

падает с данными расчета на ЭВМ. Использование одного и того же ФЭУ при снятии характеристической кривой фотоматериала и при получении ГСФ избавляет от необходимости учета спектральной зависимости системы измерения и позволяет точно контролировать мощность лазерного излучения.

## ВЫВОДЫ

1. Оптимизацию  $\eta$  ГСФ по  $H_0$  и  $a$  предлагается проводить методом оптимизации для равномерно распределенных полей (как для случая негативного, так и для позитивного фотопроцессов), для чего применим разработанный нами метод [1], не требующий применения ЭВМ.

2. Оптимальный режим для  $\eta$  не зависит от вида функции  $f(x; y)$ , а зависит лишь от  $[f(x; y)]_{\max}$ .

3. Абсолютные значения максимальной  $\eta$  в отличие от значений параметров регистрации зависят от вида  $f(x; y)$ .

4. Сделанные утверждения и сведение задачи к случаю равномерно распределенных полей прямо не распространямы на случаи наличия дополнительных ограничений на параметры ГСФ, а также случаи внесения в процесс регистрации дополнительной модуляции с целью специальной коррекции характеристики ГСФ.

5. Разброс функции процесса регистрации  $F$  для любой из функций набора  $\{f\}$  мало оказывается на величине  $\eta_{\max}$ .

В заключение считаем своим долгом выразить признательность Э. И. Крупицкому и З. М. Красновскому за внимание и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Крупицкий, И. С. Барбанель. Оптимизация режима записи тонких амплитудных голограмм методом нелинейного программирования.—«Журн. науч. и прикл. фотогр. и кинематогр.», 1973, вып. 4.
2. Э. И. Крупицкий, И. С. Барбанель. Теория максимизации дифракционной эффективности тонкослойных амплитудных голограмм.—«Опт. и спектр.», 1972, т. XXXII, вып. 3.
3. E. V. Lugt. Signal detection by complex spatial filtering.—"IEEE Trans.", 1964, vol. IT-10 (№ 2), p. 139.

Поступила в редакцию 20 декабря 1974 г.

УДК 621.378:681.322.5

А. В. КУЗЬМЕНКО  
(Киев)

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА В КОГЕРЕНТНОЙ ОПТИКЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА

**Введение.** В настоящее время большое внимание уделяется изучению когерентно-оптических вычислительных устройств, в которых сравнительно просто удается реализовать целый ряд математических операций. Из них мы назовем лишь интегральные преобразования класса

Фурье — это пары преобразований Фурье и Ганкеля, а также прямое преобразование Лапласа [1, 2].

Известно, однако, что класс Фурье интегральных преобразований включает в себя, помимо перечисленных, обратное преобразование Лапласа, а также прямое и обратное преобразования Меллина [3]. Естественным образом возникает вопрос о возможности их осуществления в когерентной оптической системе.

В настоящей работе показано, что обратное (одно- и двумерное) преобразование Лапласа может быть осуществлено в той же оптической схеме, что и прямое, если соответствующим образом переориентировать транспарант одной из исходных функций и оси (одну или обе) выходной плоскости оптической системы.

Изложен один из возможных способов реализации пары преобразований Меллина с использованием оптической схемы преобразования Лапласа \*.

**Преобразование Лапласа.** 1. Вначале рассмотрим одномерный случай. Прямое преобразование Лапласа вещественной или комплексной функции  $f(x)$  действительного переменного, отличной от нуля на интервале  $(0, \infty)$  и равной нулю вне его, выражается формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\alpha x} e^{-i\beta x} dx \quad (1)**$$

( $p = \alpha + i\beta$  — комплексная переменная;  $\alpha \geq 0$ ) и представляет собой Фурье-преобразование произведения функций  $f(x)$  и  $e^{-\alpha x}$ . Его оптическая схема, представленная на рис. 1, работает следующим образом (см. также [2]). В плоскостях  $P_1$  и  $P_3$  соответственно помещают транспаранты функций  $f(x)$  и  $e^{-\alpha x}$ . Поскольку изображение плоскости  $P_1$  в результате двойного преобразования Фурье, осуществляющегося линзами  $L_2$  и  $L_3$ , проектируется на плоскость  $P_3$ , то при освещении транспаранта функции  $f(x)$  когерентным светом с плоским волновым фронтом, формируемым линзой  $L_1$ , в плоскости  $P_3$  на выходе транспаранта функции  $e^{-\alpha x}$ , амплитудно-фазовое распределение поля  $t(x)$  соответствует произведению  $f(x)$  и  $e^{-\alpha x}$  функций транспарантов с учетом их опорных уровней:

$$t(x) = t_1 t_2 = T_1 T_2 + T_2 f(x) + T_1 e^{-\alpha x} + f(x) e^{-\alpha x}, \quad (2)$$

где  $t_1(x) = T_1 + f(x)$ ;  $t_2(x) = T_2 + e^{-\alpha x}$ ;  $T_1, T_2$  — опорные уровни.

Таким образом, распределение поля, кроме произведения функций, содержит мешающие члены, появляющиеся за счет опорных уровней. Способ их устранения указан ниже. Астигматическая часть оптической системы, состоящая из цилиндрической линзы  $L_a$  и сферической  $L_4$ , проектирует в плоскость  $P_4$  функцию  $F(\alpha + i\beta)$ . Оси  $x, y$  этой плоскости соответствуют переменным  $\beta, \alpha$ . Схема на рис. 1 отличается от схемы преобразования Лапласа, предложенной в [2], отсутствием цилиндрических линз между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ , а также  $P_2$  и  $P_3$ . Обработка сигнала в плоскости  $P_2$  заключается лишь в устраниении нулевого порядка спектра сигнала  $\tilde{f}(x, y)$  (подавление опорного уровня  $T_1$ ), что соответ-

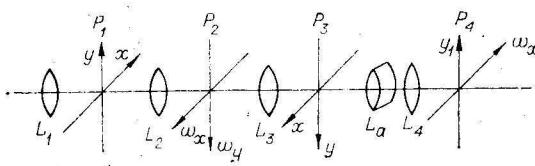


Рис. 1.

\* В связи с этим следует отметить работу [7], в которой связь между преобразованиями Фурье и Меллина используется для реализации последнего на ЭЦВМ.

\*\* Бесконечные пределы в интегrale (1) и во всех остальных случаях используются для общности записи. Подразумевается, что оптическая система выполняет интегрирование в конечных пределах, определяемых характеристиками оптики.

ствует устранению 1-го и 3-го мешающих членов в произведении (2). Для выполнения этой операции достаточно на нулевой частоте поставить непрозрачный экран в виде кружка соответствующих размеров вместо полоски, которая ставилась в схеме с цилиндрическими линзами, приведенной в [2]. Устранив 2-й мешающий член гораздо сложнее, нежели 1-й и 3-й. В частности, в точках  $x=0$  выходной плоскости системы его можно устранивать, используя способ изготовления транспарантов функций, предложенный в [2].

Приведенное подробное описание прямого одномерного преобразования Лапласа позволит нам легко описать все остальные случаи преобразования Лапласа.

2. Формула обратного преобразования Лапласа имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} F(p) e^{px} dp \quad (\alpha_0 > 0). \quad (3)$$

Возможность построения оптической схемы обратного преобразования из формулы (3) не следует. Однако она становится очевидной, если преобразовать (3) путем фиксирования переменной  $\alpha$ . При  $\alpha = \text{const}$  интегрирование в комплексной плоскости производится вдоль прямой  $\text{Re}p = \alpha$ , при этом  $dp = id\beta$  и (3) приобретает вид [3]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + i\beta) e^{\alpha x} e^{i\beta x} d\beta. \quad (4)$$

Из формулы (4) (если считать  $\alpha$  непрерывно изменяющимся параметром) теперь видно, что обратное преобразование Лапласа должно осуществляться по той же оптической схеме, что и прямое, с учетом изменения направления оси  $x$  в плоскости  $P_4$  на обратное и путем поворота экспоненциального фильтра в  $P_3$  на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$  (в случае если направления координатных осей в  $P_1$  оставить без изменения).

3. Прямое двумерное преобразование Лапласа вещественной или комплексной функции  $f(x, y)$  двух действительных переменных, определенной в области  $(0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty)$ , описывается формулой [4]

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) e^{-px - qy} dx dy, \quad (5)$$

где  $p = \alpha + i\xi$ ,  $q = \beta + i\eta$  — комплексные переменные,  $\alpha, \beta \geq 0$ . Оно также допускает оптическую реализацию, но лишь для случая постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Такое преобразование является частным случаем полного преобразования Лапласа, который иногда называют обобщенным (или комплексным) преобразованием Фурье (см., например, [5]). При этом используется оптическая схема, приведенная на рис. 1, из которой убирается цилиндрическая линза  $L_a$ . Тогда оси  $x, y$  выходной плоскости  $P_4$  будут соответствовать переменным  $\xi, \eta$  функции  $F(p, q)$ . Амплитудный транспарант функции  $e^{-\alpha x - \beta y}$ , помещаемый в плоскость  $P_3$ , может быть получен простым наложением двух транспарантов функций  $e^{-\alpha x}$  и  $e^{-\beta y}$ .

4. Обратное двумерное преобразование Лапласа

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(p, q) e^{px + qy} dp dq \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (6)$$

по аналогии с одномерным для постоянных  $\alpha, \beta$  может быть преобразовано к виду

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha + i\xi, \beta + i\eta) e^{\alpha x + \beta y} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (7)$$

и осуществляется по схеме прямого двумерного преобразования Лапласа, представляя частный случай преобразования, оговоренный выше. При этом в схеме необходимо изменить направления осей  $x$ ,  $y$  в  $P_4$  на обратные (если оставить неизменными направления осей  $x$ ,  $y$  в  $P_1$ ), а транспарант экспоненциального фильтра в  $P_3$  повернуть на  $180^\circ$  вокруг центра координат.

**Преобразование Меллина.** 1. Формулы одномерного преобразования Меллина комплексной в общем случае функции  $g(x)$  от действительного переменного могут быть записаны в виде [3]:

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(x) x^{p-1} dx; \quad (8)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} G(p) x^{-p} dp, \quad (9)$$

где  $p = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha_{01} \leq \alpha \leq \alpha_{02}$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $\alpha_{01}, \alpha_{02} > 0$  — постоянные.

Используя определение общей комплексной степенной функции, формулы (8), (9) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} G(\alpha + i\beta) &= \int_0^{\infty} g(x) e^{(\alpha-1) \ln x} e^{i\beta \ln x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(e^y) e^{(\alpha-1) \ln x} e^{i\beta \ln x} d(\ln x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(e^y) e^{\alpha y} e^{i\beta y} dy; \end{aligned} \quad (10)$$

$$g(e^y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha + i\beta) e^{-\alpha y} e^{-i\beta y} d\beta = f(y), \quad (11)$$

где  $y = \ln x$ .

Из формул (8), (10) следует, что процесс осуществления преобразования Меллина можно рассматривать состоящим из двух последовательных преобразований, которые, используя операторные символы, можно записать в виде

$$g(x) \xrightarrow{N} f(y) \xrightarrow{L} G(p).$$

Обратное преобразование [см. (9), (11)] выражается последовательной реализацией обратных операторов  $L^{-1}$  и  $N^{-1}$ :

$$G(p) \xrightarrow{L^{-1}} f(y) \xrightarrow{N^{-1}} g(x).$$

Операторы  $L$  и  $L^{-1}$  описывают соответственно оптическое прямое и обратное преобразования Лапласа. Преобразования  $N$  и  $N^{-1}$  выполнить в когерентной оптической системе, однако, нельзя по причине их нелинейности. Таким образом, в чисто оптической форме преобразование Меллина осуществить не удается.

Преобразование  $N$ , представляющее собой переход к новой переменной, легко выполняется на стадии изготовления транспаранта функции  $f(y)$  для осуществления последующего преобразования Лапласа. Оператор  $N^{-1}$  также легко реализуется средствами оптоэлектронники.

На рис. 2 на примере функции  $g(x) = x$  проиллюстрирован нелинейный характер перехода от  $g(x)$  к  $f(y)$ . Отметим, что значения функций  $g(x)$  и  $f(y)$  в точках  $x$  и  $y = \ln x$  соответственно равны между собой. В силу конечности пределов преобразования по переменной  $y$  интервал изменения  $x$  ограничен снизу величиной  $x_{01} \neq 0$ .

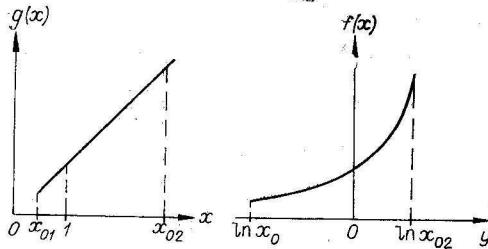


Рис. 2.

электронный луч сигналом  $g(x)$ , а его развертку осуществлять по закону  $y \sim \ln x$ , где  $y$  — координата луча,  $x \equiv t$  — время. Логарифмический закон развертки обеспечивается методами нелинейной радиотехники. Соответственно в схеме обратного преобразования Меллина получаемая в выходной плоскости оптической системы функция  $f(y)$  преобразуется в электрический сигнал  $g(x)$  посредством операции потенцирования по аргументу  $y$  функции  $f(y)$ . В случае комплексных функций  $g(x)$  преобразование  $N$  можно реализовать, если использовать способ получения пространственного распределения комплексных амплитуд электромагнитного поля, описанный в [6]. При этом используются отдельно изготавливаемые транспаранты  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  частей функции  $g(x)$ . Поскольку наиболее вероятным применением электронно-оптического преобразования Меллина (как и преобразования Лапласа) будет его использование в цифроаналоговых вычислительных устройствах, можно предложить также способ реализации преобразования  $N$  с помощью цифровой голограммы. В ЭЦВМ операция  $g(x) \rightarrow f(y)$  выполняется особенно просто, так как массив значений функции  $g(x)$  остается без изменения, осуществляется лишь операция логарифмирования аргумента  $x$ . Полученная таким образом  $f(y)$  кодируется в цифровую голограмму и наносится на фотопленку или бессеребряный носитель с помощью графопостроителя [6].

Обратная процедура  $f(y) \rightarrow g(x)$  выполняется так же просто с помощью ЭЦВМ и фотоприемников.

Рассмотренные выше схемы преобразований Лапласа и Меллина могут быть выполнены в виде входных и выходных элементов цифроаналоговых устройств, служащих для решения дифференциальных уравнений методами интегральных преобразований Лапласа и Меллина. В этом случае метод цифровой голографии особенно удобен для изготовления транспарантов функций  $F(p)$ ,  $F(p, q)$  и  $G(p)$ .

В заключение автор выражает свою благодарность Н. Г. Находкину и В. Н. Курашову за обсуждение работы и сделанные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. М., «Мир», 1971.
2. Катроне, Лейф, Палермо, Порчелло. Оптические системы фильтрации и обработки сигналов.— «Зарубеж. радиоэлектроника», 1962, № 10.
3. Н. Седдон. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. В. А. Диткин, А. П. Прудников. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М., Физматгиз, 1958.
5. М. Ф. Гарднер, Дж. Л. Бэрнс. Переходные процессы в линейных системах. М., Физматгиз, 1961.
6. Preston L. Ransom. Synthesis of complex optical wavefronts.— "Appl. Opt.", 1972, vol. 11, № 11.
7. Gregory M. Robbins, Thomas S. Huang. Inverse filtering for linear shift-invariant imaging systems.— "Proc. IEEE", 1972, vol. 60, № 7.

Поступила в редакцию 27 ноября 1973 г.