .

Таким образом, используя критерий, предложенный Андерсоном, можно получить искомую оценку координаты особой точки.

Можно также показать, что статистики  $W_\nu$  и  $W_\nu^*$  представимы в таком виде:

$$W_\nu = \sqrt{R_\nu^2 - R_{\nu-1}^2}, \quad W_\nu^* = \sqrt{(R_\nu^2 - R_{\nu-1}^2) / (R_{\nu-1}^2 / (k_1 + \nu - q - 1))}, \quad (12)$$

где  $R_\nu^2$  — суммы квадратов отклонений величин  $y_i$  от сглаженных значений при условии, что описание  $f_1(x, A)$  справедливо для  $k_1 + \nu$  отсчетов.

8. Найдем точностные характеристики полученной оценки  $x$ . Вероятность принятия точки  $x_i$  в качестве особой точки равна

$$p(x_i) = \begin{cases} (1 - \alpha)^{i - k_1 - 1}, & k_1 \leq i < \tilde{i}; \\ (1 - \alpha)^{\tilde{i} - k_1 - 1} p_1, & i = \tilde{i}; \\ (1 - \alpha)^{\tilde{i} - i - 1} \prod_{j=1}^{i - \tilde{i}} (1 - p_j) p_{i - \tilde{i} + 1}, & \tilde{i} < i \leq k_2, \end{cases} \quad (13)$$

где  $p_i = P\left\{\frac{|\xi_i + \delta_i|}{\sigma_i} > C_1\right\}$ ,  $\xi_i \in N(0, 1)$ . При неизвестной дисперсии  $p_i = P(|t_i| > C_2)$ , где  $t_i$  подчиняется нецентральному распределению Стьюдента с параметром нецентральности  $\delta_i^2 / d_i \sigma^2$ . Исходя из (13), выпишем выражения для математического ожидания и дисперсии  $\tilde{x}$ :

$$M\{\tilde{x}\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} p(x_i) x_i; \quad D\{\tilde{x}\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} p(x_i) x_i^2 - M^2(\tilde{x}). \quad (14)$$

На рис. 2, 3 приведены графики  $p(x_i)$  и  $G(x_i) = \sum_{j=k_1}^{k_2} p(x_j)$ , полученные при  $\tilde{i} = k_1 + 10$ ,  $k_2 = k_1 + 20$ ,  $\delta_i / \sqrt{d_i} = a\sigma(i - k_1)$  и  $\alpha = 0,001$ .

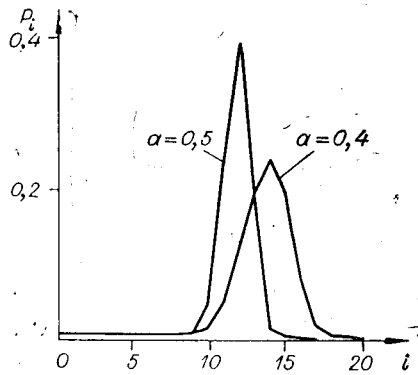


Рис. 2.

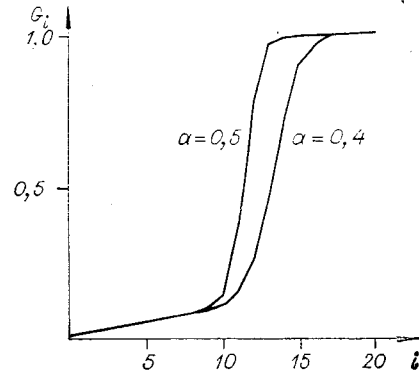


Рис. 3.

В табл. 1 даны значения  $M\{\tilde{x}\}$ ,  $D\{\tilde{x}\}$  и СКО  $= \sqrt{M\{\tilde{x} - \tilde{x}\}^2}$  для  $\tilde{x} = 10$ ,  $x_i = i$  ( $i = 1, 20$ ).

Из анализа приведенных данных следует, что при неизвестной  $f_1$  рассмотренный алгоритм дает смещенные (в большую сторону) оценки  $\tilde{x}$ . Разброс оценок и величина смещения определяются тем, насколько сигнал на втором участке «отличается» от первого: чем больше различие, тем точнее оценка.

9. Рассмотрим применение предложенных алгоритмов к обработке данных, полученных при исследовании фазового перехода твердое тело — жидкость, сопровождающего электрический взрыв проводников (ЭВП). Здесь особыми точками (в координатах сопротивление — энергия) являются точки начала плавления ( $Q_{нп}$ ,  $R_{нп}$ ), конца плавления ( $Q_{кп}$ ,  $R_{кп}$ ) и начала кипения ( $Q_k$ ,  $R_k$ ).

В первом приближении зависимость  $R(Q)$  на всех трех участках можно считать линейной: на участке  $0 \div Q_{нп}$  принято, как обычно,  $R = R_0 \left(1 + \beta_1 \frac{Q}{m}\right)$  ( $R_0$  — сопротивление проводника в начале процесса нагрева,  $\beta_1$  — табличное значение температурного коэффициента сопротивления,  $Q/m$  — удельная плотность энергии).

На участке  $Q_{нп} \div Q_{кп}$  линейная зависимость отражает гипотезу о прямой пропорциональности количества расплавленного вещества введенной в проводник энергии  $R = R_{нп} \left(1 + \beta_2 \frac{Q - Q_{нп}}{m}\right)$  (это эквивалентно предположению  $\delta = h_0^2 / \chi \tau_2 \ll 1$ , где  $h_0$  — поперечный размер проводника,  $\chi$  — температуропроводность,  $\tau_2$  — характерное время процесса) [5]. На участке  $Q_{кп} \div Q_k$  снова  $R = R_{кп} \left(1 + \beta_3 \frac{Q - Q_{кп}}{m}\right)$ .

Следовательно, математическое описание процесса имеет следующий вид (рис. 4):

Таблица 1			
$\alpha$	$M\{\tilde{x}\}$	$\sigma\{\tilde{x}\}$	СКО
0,4	12,8	3,2	4,26
0,5	11,2	2,5	2,77

$$R(Q) = \begin{cases} \gamma_1 + \alpha_1 Q, & Q_0 \leq Q < Q_{нп}; \\ \gamma_2 + \alpha_2 Q, & Q_{нп} \leq Q \leq Q_{кп}; \\ \gamma_3 + \alpha_3 Q, & Q_{кп} < Q \leq Q_k \end{cases} \quad (15)$$

и  $\gamma_1 + \alpha_1 Q_{нп} = \gamma_2 + \alpha_2 Q_{нп}$ ,  $\gamma_2 + \alpha_2 Q_{кп} = \gamma_3 + \alpha_3 Q_{кп}$ .

Необходимо по экспериментальным данным проверить гипотезу о применимости линейного приближения (15), оценить координаты особых точек  $Q_i = Q_{нп}$ ,  $Q_{кп}$ ,  $Q_k$  и значения коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ .

В табл. 2 представлены результаты обработки массива экспериментальных данных  $R(Q)$  (рассчитанного из осциллограмм тока и напряжения) по приведенным выше алгоритмам. Здесь  $Q^T, R^T, \alpha^T$  — значения соответствующих величин, полученные расчетным путем для условий квазистационарного режима нагрева (см. рис. 4);  $\hat{Q}, \hat{R}, \hat{\alpha}$  — оценки, полученные по экспериментальным данным;  $\sigma(\ )$  — среднеквадратические отклонения соответствующих оценок.

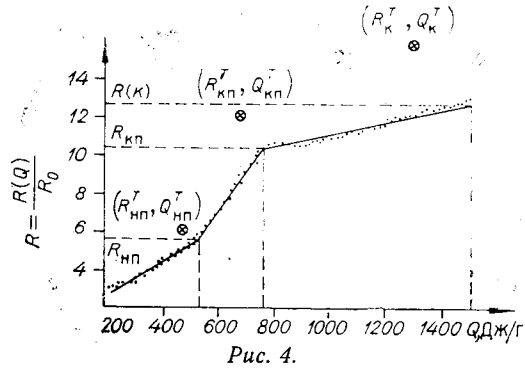


Рис. 4.

10. На основании данных табл. 2 и рис. 4 можно сделать следующие выводы:

Линейные модели обеспечивают хорошую аппроксимацию экспериментальных данных: разброс результатов измерений относительно сглаженных значений лежит в пределах 1—2%, что хорошо согласуется с априорной оценкой уровня случайных погрешностей.

Искомые особые точки, идентифицирующие начало и конец плавления, а также начало кипения, существуют, а их положение на оси энергии определяется с точностью до шага дискретности ( $\sim 10$  Дж/г).

Смещение координат особых точек в область больших (по сравнению с расчетными) значений энергии значимо. Особенно этот эффект заметен для  $Q_{кп}$ . В этой точке значимо также и уменьшение сопротивления  $R_{кп}$  по отношению к расчетному значению.

Можно дать следующую качественную интерпретацию наблюдаемых эффектов. Плавление заканчивается при энергии большей, чем в условиях квазистационарного нагрева, из-за того, что в условиях «быстрого» ввода энергии тепло от внутренних областей проводника не успевает передаваться за счет теплопроводности к границе «твердое тело — жидкость», движущейся от периферии к центру проводника.

Дальнейшее уточнение описания процесса может быть связано с учетом эффектов, обусловленных конечной величиной теплопроводности. Чтобы получить соответствующую модель в явном виде, необходимо записать уравнение теплопроводности аналогично [5] для жидкой и твердой фаз со следующим условием на границе раздела: на фазовый переход расходуется только тепло, которое подводится к границе раздела (слева и справа), — и найти решение этого уравнения для случая  $\delta > 1$ , который, по-видимому, реализуется в эксперименте.

Уменьшение сопротивления по сравнению с рассчитанным исходя из модели квазистационарного нагрева можно объяснить тем, что из-за инерционных сил объем проводника в конце фазы плавления оказывается меньшим, чем он был бы в квазистационарном случае. Подобное

Таблица 2

№ п/п	$Q^T$	$\hat{Q}$	$Q^T - \hat{Q}$	$\sigma(Q)$	$R^T$	$\hat{R}$	$R^T - \hat{R}$	$\sigma(R)$	$\{\alpha^T$	$\hat{\alpha}$	$\alpha^T - \hat{\alpha}$	$\sigma(\alpha)\} 10^{-3}$
1	475	525	-50	7,3	5,93	5,85	+0,08	0,1	9,8	9,03	0,77	0,17
2	680	751	-71	5	12,10	10,21	+1,89	0,12	28	21,3	6,7	0,37
3	1350	1422	-72	—	15,90	12,7	+3,2	0,14	9,4	3,4	6	0,44

«запаздывание» было обнаружено нами ранее в экспериментах с вольфрамовыми проводниками [6]. Динамическая модель данного явления может быть, по-видимому, сформулирована в рамках гидродинамического описания, дополненного соответствующим уравнением состояния и зависимостью, учитывающей изменение проводимости от плотности вещества [7].

Рассмотренные алгоритмы могут оказаться полезными при обработке результатов измерений в экспериментах по физике фазовых переходов, в том числе для проверки гипотез, качественное содержание которых представлено в настоящей работе. Они применимы также и в других случаях, когда из тех или иных априорных соображений можно выделить границу смены описаний процесса и формализовать их структуру.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
2. М. Д. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
3. T. W. Anderson. The Choice of Degree of a Polynomial Regression as a Multiple Decision Problem.—“Ann. Math. Statist.”, 1962, p. 33.
4. Е. Л. Леман. Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964.
5. А. М. Искольдский, В. К. Пинус. Сингулярности в решениях уравнения электрического взрыва проводников.—Препринт ИАЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1974.
6. А. П. Байков, А. М. Искольдский, Ю. Е. Нестерихин. Электрический взрыв проволочек при высоких скоростях ввода энергии.—«ЖТФ», 1973, т. XLIII, № 1.
7. Г. Кнопфель. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М., «Мир», 1972.

Поступила в редакцию 27 февраля 1975 г.

УДК 519.2.681.2.088

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Я. Я. ТОМСОНС

(Новосибирск)

### ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА В МЕТОДЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

**Введение.** При обработке результатов экспериментальных исследований для существенного уменьшения сглаживающего действия аппаратной функции  $h(\tau)$  измерительного преобразователя, описываемого уравнением

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in [0, \tau_y), \quad (1)$$

довольно часто возникает необходимость решать некорректно поставленную задачу восстановления входного сигнала, заключающуюся в построении оценки для  $x(t)$  по зарегистрированному выходному сигналу  $\tilde{y}(t) = y(t) + n(t)$  на основе решения уравнения (1).

В последние годы широкое применение при численном решении некорректно поставленных задач получили вычислительные схемы, построенные на основе методов регуляризации. Однако предложенные способы выбора параметра регуляризации и подходы к определению ошибок