

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 551.576.1:551.501.776:551.501.721

Ю. Е. АБАКШИН, Л. Г. КОВАЛЕНКО, Р. П. ФИЛИМОНОВ

(Ленинград)

ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИМПУЛЬСНОГО ПОЛЯ ПОМЕХ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛЮ СОСТАВНОГО ПРОЦЕССА

Введение. Решение задач статистической обработки оптических сигналов на фоне помех и построения автоматической аппаратуры анализа требует сведений о вероятностных характеристиках поля помех. Среди различных видов фоновых помех можно выделить двумерные случайные поля «импульсного» типа. К ним могут быть отнесены облачный и радиационный фоны [1, 2], некоторые виды фоновых образований, зарегистрированные на фотографическую пленку [3], а также шумы самих фотографических пленок [4]. Для полей указанного вида характерна структура, образованная наложением случайного числа близких или подобных по форме областей различной степени яркости на темном фоне, либо, наоборот, несамосветящихся областей различной степени прозрачности на однородном яркостном фоне. Экспериментальные сведения о вероятностных характеристиках указанных видов случайных двумерных полей крайне ограничены и получение их в ряде случаев затруднено нестационарностью и неоднородностью наблюдаемых объектов, поэтому особое значение приобретает разработка вероятностной модели подобных полей, которая необходима для выявления оптимальной структуры анализирующей системы, расчета ее рабочих характеристик, оценки ожидаемого качества приема в условиях изменения вероятностных характеристик поля помех и, наконец, моделирования разнообразных ситуаций приема с помощью ЭВМ. В ряде работ однородные и стационарные поля импульсного типа моделировались с помощью марковских процессов [5—7], в данной работе предлагается модель составного двумерного поля, более естественно отражающая основные свойства рассматриваемых объектов.

Основные определения и соотношения. Согласно [8], составным (или каскадным) называется случайный процесс, построенный на основе другого случайного процесса. При этом первичный процесс называется основным (задающим), а вторичный — подчиненным ему.

Определим исходный элемент поля — область постоянной яркости или непрозрачности — как ограниченное выпуклое множество, выпуклую геометрическую фигуру площади S , с произвольно выделенным центром. Будем считать, что форма всех фигур одинакова и их положение на плоскости определяется распределением центров и угла поворота φ относительно фиксированной оси координат. Предположим, что распределение центров фигур в произвольной области D конечной площади $S(D)$ удовлетворяет условиям однородности, ординарности и отсутствия последействия и задает первичный процесс $V(D)$. В этом случае

вероятность попадания в область D точно k центров $V_k(D) = P\{V(D) = k\}$ определяется законом Пуассона:

$$V_k(S(D), \lambda) = \exp(-S(D)\lambda) \frac{[\lambda S(D)]^k}{k!}, \quad (1)$$

где λ — среднее число центров в единичной площади.

Подчиненный процесс введем на основе следующих предположений. Исходные элементы поля — выпуклые фигуры — кроме параметров S и φ характеризуются величиной коэффициента пропускания α , постоянного по площади фигуры, т. е. рассматриваются фигуры разной степени прозрачности на однородном ярком фоне. Достаточно общий случай состоит в рассмотрении случайных значений параметров, задаваемых совместной функцией распределения плотности вероятности $f(S, \varphi)$ площади и угла поворота и одномерной функцией плотности $k(\alpha)$ коэффициента пропускания при следующих областях изменения параметров: $S \in [S_{\min}, S_{\max}]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\alpha \in [0, 1)$.

Значение коэффициента пропускания $T_\alpha(A)$ в заданной точке поля определяется оператором умножения

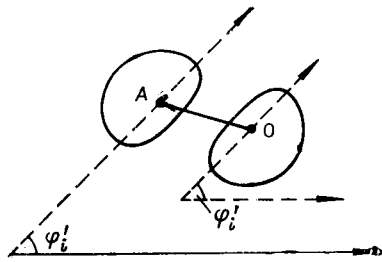
$$T_\alpha(A) = \prod_{i=1}^k \alpha_i, \quad (2)$$

поскольку при перекрытии нескольких фигур результирующий коэффициент пропускания в области пересечения равен произведению коэффициентов пропускания исходных фигур. Согласно (2), $T_\alpha(A)$ есть двумерное случайное поле, подчиненное процессу $V(D)$. На основе введенных определений, обобщающих свойства реальных полей импульсного типа, рассчитаем вероятностные характеристики моделируемого поля.

Расчет вероятностных характеристик поля. Методика расчета излагается на примере вычисления начального момента произвольного порядка.

Заметим, что имеет место следующее важное свойство, которое можно назвать свойством «зеркальной симметрии».

Рис. 1. Свойство «зеркальной симметрии» при вычислении вероятности накрытия произвольной точки A плоскости k фигурами.



А именно, геометрическим местом центров фигур с некоторым углом поворота φ_i и площадью S_j , накрывших точку A , является фигура противоположной ориентации $\varphi_i + \pi$ с центром в той же точке A (рис. 1). Это означает, что центр каждой фигуры площадью S_j , ориентированной под углом φ_i и накрывшей точку A , должен попасть в зеркально-симметричную этой фигуре область F той же площади и противоположного угла поворота. А это одновременно означает, что вероятность накрытия точки A p_j фигурами одинаковой площади S_j и угла поворота φ_i равна вероятности того, что p_j центров этих фигур находятся в области F площади S_j , ориентированной под углом $\varphi_i + \pi$.

Вероятность $W_k(A)$ накрытия точки A k фигурами любой ориентации и площади находим, исходя из принятой модели распределения центров фигур (1):

$$W_k(A) = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f(S, \varphi) S dS d\varphi\right) \frac{\left[\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f(S, \varphi) S dS d\varphi\right]^k}{k!}. \quad (3)$$

Начальный момент $M_n[T_\alpha(A)]$ n -го порядка величины $T_\alpha(A)$ находится с помощью (4). По определению начального момента и по формуле полной вероятности можно записать

$$M_n[T_\alpha(A)] = E[T_\alpha^n(A)] = \sum_{k=0}^{\infty} E[T_\alpha^n(A)/U(A) = k] W_k(A), \quad (4)$$

где $U(A)$ — число фигур, накрывших точку A .

Математическое ожидание под знаком суммы по определению подчиненного процесса преобразуется следующим образом:

$$E[T_\alpha^n(A)/U(A) = k] = E\left\{\left[\prod_{i=1}^k \alpha_i^n\right]\right\} = \prod_{i=1}^k [E(\alpha_i^n)] = \left[\int_0^1 \alpha^n k(\alpha) d\alpha\right]^k. \quad (5)$$

Используя (3) и (5), нетрудно записать выражение (4) в окончательном виде:

$$M_n[T_\alpha(A)] = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f(S, \varphi) S dS d\varphi\right) \int_0^1 (1 - \alpha^n) k(\alpha) d\alpha, \quad (6a)$$

в частности, для случая среднего значения имеем

$$m_1 = E[T_\alpha(A)] = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f(S, \varphi) S dS d\varphi\right) \int_0^1 (1 - \alpha) k(\alpha) d\alpha. \quad (6b)$$

Изложенная методика применима для вычисления смешанных моментов любого порядка. Обобщения, возникающие при этом, иллюстрируются на примере расчета корреляционной функции $R_{T_\alpha}(A, B)$. По определению корреляционной функции и из условий вывода формулы (4) можно записать следующую последовательность преобразований:

$$\begin{aligned} R_{T_\alpha}(A, B) &= E[T_\alpha(A) T_\alpha(B)] - m_1^2 = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} E[T_\alpha(A) T_\alpha(B)/U(A, B) = k_2; \\ &U(A) = j; U(B) = k_1 - j] [W_{k_2}(A, B) W_j(A) W_{k_1-j}(B)] = \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} E\left[\left(\prod_{i=1}^{k_2} \alpha_i^2\right) \left(\prod_{i=1}^{k_1} \alpha_i\right)\right] W_{k_2}(A, B) \sum_{j=0}^{k_1} W_j(A) W_{k_1-j}(B), \quad (7) \end{aligned}$$

где $W_{k_2}(A, B)$ — вероятность того, что k_2 фигур одновременно накрыли точки A и B ; смысл обозначений $W_j(A)$ и $W_{k_1-j}(B)$ аналогичен. Математическое ожидание в выражении (7) преобразовано таким же образом, как при получении формулы (5). Новый момент возникает при вычислении явного вида вероятностей накрытия фигурами двух точек A и B . Он обусловлен следующим изменением свойства «зеркальной симметрии» применительно к накрытию фигурами двух точек плоскости вместо одной, а именно: вероятность одновременного накрытия двух точек A и B k фигурами одинаковой площади и угла поворота равна вероятности попадания k центров этих фигур в область C , образованную пересечением двух фигур, возникших в результате переноса исходной фигуры относительно самой себя на расстояние $\tau = A-B$ в направлении угла θ (рис. 2).

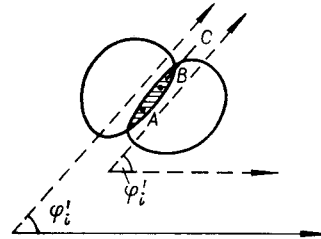


Рис. 2. Изменение свойства «зеркальной симметрии» при вычислении вероятности накрытия двух точек плоскости A и B k фигурами.

Соответственно вероятность накрытия трех точек при тех же условиях была бы равна вероятности попадания k центров в область, образованную пересечением трех фигур в результате двух параллельных сдвигов на расстояния τ_1 и τ_2 исходной фигуры относительно самой себя под углами θ_1 и θ_2 . Поскольку мы не рассматриваем никаких других сдвигов фигур, кроме параллельных, то очевидно, что в окончательные выражения для искомых вероятностей войдет некоторая функция

$$H(\theta, \tau) = \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} h(\theta, \tau, S, \varphi) dS d\varphi,$$

где $h(\theta, \tau, S, \varphi)$ — средняя площадь пересечения, полученная в результате параллельного сдвига фигуры относительно самой себя на расстояние τ и под углом θ . Выполняя необходимые преобразования, можно получить следующие выражения для искомых вероятностей:

$$W_{k_2}(A, B) = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} H(\tau, \theta) f(S, \varphi) dS d\varphi\right) \times \frac{\left[\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} H(\tau, \theta) f(S, \varphi) dS d\varphi\right]^{k_2}}{k_2!}; \quad (8a)$$

$$W_j(A) = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} [S - H(\tau, \theta)] f(S, \varphi) dS d\varphi\right) \times \frac{\left[\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} [S - H(\tau, \theta)] f(S, \varphi) dS d\varphi\right]^j}{j!}; \quad (8б)$$

$$W_{k_1-j}(B) = \exp\left(-\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} [S - H(\tau, \theta)] f(S, \varphi) dS d\varphi\right) \times \frac{\left[\lambda \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} [S - H(\tau, \theta)] f(S, \varphi) dS d\varphi\right]^{k_1-j}}{(k_1-j)!}. \quad (8в)$$

С помощью соотношений (7), (8a) — (8в) нетрудно написать выражение для корреляционной функции поля. Оно имеет вид

$$R_{T_\alpha}(\tau, \theta) = \exp\left(-2\lambda \int_0^1 (1-\alpha) k(\alpha) d\alpha \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} f(S, \varphi) S dS d\varphi\right) \times \left[\exp\left(\lambda \int_0^1 (1-\alpha^2) k(\alpha) d\alpha \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} H(\tau, \theta) f(S, \varphi) dS d\varphi\right) - 1\right] \quad (9)$$

Применяя изложенную методику к случаю вычисления смешанного момента высшего порядка, можно показать, что выражение для центрального смешанного момента n -го порядка имеет вид

$$E[T_\alpha(A_1) T_\alpha(A_2) \dots T_\alpha(A_n)] = \exp(-\lambda G) \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n G_i \int_0^1 \alpha^i k(\alpha) d\alpha\right). \quad (10)$$

Функции G и G_i вводятся следующим образом. Рассмотрим множество S фигур заданной площади и ориентации и обозначим: $\{S\}^k$ — подмножество, состоящее из k фигур с центрами в точках A_1, A_2, \dots, A_n ; $g[\{S\}^k]$ — площадь объединения множества $\{S\}^k$ и $g_i[\{S\}^k]$ — площадь множества точек, накрытых в точности i фигурами из множества $\{S\}^k$. Тогда можно написать:

$$G = \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} g[\{S\}^k] f(S, \varphi) dS d\varphi; \quad (11a)$$

$$G_i = \int_0^{2\pi} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} g_i[\{S\}^k] f(S, \varphi) dS d\varphi. \quad (11b)$$

Функции g_i можно в конечном итоге выразить через функции H_i , равные площади пересечения i фигур из $\{S\}^k$ с центрами A_1, A_2, \dots, A_n . Очевидно, что точные аналитические выражения функций H_i даже для случая простейшей формы очень сложны.

Таким образом могут быть получены выражения для начального и смешанного моментов любого порядка. Во многих случаях оказывается достаточным рассмотрение только спектрально-корреляционных характеристик, связанных с анализом соотношения (9).

Описание вероятностных характеристик реальных полей осуществляется в рассмотренной модели заданием функций распределения $f(S, \varphi)$ и $h(\alpha)$, формы исходного элемента и параметра λ . Указанные характеристики берутся из опытных или других данных. Кроме того, приближение модели к вероятностным свойствам реальных полей может быть осуществлено изменением распределения состояния основного процесса $V(D)$, что позволит моделировать основные виды временной нестационарности и пространственной неоднородности реальных импульсных полей.

Приложение теории. В качестве простого примера рассмотрим применение развитых положений для описания фотографических шумов. Фотографический шум естественно интерпретируется как случайное двумерное поле импульсного типа, образованное по схеме каскадного процесса. Первичный процесс задается распределением центров зерен металлического серебра по поверхности фотографической эмульсии при возможном многократном перекрытии зерен. Подчиненный процесс (фотографический шум) описывается флюктуациями коэффициента пропускания по поверхности почернения равномерно экспонированного и проявленного фотографического материала [9]. В соответствии с определением микрозернистости [4], описывающем свойства отдельных зерен металлического серебра, формирующего почернение, разумно принять следующие ограничения относительно параметров модели: $\alpha=0$ (полная непрозрачность зерен металлического серебра), зерна имеют форму кругов заданной площади $S=\pi r^2$ (распределением зерен по площади в первом приближении можно пренебречь, при этом функция распределения $f(S, \varphi)$ вырождается в дельта-функцию $\delta(S-S^0$,

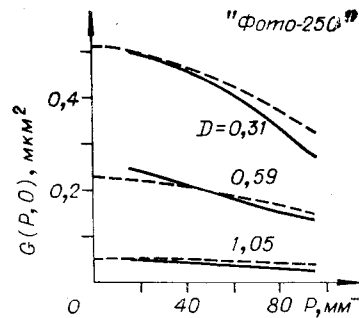


Рис. 3. Сравнение экспериментальных (сплошные кривые) спектров Винера фотографических шумов пленки «Фото-250» с результатами теоретического расчета (штриховые кривые).

$\varphi - \varphi^0$). Тогда выражения (6б) и (9) упрощаются и принимают вид:

$$m = \exp(-\lambda S); \quad (12a)$$

$$R_{T\alpha}(\tau) = \exp(-2\lambda S) \{ \exp[\lambda H(\tau)] - 1 \}, \quad (12б)$$

где $H(\tau) = \arccos \frac{\tau}{2r} - \frac{\tau}{2r} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{2r}\right)^2}$, $0 \leq \tau \leq 2r$.

Соответствие модели свойствам реального фотографического шума проверялось расчетом спектров Винера как функций параметров модели и сопоставлением теоретических и экспериментальных данных [10].

Спектр вычислялся преобразованием Ганкеля корреляционной функции (12б). Расчеты выполнялись на ЭВМ БЭСМ-6. Для заданных значений оптических плотностей $D = \lg \frac{1}{T} = \lambda S \lg e$ изменением диаметра зерна достигалось приближение расчетных кривых к экспериментальным. Такой порядок действий связан с тем, что точная экспериментальная оценка среднего диаметра зерен металлического серебра затруднительна. Соответствие модели эксперименту оценивалось по близости хода спектральных кривых во всем диапазоне изменения пространственных частот. Полученные результаты показаны на рис. 3. Можно сделать вывод, что принятая модель позволяет теоретически описать данные экспериментальных измерений спектров Винера фотографических шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Сергеев, Д. А. Янутш. Статистические методы исследования природных объектов. Л., Гидрометеиздат, 1973.
2. Ю. А. Мулламаа, М. А. Сулев, В. К. Пылдмаа, Х. А. Охврилль, Х. Ю. Нийлиск, М. И. Ялленов, Л. Г. Чубаков, А. Е. Кууск. Стохастическая структура полей облачности и радиации. Тарту, Изд. Ин-та физ. и астроном. АН ЭССР, 1972.
3. С. С. Кутателадзе. Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
4. Ю. Н. Гороховский. Классификация структурных свойств фотографических слоев. — «УНФ», 1951, т. 1.
5. К. К. Деньщиков. Метод имитации ИК-фонов облачного неба для исследования помехозащищенности оптико-электронных САР. — «Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение», 1969, т. 12, № 10.
6. М. Х. Резник. Обнаружение точечного излучателя в присутствии фоновых помех негауссовского типа. — «Оптико-мех. пром-сть», 1972, № 3.
7. F. T. S. Yu. Film-Grain Noise and Signal-to-Noise Ratio. — «Optik», 1972, Bd 36, H. 4.
8. С. Карлин. Основы теории случайных процессов. М., «Мир», 1971.
9. В. Ф. Захаренков, Р. П. Филимонов, В. А. Павлючук. Измерение спектров Винера фотографических шумов. — «Оптико-мех. пром-сть», 1973, № 2.
10. Ю. Н. Гороховский, Р. П. Филимонов. Некоторые результаты измерения спектров Винера фотографических шумов. — «Оптико-мех. пром-сть», 1973, № 10.

*Поступила в редакцию 8 июля 1974 г.,
окончательный вариант — 28 февраля 1975 г.*

УДК 62-50

А. М. АЗИЗОВ, А. Г. КУРИЦЫН

(Ленинград)

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вопросы представления случайных процессов имеют большое значение в задачах управления, при моделировании на ЭВМ динамики систем, параметры и входные воздействия которых являются случайными процессами.