

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Марчук, Ю. П. Дробышев. Некоторые вопросы линейной теории измерений.— «Автометрия», 1967, № 3, с. 24—31.
2. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
3. Л. В. Канторович, Г. П. Акимов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., «Наука», 1959.
4. М. К. Гавурин. О k -кратно линейных операциях в пространстве Банаха.— «ДАН», 1939, т. 22, № 4, с. 547—551.
5. M. D. Majergois, I. N. Moltschanov. Über die entartete (mehrfache) Lösung nichtlinearer System und das Verfahren zu ihrer Bestimmung.— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg, 17, 1973, Heft 1, Seite 85—97.

Поступила в редакцию
13 мая 1975 г.

УДК 62.506.1+681.3.01

В. П. БУДЯНОВ, А. О. ЕГОРШИН, Н. П. ФИЛИПОВА

(Новосибирск)

О ПРЯМОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В статье рассматривается новый подход к численному решению ряда задач анализа и синтеза динамических систем одного класса, описываемых линейными дифференциальными уравнениями (ДУ). Статистической основой предлагаемых методов оптимизации динамических систем (ОДС) является метод максимального правдоподобия (ММП). Центральная из рассматриваемых задач — задача оптимальной и достаточно оперативной идентификации (оценивания коэффициентов ДУ) динамических систем указанного класса при наличии значительных помех в измерительной информации (ИИ) — регистрациях входных и выходных сигналов. Известные общие методы задач ОДС (принцип максимума (квазилинеаризация [1, 2]) весьма сложны и могут быть практически применимы лишь в достаточно простых случаях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Подход, используемый здесь, является следствием попытки найти численный метод решения совокупности обратных задач (ОЗ) для данного объекта — оценивание его оператора или входного сигнала по зашумленным исходным данным — с максимальным и адекватным привлечением априорной информации об исследуемой системе. Разработанные численные методы решения некоторых задач ОДС основаны на непосредственном использовании его описания в виде ДУ вместе с явным решением соответствующих вариационных задач, сводимых обычно [1—3] к двухточечным краевым задачам.

Со статистической точки зрения здесь решается специальная задача оценивания коэффициентов авторегрессионной модели, не исследованная в общем виде в литературе. Простой частный случай (он будет отмечен в статье) был исследован в работах [4, 5]. Статистические свойства оценок параметров динамических систем, которые могли бы быть получены применением ММП к этой задаче в общем случае, были ис-

следованы в [6]. Метод эффективного вычисления таких оценок был дан впервые вместе с постановкой этой задачи в работе [7]. В последующих работах [8—10] рассмотрены некоторые вопросы реализации и применения разработанного подхода для решения ряда задач ОДС, характерных для управления и автоматизации научно-технических экспериментов.

Настоящая статья имеет своей целью дать общую характеристику предложенного метода идентификации и оптимизации динамических систем в соответствии с новыми результатами, касающимися его реализации и применения.

Наиболее важной характеристикой того или иного метода идентификации (МИ) для оценки его потенциальных возможностей в борьбе с помехами является фактически используемая им априорная информация (АИ) об объекте. В литературе, в том числе и в обзорных работах (см., например, [1, 2, 11—13]), такой общей классификации МИ с позиций регуляризации, адекватности использования АИ уделяется недостаточное внимание. В этой статье представляется необходимым кратко остановиться на ней.

2. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

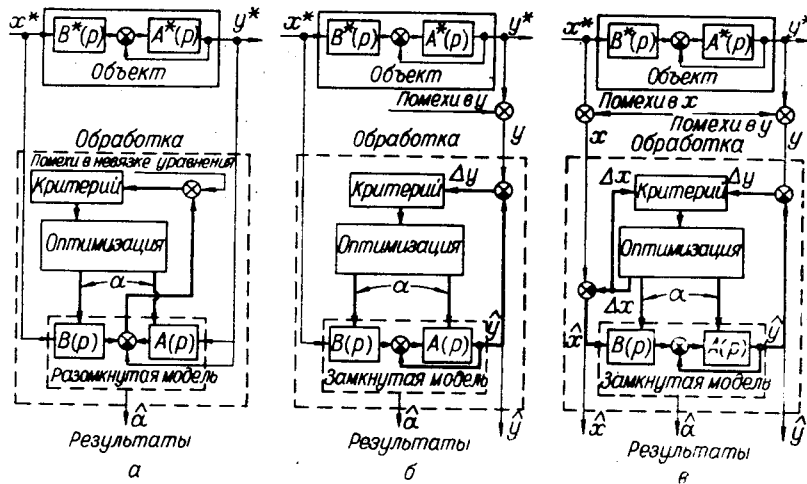
Помехоустойчивость решения ОЗ определяется объемом АИ, используемой в процедуре поиска решения; близость математического ожидания решения к истинному тесно связана с адекватностью АИ реальным свойствам решения. Во многих практических постановках ОЗ вообще и идентификации в частности проблемой является не недостаток АИ, а трудность непосредственного использования более или менее специфической АИ при поиске решения ОЗ с помощью общих методов. Практические успехи в решении различных ОЗ тесно связаны с разработкой соответствующих специализированных алгоритмов применительно к различным типам и способам задания конкретной АИ.

В настоящей работе предлагается специализированный практический метод решения ОЗ идентификации в постановке, типичной для некоторых задач управления: априори известно, что объект описывается линейным ДУ заданного порядка. Прежде чем перейти к постановке решаемой задачи ОДС, остановимся кратко на принципах оптимизации в МИ с точки зрения использования в них АИ указанного вида. Можно отметить лишь работы [7, 14], где обращено внимание на некоторые черты такой классификации МИ.

3. ЗАМКНУТЫЕ И РАЗОМКНУТЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Упомянутая классификация МИ отражена на рисунке. Сущность каждого принципа оптимизации иллюстрируется на рисунке структурным представлением априорной математической модели (ММ) объекта, используемой для его идентификации. Процесс оптимизации изображен в виде контура обратной связи, предназначенной для компенсации помех.

Методы I группы (см. рисунок, а) мы называем разомкнутыми. Этот термин (см. [7, 14]) хорошо отражает сущность этих методов, называемых также методами дифференциальной аппроксимации [1, 2]. Эти методы используют разомкнутую ММ, а помехи в исходных сигналах не компенсируются процессом оптимизации, они находятся вне соответствующего контура обратной связи. Эти методы называют также методами с обобщенной ошибкой (см., например, [12, 15]). В свете нашего рассмотрения этот термин представляется явно неудачным



Принципы оптимизации в методах оценивания коэффициентов дифференциальных уравнений динамических объектов:
 а — разомкнутые методы (дифференциальная аппроксимация); б, в — замкнутые методы (б — по выходному сигналу, в — по выходному и входному сигналам).

и вводящим в заблуждение. Основные практически ценные качества разомкнутых методов — сравнительная простота и оперативность соответствующих алгоритмов оценивания, благодаря чему эти методы оказались наиболее глубоко разработанной группой ММ. Отметим, что один из способов реализации этого подхода непосредственно характеризуется схемой рисунка, а, т. е. использует систему автоподстройки модели (см., например, [15]). Это также вводит в заблуждение некоторых авторов, не отличающих разомкнутости этой модели, неадекватности ее структуры, априорно предполагаемой структуре объекта [15]. Главный недостаток разомкнутых МИ хорошо известен — малая помехоустойчивость, смещенность оценок.

Методы, характеризуемые рисунками б, в, мы называем замкнутыми методами. Эти МИ используют замкнутую ММ, адекватную априорно предполагаемой структуре объекта; процесс оптимизации определяет обратную связь для непосредственной компенсации помех в ИИ. Рисунок, б характеризует методы, которые в этот контур обратной связи включают лишь выходной сигнал объекта. Наиболее распространенный способ реализации этого подхода непосредственно иллюстрируется схемой рисунка, б и носит название метода настраиваемой модели. Этому методу уделено большое внимание в силу его идейной простоты и гибкости с точки зрения непосредственного использования в соответствующих задачах управления. Имеются значительные успехи в реализации этого метода [16, 17]. Основные проблемы — обеспечение сходимости и повышение быстродействия в общих случаях.

Методы, замкнутые по входному и выходному сигналам (см. рисунок, в), являются наиболее универсальными. Одновременно с идентификацией объекта решается и задача фильтрации помех в ИИ. Используемый этими методами принцип оптимизации для оценивания параметров обуславливает высокую помехоустойчивость соответствующих оценок. Разработан лишь общий подход к решению задачи идентификации в такой постановке. Этот подход применим к динамическим системам широкого класса и основан на сведении (например, с помощью принципа максимума) задачи ОДС (вариационной задачи с ограничениями в виде дифференциальных уравнений) к двухточечной краевой задаче. Соответствующие численные методы, трудности их реализации хорошо

освещены в [1]. Один из приближенных методов предполагает использование алгоритмов нелинейной калмановской фильтрации [1].

Более детальная классификация МИ [11], а именно рассмотрение большого числа промежуточных методов, имеющих своей целью обойти те или иные трудности в реализации и использовании непосредственных подходов, охарактеризованных выше, выходит за рамки настоящей статьи.

Перейдем к постановке решаемой здесь задачи. Для этого, в заключение проведенного выше обзора основных подходов к оцениванию параметров, отметим характерные черты формулировок задач оптимизации, соответствующих рассмотренным выше трем группам МИ. Это делается в табл. 1, в которой указанные формулировки даны в максимально упрощенной форме.

Таблица 1

Характеристика МИ		Критерий	Ограничения
I	Разомкнутые МИ	$\ F(A\hat{y} + \hat{y} - B\hat{x})\ ^2$	$x - \hat{x} = 0, y - \hat{y} = 0$
II	Замкнутые МИ	По выходному сигналу $\ y - \hat{y}\ ^2$	$x - \hat{x} = 0,$ $A\hat{y} + \hat{y} - B\hat{x} = 0$
III		По выходному и входному сигналам $\frac{1}{\sigma_y^2} \ y - \hat{y}\ ^2 +$ $+\frac{1}{\sigma_x^2} \ x - \hat{x}\ ^2$	$A\hat{y} + \hat{y} - B\hat{x} = 0$

Оператор F в формулировке критерия разомкнутых МИ введен для обозначения их большего разнообразия, связанного с различными линейными преобразованиями сигналов x и y . Небезынтересно отметить иллюстрируемую таблицей своего рода противоположность разомкнутых МИ и методов III группы.

Третья строка табл. 1 представляет собой постановку задачи ОДС, решаемой в настоящей работе. Ниже следует необходимая ее детализация.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассматриваемая задача ОДС решается в дискретной постановке, когда ИИ представляет собой регистрируемые с помехами, равноотстоящие по времени отсчеты наблюдаемых сигналов. Обозначим дискретность точек фиксации отсчетов сигналов по оси времени через Δ_1 , а их число в интервале наблюдения через N , где N — целая часть от числа T/Δ_1 (интервалом наблюдения будем считать интервал $(0, T)$). Сигналы будем обозначать малыми латинскими буквами. Векторы размерности N — отсчеты сигналов в интервале наблюдения — будем обозначать прописными символами и называть реализациями. Будем различать истинные (например, X^*, Y^*), исходные (X, Y) и сглаженные (\tilde{X}, \tilde{Y}) реализации сигналов, их производных и т. д. Предполагается, что (это и есть та АИ, которую мы хотим использовать):

$$1) Y = Y^* + v, \quad X = X^* + z, \quad (1)$$

где v и z — реализации помех $N(0, K_y)$ и $N(0, K_x)$;

II) истинные сигналы (объект) описываются уравнением

$$y^* + \sum_{i=1}^n a_i^* y^{*(i)} = \sum_{i=0}^m b_i^* x^{*(i)} \text{ для } t \in (0, T), \quad (2)$$

где n и m — заданные числа — «порядки» левой и правой частей ДУ объекта;

III) истинные сигналы имеют определенную степень гладкости, в соответствии с которой может быть выбрана величина Δ такая, что с точностью до членов высшего порядка малости истинные сигналы в любом скользящем интервале длины $(n+1)\Delta$, принадлежащем интервалу наблюдения $(0, T)$, могут быть представлены с помощью разложения в ряд Тейлора степени n относительно средней точки соответствующего интервала:

$$y^*(t + \tau) = \sum_{i=0}^n y^{*(i)}(t) \tau^i / i!, \quad x^*(t + \tau) = \sum_{i=0}^n x^{*(i)}(t) \tau^i / i!, \quad (3)$$

$$t \in (\varepsilon, T - \varepsilon), \quad \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varepsilon = (n + 1) \Delta / 2.$$

Наиболее интересен случай так называемых равнооточных измерений, когда $K_y = \sigma_y^2 I$ и $K_x = \sigma_x^2 I$ (I — единичная матрица). Более общий случай, на который мы обращаем внимание, когда K_y и K_x — диагональные матрицы (некоррелированные измерения), а также случай помех с малым интервалом корреляции, сравнимым с величиной ε (см. п. 6.3).

Главное в предположении III — фиксация величины ε , определяющей интервал заданной степени гладкости сигналов и максимальную величину интервала дискретизации сигналов по оси времени.

Решается следующая общая задача ОДС:

исходя из априорной модели (I—III) наблюдаемого процесса, найти максимально правдоподобные оценки его составляющих: сигналов x^* , y^* и параметров a_i^* , b_i^* системы (2). Минимизируется

$$J = \|Y - \hat{Y}\|_{K_y}^2 + \|X - \hat{X}\|_{K_x}^2 \quad (4)$$

при условиях

$$\hat{Y} + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i \hat{Y}^{(i)} = \sum_{i=0}^m \hat{b}_i \hat{X}^{(i)}. \quad (5)$$

Для формулировки задачи необходимо задание чисел n и m , определяющих структуру объекта заданного вида (2). При необходимости идентификации этой структуры (чисел n и m) решение задачи (4), (5) традиционным образом используется как инструмент для применения методов проверки гипотез и критериев значимости (см., например, [11, 12]).

Необходимо отметить характерную особенность фильтрации помех во входном сигнале динамической системы. Составляющая помех в этом сигнале, спектр которой лежит вне полосы пропускания исследуемого объекта, но внутри полосы частот, определяемой заданной степенью гладкости сигналов (3), естественно, не будет «отфильтровываться» от входного сигнала, останется в его оценке, поскольку эта составляющая помех удовлетворяет всем априорным предположениям об истинной составляющей X^* измеренного входного сигнала.

В заключение с помощью табл. 2 охарактеризуем круг задач оценивания, которые решаются в соответствии с поставленной общей задачей ОДС (4), (5). В этой таблице через α обозначен набор (вектор) параметров a_i , b_i системы. В задаче 4 через X_A обозначено априорное решение ОЗ относительно входа, используемое для вычисления регуляризованного решения. Основой для выбора X_A и K_x в этом случае

Таблица 2

Задачи	Исходные данные	Оценки	Литература
I Основные:			
1) Сглаживание	X, Y, α^*	\hat{X}, \hat{Y}	[7—10]
2) Идентификация	$X, Y, (\alpha)$	$\hat{X}, \hat{Y}, \hat{\alpha}$	[7—10]
3) Задача Винера, синтез фильтра	$R_{xx}, R_{xy}, (\alpha)$	$\hat{R}_{xx}, \hat{R}_{xy}, \hat{\alpha}$	
4) Обратная задача с регуляризатором нулевого порядка	X_A, Y, α	\hat{X}, \hat{Y}	[10]
II Следствия:			
5) Вычисление импульсной или переходной функции процесса	Исходная задача 2, 3	$H'(\hat{\alpha}), H(\hat{\alpha})$	[4]
6) Дифференцирование сигналов	1, 2, 4	$\hat{Y}^{(k)}, \hat{X}^{(l)}$	[8, 9]
7) Вычисление функций процесса	1, 2, 4		[9, 10]
III Специализированные задачи обработки ИИ	1—7		[10]

является метод статистической регуляризации (см., например, [18]). В задаче 3 через R_{yx}, R_{xx} обозначены экспериментальные (исходные) корреляционные функции, а через $\hat{R}_{yx}, \hat{R}_{xx}$, следовательно, их уточнения (оценки). В последнем столбце табл. 2 указаны работы, в которых рассматриваются некоторые вопросы, связанные с решением соответствующих задач в исследуемой здесь постановке.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что постановка задачи сглаживания близка к постановке задачи калмановской фильтрации в интегральном виде (см., например, [3]) для неизмеряемого входа в виде белого шума. В нашей постановке в этом случае надо положить $X=0$, т. е. истинным (в нашей терминологии) входным сигналом калмановской модели системы будет считаться ненаблюдаемый сигнал $X^*=-x$.

5. МЕТОД РЕШЕНИЯ

5.1. Дискретизация. Пусть дискретность $\Delta_1=\Delta$. Назовем скользящей выборкой (СВ) порядка p вектор из p подряд взятых отсчетов реализации. В реализации длины N содержится $M=N-p+1$ СВ. Нумеровать их можно, например, по номеру первого отсчета. СВ реализации Y и X обозначим через v_y и v_x , их объединение — через v :

$$v_{y,(k)}^T = |Y_k \dots Y_{k+l}|, \quad v_{x,(k)}^T = |X_k \dots X_{k+l}|, \quad (6)$$

$$v_{(k)}^T = |v_{y,(k)}^T \dots v_{x,(k)}^T|, \quad k = \overline{1, M},$$

где $l=p-1$. Для средних точек интервалов времени, покрываемых СВ, введем векторы производных:

$$s_y^T = |y \dots y^{(n)}|, \quad s_x^T = |x \dots x^{(n)}|, \quad s^T = |s_y^T \dots s_x^T|. \quad (7)$$

(Мы опустили указание аргумента.)

Пусть $p=n+1$ (т. е. $l=n$). Предположение III в п. 4 дает возможность записать для истинных сигналов:

$$v_y^* = P_1 s_y^*, \quad v_x^* = P_1 s_x^*, \quad v^* = P_2 s^*, \quad P_2 = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

и

$$s^* = P v^*, \quad P = P_2^{-1}. \quad (9)$$

Элементы матрицы P_1 легко определяются из (3). Формула (9) в данном случае означает выражение производных с помощью центральных разностей.

Пусть теперь дискретность фиксации отсчетов по оси времени Δ_1 меньше Δ настолько, что $[n\Delta/\Delta_1] > n$ ($[*]$ — целая часть числа). Тогда в силу (3) мы можем выражения (8) записать для СВ порядка $p=l+1$ с $l=[n\Delta/\Delta_1]$. В этом случае в формуле (9) под P будем подразумевать квазиобратную матрицу $P=(P_2^T P_2)^{-1} P_2^T$. Таким образом, в общем случае для выражения производных истинных сигналов через отсчеты последних используется скользящая аппроксимация истинных сигналов заданной степени гладкости полиномами соответствующей степени (n).

Обозначим теперь

$$\alpha^T = |1; a_1; \dots; a_n; b_0; b_1; \dots; b_n| = |a^T; b^T|, \overline{b_{m+1}}, b_n = 0. \quad (10)$$

Тогда уравнение объекта (2) для зафиксированных моментов времени [средних точек интервалов, покрываемых (СВ)] запишется так:

$$(\alpha^*)^T s^* = 0 \quad \text{или} \quad (\alpha^*)^T P v^* = 0, \quad (\eta^*)^T v^* = 0, \quad (11)$$

где

$$(\eta^*)^T = |(c^*)^T| (d^*)^T| = |c_1^*| \dots |c_p^*| d_1^*| \dots |d_p^*| = (\alpha^*)^T P \quad (12)$$

— вектор параметров формального дискретного описания объекта

$$\sum_{i=1}^p c_i^* Y_{k+i-1}^* - \sum_{i=1}^p d_i^* X_{k+i-1}^* = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (13)$$

5.2. Оптимизация. Объединим все СВ в реализациях Y и X в матрице V размерности $2p \times M$, которую назовем матрицей СВ:

$$V = |v_{(1)}| \dots |v_{(M)}| = \begin{vmatrix} v_{y,(1)} & \dots & v_{y,(M)} \\ -v_{x,(1)} & \dots & -v_{x,(M)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_y \\ -V_x \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Сами реализации Y и X объединим в векторе исходных данных размерности $2N$:

$$Z^T = |Y^T| - |X^T|. \quad (15)$$

В соответствии с (4), (5) решаем следующую задачу: минимизировать

$$J = \|Z - \hat{Z}\|_{K^{-1}}^2 \quad \text{при условиях} \quad \hat{V}^T P^T \hat{\alpha} = 0, \quad (16)$$

где K — блочно-диагональная матрица из матриц K_y и K_x (см. (4)).

Введем матрицы

$$C(c) = \begin{vmatrix} c_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ c_p & & c_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_p \end{vmatrix}, \quad D(d) = \begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ d_p & & d_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_p \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} C \\ D \end{vmatrix} = A(\alpha). \quad (17)$$

Матрицы C и D имеют размерность $N \times M$. Матрицы такой структуры мы называем матрицами скользящего вектора [7, 8]. Совокупность соотношений (13), определяющих дискретное описание объекта, можем теперь записать в виде

$$(A^*)^T Z^* = 0 \quad \text{или} \quad A^T (\alpha^*) Z^* = 0, \quad (18)$$

а решаемую задачу минимизации представить так: минимизировать

$$J = \|Z - \hat{Z}\|_{K^{-1}}^2 \quad \text{при условиях} \quad A^T (\hat{\alpha}) \hat{Z} = 0. \quad (19)$$

Минимизация осуществляется либо только по \hat{Z} (сглаживание), либо по $\hat{\alpha}$ и \hat{Z} (идентификация и сглаживание, полная задача ОДС).

Решение задачи сглаживания (когда вектор $\hat{\alpha}$ в (19) задан равным некоторому априорному вектору α) может быть получено без особого труда (см. приложение):

$$\hat{Z} = \hat{Z}(\alpha) = (I - KA(A^TKA)^{-1}A^T)Z = \Pi_{\perp}(A)Z, \quad (20)$$

где матрица $\Pi_{\perp}(A)$ — оператор проектирования в евклидовом пространстве исходных данных $E_{2N} = E_{yN} + E_{xN}$ с нормой K на подпространство A_{\perp} , ортогональное подпространству A , натянутому на векторы — столбцы матрицы A . Из (20) сразу получаем, что минимум J по \hat{Z} — квадрат «расстояния» от Z до подпространства $A_{\perp}(\alpha)$ — равен

$$R^2(\alpha) = \min_{A^T\hat{Z}=0} J = Z^T A (A^TKA)^{-1} A^T Z = \alpha^T P V \Gamma^{-1} V^T P^T \alpha, \quad (21)$$

где $\Gamma = \Gamma(\alpha) = A^TKA$.

Для полного решения задачи ОДС (19) надо найти такой вектор $\hat{\alpha}$, чтобы расстояние $R(\hat{\alpha})$ было минимальным. Таким образом, задача условной минимизации (19) по \hat{Z} и $\hat{\alpha}$ сводится к задаче безусловной минимизации по α функционала (21) и последующему вычислению реализации \hat{Z} по формуле (20) с $\alpha = \hat{\alpha}$.

Искать условия минимума функционала $R^2(\alpha)$ путем его непосредственного дифференцирования по α — громоздкая задача. Гораздо проще найти эти условия решением задачи (19) с помощью множителей Лагранжа (МЛ), т. е. минимизировать по \hat{Z} , α и λ (λ — вектор МЛ) функционал

$$J_{\perp} = J/2 + \lambda^T A^T(\alpha) \hat{Z} = J/2 + \lambda^T \hat{V}^T P^T \alpha. \quad (22)$$

Напомним еще об условиях (10), при которых решается эта задача: $a_0 = 1$, $\overline{b_{m+1}}, \overline{b_n} = 0$. Эти условия и другие, подобные им (например, некоторые коэффициенты ДУ объекта могут быть заданы априори), нетрудно учесть, используя соотношения:

$$\alpha = \alpha^0 + E\alpha^1, \quad \partial J / \partial \alpha^1 = (\partial \alpha) / (\partial \alpha^1) \cdot (\partial J) / (\partial \alpha), \quad \partial \alpha / \partial \alpha^1 = E^T, \quad (23)$$

где α^0 — слагаемое вектора α , заданное априори, α^1 — варьируемые параметры, E — соответствующая матрица перехода.

Непосредственным дифференцированием (22) по варьируемым параметрам (\hat{Z} , α^1 , λ) и исключением переменных можно получить (см. приложение) следующее уравнение для оценок $\hat{\alpha}$, называемое далее уравнением идентификации (УИ):

$$d\hat{R}^2/d\alpha^1 = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} V^T P^T \hat{\alpha} = Q(\hat{\alpha}) \alpha^1 + Q_0(\hat{\alpha}) \alpha^0 = 0, \quad (24)$$

где

$$\hat{\Gamma} = \Gamma(\hat{\alpha}), \quad Q(\hat{\alpha}) = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} V^T P^T E, \quad Q_0(\hat{\alpha}) = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} V^T P^T.$$

Решение этого уравнения относительно $\hat{\alpha}^1$ и последующее вычисление $\hat{Z}(\hat{\alpha})$ [по формуле (20) с $\alpha = \hat{\alpha} = \alpha^0 + E\hat{\alpha}^1$] полностью решают поставленную задачу ОДС.

Нетрудно использовать еще дополнительно статистическую регуляризацию задачи по параметрам ДУ, если о них, кроме АИ о детерминированных ограничениях (23), имеется и статистическая АИ в виде корреляционной матрицы K_{α} априорного гауссовского распределения параметров α^1 . Математическое ожидание его, естественно, может быть учтено непосредственно в α^0 . Будем максимизировать в этом случае не

функцию правдоподобия, а апостериорную вероятность в соответствии с формулой Байеса. Придем к критерию

$$J = \|Z - \hat{Z}\|_{k-1}^2 + \|\alpha_1\|_{k-\alpha}^2, \quad (25)$$

который и будем использовать в формулировках (4), (16), (19). В этом случае в УИ (24) матрица $Q(\hat{\alpha})$ будет иметь вид

$$Q(\hat{\alpha}) = E^T P \hat{V} \Gamma^{-1} V^T P^T E + K_{\alpha}^{-1}. \quad (26)$$

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

6.1. О решении УИ. Отметим сначала один важный частный случай. Он рассматривался и изучался в литературе [4, 5, 7] и характеризуется тем, что прост в реализации. Речь идет о случае, когда используемые СВ считаются независимыми, т. е., например, минимизируется критерий (ср. (16))

$$J = \|V - \hat{V}\|^2 \text{ при условиях } \hat{V}^T P^T \hat{\alpha} = 0, \overline{b_{m+1}}, \overline{b_n} = 0, \quad (27)$$

где имеется в виду квадратичная норма матрицы. Если в матрицу V включены все СВ, как в нашей постановке [см. (14) и (6), где $k = \overline{1, M}$], то предположение о независимости этих выборок несправедливо и в этом случае (27) следует рассматривать как метод наименьших квадратов, когда мы не интересуемся априорным распределением помех. Если же в матрицу СВ V включить лишь непересекающиеся СВ (т. е. в (6) $k = 1 + pi, i = 0, 1, 2, \dots$), то в этом случае при использовании той же ИИ мы пренебрегаем значительной частью АИ о динамической связи между выборками, даваемой дискретным описанием (13), т. е. минимизируем J (см., например, (16)), отказываясь от значительной части априорных ограничений, которые, как указывалось в п. 2, определяют помехоустойчивость решения любой ОЗ.

Задача (27) представляет собой, при ее внешнем сходстве с задачей (16), существенно более простую задачу оптимизации в пространстве СВ, в то время как задача (16) — это оптимизация (оптимальное проектирование) в пространстве реализаций исходных данных [7]. Задача (27) означает поиск в пространстве СВ гиперплоскости, определяемой ортогональным к ней направлением $\hat{\alpha}$, от которой СВ, включенные в матрицу V , минимально удалены. Задача (27) может быть сведена, как и в нашем случае, к безусловной задаче минимизации. Минимизируемый функционал — сумма квадратов расстояний СВ от искомой гиперплоскости — здесь имеет вид

$$r^2(\alpha^1) = \frac{(\alpha^1)^T E^T P V V^T P^T E \alpha^1}{(\alpha^1)^T E^T P P^T E \alpha^1} = \frac{(\alpha^1)^T Q \alpha^1}{(\alpha^1)^T G \alpha^1}, \quad (28)$$

где в данном случае E — блочная матрица размерности $2(n+1) \times (n+m+2)$, верхний блок которой $(n+m+2) \times (n+m+2)$ есть I , а нижний блок — нулевой. Как известно [19], минимум функционала вида (28) достигается на $\hat{\alpha}^1$, определяющем собственное направление пучка матриц $Q - \mu G$, соответствующее его минимальному характеристическому числу μ . Итерационная процедура (ИП) последовательных приближений, сходящаяся при известных условиях к этому направлению $\hat{\alpha}^1$, хорошо известна (см., например, [20]):

$$\bar{\alpha}_{[k+1]}^1 = Q^{-1} G \bar{\alpha}_{[k]}^1. \quad (29)$$

Кроме тесной идейной связи с задачей, решаемой в настоящей работе, этот случай интересен, прежде всего, тем, что если в нашем случае

$\alpha^0=0$ и E , как определено в (28), т. е. $\hat{\alpha}$ ищется с точностью до постоянного множителя с последующей нормировкой к $\hat{\alpha}_1=1$ (см. (10)), то наиболее эффективная ИП решения УИ выражается также формулой (29) с

$$Q = Q_{[k]} = Q(\hat{\alpha}_{[k]}) = E^T P V \Gamma^{-1} V^T P^T E \quad (30)$$

(см. (21)). Такую ИП можно охарактеризовать как решение нелинейной задачи поиска собственного направления.

Задача статистического оценивания типа (27) почти не освещена в специальной литературе. (Можно отметить лишь работу [21], где она формулируется и предлагается алгоритм вида (29) для вычисления оценок.) По-видимому, этим объясняется незаслуженное, на наш взгляд, невнимание к этому МИ, предложенному еще в работах [4, 5, 7]. По способу накопления измерительной информации в матрице вида Q из (28) этот МИ близок к широко используемому разомкнутому МИ, основанному на оценивании коэффициентов линейной регрессии из соответствующей системы алгебраических уравнений и приводящему, как известно, к смещенным оценкам (см. п. 3). Метод идентификации (27) использует авторегрессию только в пределах отдельных СВ (а не в пределах всей реализации, как рассматривается в этой статье); все же этот МИ более помехоустойчив, чем близкий к нему разомкнутый МИ. Это подтверждают и теоретические, и экспериментальные исследования [5, 7].

Вернемся к нашей задаче. Как показывают машинные эксперименты, ИП (29), (30) сходится к нужному решению УИ (24) при весьма больших (в десятки раз, например, для объекта второго порядка) отклонениях начальных условий $\alpha_{[0]}$ этой ИП от искомого решения и при значительных дисперсиях помех в ИИ (до десятков процентов относительных величин σ_y и σ_x от амплитуд сигналов y и x). Ошибка оценивания, ее статистические свойства определяются адекватностью АИ (II—III) истинной структуре наблюдаемой системы и свойствами используемого критерия ММП (4) (см. [6]).

Вектор оценок $\hat{\alpha}$ неизвестных параметров в случае, когда используется ИП (29), получается, как уже говорилось, нормировкой вектора $\bar{\alpha}$ этой ИП так, чтобы его первая компонента была равна 1 (см. (10)), т. е. $\hat{\alpha} = \bar{\alpha} : \alpha_1$. Требование $\alpha_1=1$, как априорное ограничение, можно включить в самом начале в условия типа (23). В этом случае уравнение (24) должно решаться другими методами последовательных приближений, например, использующими полученное выражение градиента (25). Анализ выражений (24), аналогии с описанным выше частным случаем (ср. (21), (28)), которые подтверждаются, в частности, эффективной сходимостью ИП (29), (30), позволяют использовать выражение для второй производной минимизируемого функционала по α^1 :

$$\partial^2 J / \partial (\alpha^1)^2 = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} \hat{V}^T P^T E + K_{\alpha}^{-1} \quad (31)$$

и искать решение уравнения (25) с помощью ИП Ньютона:

$$\alpha_{[k+1]}^1 = \alpha_{[k]}^1 - (\partial^2 J_{[k]} / \partial (\alpha^1)^2)^{-1} \cdot \partial J_{[k]} / \partial \alpha^1. \quad (32)$$

Градиент вычисляется в соответствии с формулами (24) или (П.2) (в приложении) в зависимости от режима работы системы идентификации: соответственно режим «on line» — последовательная обработка ИИ, рекуррентное оценивание — или режим «off line» — апостериорная обработка ИИ после ее накопления. Сходимость ИП (32), как и следовало ожидать, обусловлена более жесткими условиями по сравнению с ИП вида (29), (30).

6.2. О единственности решения УИ. Этот вопрос, естественно, эквивалентен вопросу об унимодальности, единственности экстремума

(минимума) функционала J при используемых нами априорных ограничениях на реализации и на искомые параметры (см. (16), (23), (25)). Хорошо известна сложность ответа на этот вопрос аналитическими методами для нелинейных задач оценивания, с которой мы имеем дело и при оптимальном оценивании параметров ДУ. Исследования этого вопроса представляют собой специальную задачу, решаемую обычно общими методами и связанную с понятием идентифицируемости (см., например, [3]). Общие результаты по этому вопросу хорошо известны [1—3], поэтому мы на них не останавливаемся. Идентифицируемость объекта связана как с его внутренней структурой (наличие, например, сокращаемых сомножителей в числителе и знаменателе передаточной функции), так и с информативностью входного сигнала [3, 22]. В нашем случае, а также в частном случае, рассмотренном выше, неидентифицируемость объекта приводит к кратности минимального характеристического числа пучка $Q-\mu G$. Практически же малоинформативный входной сигнал, плохо возбуждающий объект во всей его полосе пропускания, приводит к неразличимой в помехах близости наименьших характеристических чисел. Машинные эксперименты хорошо подтверждают это. Для объектов второго порядка и третьего без воздействия по производной ($m=0$) «скачок» является достаточно хорошим входным сигналом.

Надо заметить, что мы в постановке задачи и при численном ее решении не использовали АИ еще об одном факте, который имеет место в подавляющем большинстве практических приложений: коэффициенты ДУ должны определять устойчивый объект, т. е. удовлетворять условиям типа условий Раусса—Гурвитца [19]. В нашей постановке эту АИ надо использовать непосредственно в процессе поиска решения УИ, определяющего минимум функционала R . Хорошо известно, насколько трудно при численном поиске экстремума использовать различные специфические условия, тем более в нелинейных задачах. Условия устойчивости идентифицируемого объекта дают очень сильные ограничения на решение УИ и в большинстве случаев обеспечивают его единственность. И наоборот, малоинформативный входной сигнал, сложный объект, высокий при этом уровень помех могут привести к тому, что найденный минимум функционала R^2 при неиспользовании условий устойчивости и т. д. будет соответствовать коэффициентам ДУ, не имеющим физического смысла в конкретной задаче. Машинные эксперименты хорошо подтверждают все сказанное.

Еще об одной проблеме, связанной с решением УИ,—о требовании достаточно высокой точности вычислений составляющих этого уравнения. Повышение требований к точности вычислений—это та «цена», которую приходится «платить» за полученное явное решение задачи ОДС, допускающее оперативную вычислительную реализацию (см. п. 6.3). Например, для объектов 3-го порядка точность, даваемая ЭВМ с семью десятичными значащими цифрами, может оказаться иногда недостаточной. Требования к точности вычислений должны учитываться при программировании формул.

6.3. О практической реализуемости метода. Другая, кроме решения УИ, вычислительная проблема, возникающая при реализации рассматриваемого численного метода решения задачи ОДС, связана с необходимостью обращения матрицы $\Gamma=A^T K A$ большой размерности $M \times M$ (см. (20), (24)). Использование для этих вычислений обычных стандартных программ ограничивает возможности применения рассматриваемого метода решения задачи ОДС при обработке длинных реализаций сигналов, так как требуется очень большие память и время ЭВМ. Именно такая ситуация имеет место, например, для общего случая коррелированных измерений, а также для случая многомерного объекта, когда приходится иметь дело с обращением матриц, для обращения ко-

торых не удается найти эффективный специфический алгоритм. Поэтому упомянутые более общие случаи рассматриваемой задачи ОДС нельзя считать практически решенными, хотя соответствующие формулы легко могут быть получены (см., например, [8]).

Эффективные рекуррентные алгоритмы вычислений могут быть построены [10] для случая некоррелированных, а тем более равноточных измерений (см. п. 4). В первом случае симметричная обращаемая матрица Γ является «полосовой»: содержит только $2p-1$ отличных от нуля диагоналей; во втором — кроме того, еще и «ленточной» [8]: элементы, принадлежащие одной диагонали, равны между собой (теплитцева матрица). Такая структура обращаемой матрицы позволяет эффективно использовать для рекуррентного ее обращения путем последовательного повышения порядка обращаемой матрицы известную формулу Фробениуса [19]. Это приводит к компактным алгоритмам последовательной обработки ИИ и, в частности, к рекуррентным алгоритмам динамической фильтрации [10].

В конкретных ситуациях приемлемые по сложности алгоритмы вычислений могут быть получены и для других специальных случаев. Например, упоминавшийся при постановке задачи случай, когда помехи коррелированы, но интервал корреляции невелик по сравнению с интервалом ϵ заданной степени n гладкости сигналов. В этом случае K — полосовая матрица с шириной полосы, определяемой интервалом заметной корреляции, Γ — тоже полосовая матрица, но с более широкой «полосой». Типичный пример такой ситуации: помеха представляется как выход динамической системы, возбуждаемой белым шумом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь кратко рассматриваются общие формулы и соотношения, на которых основаны алгоритмы вычислений, реализующие предложенный метод оценивания параметров и фильтрации. Непосредственное дифференцирование (22) по \hat{Z} , α и λ приводит к следующей системе уравнений (мы используем здесь байесовский функционал J общего вида (25) со статистической регуляризацией по параметрам):

$$\partial J / \partial \hat{Z} = K^{-1}(\hat{Z} - Z) + \hat{A}\hat{\lambda} = 0 = K^{-1}(\hat{Z} - Z) + \Lambda P^T \hat{\alpha}, \quad (\text{П.1})$$

$$\partial J / \partial \alpha^1 = E^T P \hat{V} \lambda + K_{\alpha}^{-1} \hat{\alpha}^1 = 0 = E^T P \Lambda^T \hat{Z} + K_{\alpha}^{-1} \hat{\alpha}^1, \quad (\text{П.2})$$

$$\partial J / \partial \lambda = \hat{V}^T P^T \hat{\alpha} = 0 = \hat{A}^T \hat{Z}, \quad (\text{П.3})$$

где Λ — блочная матрица размерности $2N \times 2p$ из матриц $N \times p$ скользящего вектора λ (ср. (17)):

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_M & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_M \end{vmatrix}.$$

Из (П.1), (П.3) получаем, что

$$\lambda = (\hat{A}^T K \hat{A})^{-1} \hat{A}^T Z = \hat{\Gamma}^{-1} \hat{A}^T Z = \hat{\Gamma}^{-1} \hat{V}^T P^T \hat{\alpha} \quad (\text{П.4})$$

и

$$\hat{Z} = Z - K \hat{A} \lambda, \quad (\text{П.5})$$

откуда следует и (20). Подставляя второе из выражений для λ в (П.2), сразу получаем (24). Заметим, что первое из выражений для $\partial J / \partial \alpha^1$

в (П.2) может быть использовано как формула для вычисления градиента в режиме «off line».

Матрица \hat{V} в соответствии с определениями может быть получена из \hat{Z} . Для преобразования и анализа необходимо следующее выражение для \hat{V} , вытекающее из введенных определений:

$$\hat{V} = V - \Lambda^T K \Lambda. \quad (\text{П.6})$$

Подставляя это в (П.2) вместе с выражением для λ , получим УИ в виде, делающем наглядной связь с отмеченным выше частным случаем [7]:

$$E^T P (V \hat{\Gamma}^{-1} V^T - \Lambda^T K \Lambda) P^T \hat{\alpha} = 0. \quad (\text{П.7})$$

Для указанного же частного случая УИ имеет вид [7]

$$E^T P \left(\frac{V V^T}{\hat{\alpha}^T P P^T \hat{\alpha}} - \lambda^T M \right) P^T \hat{\alpha} = 0,$$

где $\lambda = \frac{V^T P^T \hat{\alpha}}{\hat{\alpha}^T P P^T \hat{\alpha}}$ (ср. также с П.4). Для V — матрицы СВ — можно получить в этом случае

$$\hat{V} = V - P^T \hat{\alpha} \lambda^T = \left(I - \frac{P^T \hat{\alpha} \hat{\alpha}^T P}{\hat{\alpha}^T P P^T \hat{\alpha}} \right) V,$$

т. е. каждая СВ проектируется независимо (ср. с (П.6) и (20)).

Подставляя в (24) выражение для V через \hat{V} из (П.6), получим УИ в следующем виде:

$$\hat{d}R^2/d\alpha^1 = (E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} \hat{V}^T P^T E + K_{\alpha}^{-1}) \alpha^1 + Q_1(\hat{\alpha}) \alpha^1 + Q_0(\hat{\alpha}) \alpha^0 = 0,$$

где

$$Q_1(\hat{\alpha}) = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} \Lambda^T K \Lambda P^T E = E^T P \hat{V} \hat{\Gamma}^{-1} (V - \hat{V})^T P^T E.$$

Симметричная матрица в первом слагаемом этого уравнения, как отмечалось (см. (31)), является хорошим приближением второй производной функционала R по α^1 для использования ее в процедуре последовательных приближений Ньютона (см. п.б.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. П. Сейдж, Дж. Л. Мелса. Идентификация систем управления. М., «Наука», 1974.
2. П. Эйкхофф. Системы идентификации. М., «Мир», 1975.
3. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.
4. M. J. Levin. Estimation of a system pulse transfer function in the presence of noise.— "IEEE Trans. Autom. Control", 1964, vol. AC-9, № 3.
5. M. Aoki, P. C. Yau. On a priori error estimates of some identification methods.— "IEEE Trans. Autom. Control", 1970, vol. AC-15, № 5.
6. M. Aoki, P. C. Yau. On certain convergence questions in system identification.— "SIAM J. Control", 1970, vol. 8, № 2.
7. А. О. Егоршин. Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов.— В кн.: Оптимальные и самонастраивающиеся системы. Новосибирск, Изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1971.
8. В. П. Будянов, А. О. Егоршин. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ.— «Автометрия», 1973, № 1.
9. В. П. Будянов, А. О. Егоршин, В. Я. Цветков. Обработка сигналов в экспериментах с нелинейным электрическим контуром.— «Автометрия», 1973, № 1.
10. В. П. Будянов, А. О. Егоршин, Н. П. Филиппова. О решении с помощью ЦВМ некоторых задач анализа динамических процессов на основе измерительной информации.— В кн.: Некоторые вопросы автоматизации научных исследований. Новосибирск, Изд. ИАиЭ СО АН СССР, 1974.

11. R. E. Neiman, D. G. Fisher, D. E. Seborg. A review of process identification and parameter estimation techniques.—“Int. J. Control”, 1971, vol. 13, № 2.
12. K.—J. Åström, P. Eykhoff. System identification.—“Automatica”, 1971, № 7.
13. A. V. Balakrishnan, V. Peterka. Identification in automatic control system.—“Automatica”, 1969, № 5.
14. К. Б. Норкин. Понсковые методы настройки управляемых моделей в задачах определения параметров объектов.—«Автоматика и телемеханика», 1968, № 11.
15. E. V. Bohn, R. E. Butler, M. R. Mukerjee. Parameter-tracking models for adaptive control systems.—“Proc. Inst. Electr. Eng”, 1966, vol. 113, № 2.
16. В. Н. Петров, В. Ю. Рутковский, И. Н. Крутова. Основные свойства и некоторые вопросы динамики самонастраивающейся системы с моделью.—В кн.: Теория самонастраивающихся систем управления (Труды II Междунар. симп. ИФАК по самонастраивающимся системам). М., «Наука», 1969.
17. А. О. Егоршин, В. А. Иванов. О регуляризации в задаче автоматической настройки параметров модели.—«Автоматика», 1974, № 2.
18. В. Ф. Турчин, В. З. Нозик. Статистическая регуляризация решения некорректных задач.—«Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1969, № 1.
19. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
20. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., Физматгиз, 1963.
21. М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М., «Наука», 1973.
22. К.-Ж. Остром, Т. Болин. Цифровая идентификация линейных динамических систем на основе данных о нормальном режиме работы.—В кн.: Теория самонастраивающихся систем управления. (Труды II Междунар. симп. ИФАК по самонастраивающимся системам). М., «Наука», 1969.

*Поступила в редакцию
17 ноября 1975 г.*

УДК 543.422.519.23

Н. Л. АРЮТКИНА, А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, А. А. КИСЕЛЕВА
(Москва)

ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ФОНА В КОЛИЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ПО СПЕКТРАМ ПОГЛОЩЕНИЯ

Для достижения более точных результатов количественного анализа аддитивных многокомпонентных смесей не полностью известного состава по спектрам поглощения в работе [1] нами была выдвинута идея последовательной обработки экспериментальных данных по методу линейного программирования (МЛП) и алгебраической коррекции фона (АКФ).

В общем случае спектрального анализа с неизвестным фоновым поглощением каждый из этих методов в отдельности не гарантирует получения правильных результатов. Метод АКФ, предложенный еще в 1949 г. [2], дает неопределенный результат, если в используемом аналитическом интервале крутизна фонового спектра оказывается больше, чем у спектра анализируемой смеси. Иначе говоря, применение этого метода возможно, если многочлен, аппроксимирующий фон, имеет меньший порядок, чем алгебраический многочлен, аппроксимирующий спектр анализируемой смеси. Очевидно, это условие не выполняется, если в аналитический интервал попадает полоса поглощения неидентифицированных примесей. С подобным явлением приходится сталкиваться довольно часто, так как обычно аналитические интервалы выбираются только из соображений максимального отличия в спектрах анализируемых компонентов, что минимизирует случайную ошибку определе-