

В. М. ЕФИМОВ, А. М. ИСКОЛЬДСКИЙ, А. А. НЕСТЕРОВ
(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНТУРА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ СЛАБОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1. При измерении параметров плазмы методом лазерного рассеяния пространственное распределение света в выходной плоскости спектрального прибора в общем случае можно представить известной (с точностью до параметров, подлежащих оцениванию) функцией $\varphi(x, y, \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — вектор параметров. Например, если входная щель по высоте заполнена равномерно, рассеяние происходит на электронах плазмы, а регистрация — под углом $\pi/2$, эта функция в первом приближении представляет собой «гауссоиду на пьедестале» с параметрами: α_1 — проинтегрированная по спектру интенсивность рассеянного лазерного излучения, α_0 — полуширина линии, α_2 — интенсивность собственного излучения плазмы в данном диапазоне спектра.

В исследованиях структуры фронта ударных волн естественно проектировать на входную щель рассеянное излучение из зоны скачка. При этом изменяющиеся по высоте выходной щели полуширина линии и ее интенсивность несут дополнительную информацию о распределении плотности и температуры плазмы вдоль линии зондирования. Здесь мы имеем дело с указанным распределением $\varphi(x, y, \alpha)$. Ниже решается следующая задача: каким образом разбить плоскость выходной щели на зоны, чтобы после регистрации светового потока с каждой из них и соответствующей обработки результатов можно было бы получить оптимальную оценку искомых параметров. В схеме регистрации необходимо использовать минимально возможное число регистрирующих фотоприемников. Очевидно, что число фотоприемников не может быть меньше количества параметров, подлежащих оцениванию.

2. В условиях, когда интенсивности световых потоков малы, основным фактором, определяющим точность оценивания параметров, являются флуктуации светового потока, формирующего изображение. Будем предполагать, что изображение формируется пуассоновским потоком с интенсивностью $\varphi(x, y, \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — вектор параметров, один из которых (α_0) подлежит оцениванию.

Поле изображения (рис. 1) разбивается на $m+1$ зону. Зона k ограничена кривыми $h_k(x)$ снизу и $h_{k+1}(x)$ сверху. Световой поток, собираемый с k -й зоны, поступает на k -й фотоприемник. Необходимо так выбрать границы зон $h_k(x)$, чтобы средний квадрат ошибки определения параметра α_0 был минимален.

Функция максимума правдоподобия для рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$\prod_{k=0}^m \frac{\lambda_k^{n_k}}{n_k!} \exp(-\lambda_k).$$

Здесь интенсивность $\lambda_k(\alpha)$ светового потока, поступающего на k -й фотоприемник, определяется соотношением

$$\lambda_k(\alpha) = \int_{-0,5l}^{0,5l} dx \int_{h_k(x)}^{h_{k+1}(x)} \varphi(x, y, \alpha) dy;$$

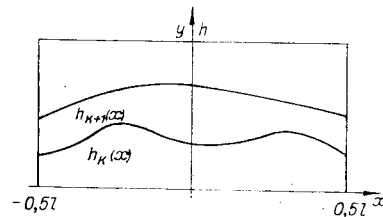


Рис. 1.

n_k — результат измерения светового потока с k -й зоны. Отсюда для определения вектора параметров α при условии, что $\det(B(\alpha)) \neq 0$, где $B(\alpha) = \|\partial \lambda_k(\alpha) / \partial \alpha_i\|$, $i, k = 0, \dots, m$, получаем систему уравнений

$$n_k = \lambda_k(\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (1)$$

Определим α^0 как решение системы уравнений

$$\bar{n}_k = \lambda_k(\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

и будем полагать, что флуктуации ξ_k результатов измерения n_k относительно \bar{n}_k таковы, что для решения системы (1) можно воспользоваться ее линеаризацией в точке α^0 . Тогда для ошибки $\Delta\alpha$ в определении вектора α получаем систему уравнений

$$\sum_{i=0}^m \frac{\partial \lambda_k(\alpha^0)}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i = \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$\Delta \alpha_0 = \sum_{i=0}^m \beta_i(\alpha^0) \xi_i,$$

где $\beta_i(\alpha_0)$ очевидным образом выражаются через коэффициенты системы.

В силу независимости величин ξ_i получаем следующее соотношение для среднего квадрата ошибки определения α_0 :

$$\overline{(\Delta \alpha_0)^2} = \sum_{i=0}^m \beta_i^2(\alpha^0) \lambda_i(\alpha^0).$$

3. Очевидно, что $\overline{(\Delta \alpha_0)^2}$ является функционалом от границ площадок $h_i(x)$ и его следует минимизировать выбором этих границ при условиях

$$0 = h_0(x) \leq h_1(x) \leq \dots \leq h_{m+1}(x) = h.$$

Эта задача может быть решена с помощью принципа максимума Понтрягина.

Мы более подробно остановимся на случае, когда $\varphi(x, y, \alpha)$ не зависит от y . При выполнении этого условия функционалы $\lambda_i(\alpha)$ и $\partial \lambda_i(\alpha) / \partial \alpha_j$ ($i, j = 0, 1, \dots, m$) линейно зависят от функций $h_i(x)$, и минимум величины $\overline{(\Delta \alpha_0)^2}$ достигается на кусочно-постоянных функциях $h_k(x)$, принимающих только значения 0 или h .

Таким образом, оптимальным разбиением является разбиение выходной плоскости спектрального прибора на вертикальные полосы в общем случае неодинаковой ширины, определяемой формой контура и его параметрами.

Очевидно, что выбранные таким образом функции $h_i(x)$ зависят от вектора α^0 (вектора истинных значений измеряемых параметров), который нам заранее неизвестен. Кроме того, среднее значение $\overline{(\Delta \alpha_0)^2}$ при фиксированных $h_i(x)$ также зависит от α^0 . В этом случае естественно попытаться найти функции $h_i(x)$, доставляющие минимум величине $\Delta = \max_{\alpha \in A} \overline{(\Delta \alpha_0)^2}$, где A — множество возможных значений вектора α .

Отыскание функций $h_i(x)$, дающих решение поставленной минимаксной задачи, затруднительно, однако несложно подобрать такой вектор α^0 , который при описанном выше выборе функций $h_i(x)$ обеспечивает минимальное значение величины Δ .

4. В качестве примера рассмотрим задачу определения параметра α_0 центрированного гауссовского контура, описываемого функцией

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi} \alpha_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha_0^2}\right).$$

Число параметров, описывающих контур, равно двум, т. е. выходная плоскость должна быть разбита на две зоны. Интенсивности световых потоков в этих зонах задаются соотношениями:

$$\lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi} \alpha_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha_0^2}\right) h_1(x) dx;$$

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi} \alpha_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha_0^2}\right) (h - h_1(x)) dx.$$

Здесь мы для простоты рассматриваем случай $\alpha_0 \ll l$ (l — ширина выходной щели).

В соответствии с п. 2 формула для среднего квадрата ошибки определения параметра α_0 принимает вид

$$\overline{(\Delta\alpha_0)^2} = \frac{\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1}\right)^2 \lambda_0 + \left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial\alpha_1}\right)^2 \lambda_1}{\left(\frac{\partial\lambda_0}{\partial\alpha_0} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\lambda_0}{\partial\alpha_1} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha_0}\right)^2}.$$

В соответствии с п. 3 функция $h_1(x)$, доставляющая минимум функционалу $\overline{(\Delta\alpha_0)^2}$, определяется соотношениями:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } W(x) > 0, \\ h & \text{при } W(x) \leq 0, \end{cases}$$

где $W(x) = x^2 - a^2$, т. е.

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > a, \\ h & \text{при } |x| \leq a. \end{cases}$$

Следовательно, первая зона представляет собой расположенную в центре вертикальную полосу шириной $2a$, вторая зона — оставшаяся часть выходной щели (рис. 2).

Таким образом, определена оптимальная форма функции $h_1(x)$, но полуширина центральной зоны a пока остается неопределенной.

Для среднего квадрата ошибки при выбранной форме $h_1(x)$ получаем

$$\overline{(\Delta\alpha_0)^2} = \frac{\alpha_0^4}{2h\alpha_1^0} \frac{2\pi\Phi\left(\frac{a}{\alpha_0^0}\right) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{a}{\alpha_0^0}\right)\right]}{a^2 \exp\left(-\frac{a^2}{\alpha_0^2}\right)}.$$

Параметр a может быть выбран из условия минимума этого выражения. Вводя параметр $\beta = a/\alpha_0^0$ и минимизируя по β выражение

$$[\exp(\beta^2)/\beta^2] 2\Phi(\beta) [1 - 2\Phi(\beta)],$$

получаем, что минимум ошибки достигается при $\alpha \approx 1,5 \alpha_0^0$ и

$$\overline{(\Delta\alpha_0)^2}_{\min} \approx 1,53 \frac{\alpha_0^2}{2\alpha_1^0 h}$$

($\alpha_1^0 h$ — интенсивность линии на выходе прибора).

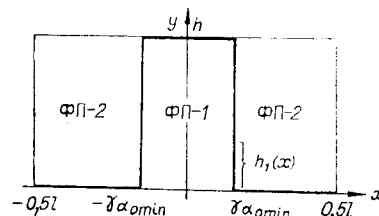


Рис. 2.

Выбранная таким образом маска является оптимальной при фиксированном значении α_0^0 . Если априори известно, что α_0^0 находится в диапазоне $(\alpha_{0 \min}, \alpha_{0 \max})$, то целесообразно выбрать полуширину центральной зоны a таким образом, чтобы максимальное значение относительной ошибки в заданном диапазоне было минимальным. В данном случае величина a , отвечающая этому требованию, определяется из условия равенства относительных ошибок на краях диапазона, т. е.

$$\frac{(\overline{\Delta\alpha_0 \min})^2}{\alpha_{0 \min}^2} = \frac{(\overline{\Delta\alpha_0 \max})^2}{\alpha_{0 \max}^2}.$$

Сравним рассмотренный метод со случаем, когда фиксируются координаты каждого фотоотсчета в выходной плоскости прибора.

Если используется вся информация о световом потоке, т. е. фиксируются координаты каждого фотоотсчета (что соответствует случаю бесконечного числа фотоприемников), то наилучшей оценкой для параметра α_0 является оценка

$$\alpha_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

с дисперсией

$$\overline{(\Delta\alpha_0)^2} = \alpha_0^{0^2} \frac{n\Gamma^2\left(\frac{1}{2}n\right) - 2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)} \approx \frac{\alpha_0^{0^2}}{2n},$$

где $n = \alpha_1^0 h$.

Из приведенных соотношений следует, что ограничение числа фотоприемников двумя приводит (по сравнению с идеальным случаем) к увеличению дисперсии ошибки в определении параметра α_0 всего в 3 раза (отношение среднеквадратичных ошибок составляет соответственно $\sqrt{3}$), если диапазон $k = \alpha_{0 \max}/\alpha_{0 \min} = 4$. График отношения дисперсий оценок в зависимости от диапазона k приведен на рис. 3. Там же приведено значение параметра $\gamma = a/\alpha_{0 \min}$. Из рис. 3 следует, что вариант с использованием двух фотоприемников дает существенно большую дисперсию ошибки в определении параметра α_0 лишь при очень больших значениях k .

Методика оценки полуширины контура линии при использовании двух фотоприемников сводится к следующему:

исходя из априорной информации выбираются величины $\alpha_{0 \min}$ и $\alpha_{0 \max}$;

по значению $k = \alpha_{0 \max}/\alpha_{0 \min}$ находится полуширина центральной зоны $a = \gamma\alpha_{0 \min}$ (см. рис. 3);

ширина выходной щели спектрального прибора задается равной $6-8 \alpha_{0 \max}$; световые потоки разводятся в соответствии с рис. 2;

полуширина спектральной линии α_0 определяется из системы уравнений:

$n_0 = \alpha_1 2\Phi(a/\alpha_0)$, $n_1 = \alpha_1 (1 - 2\Phi(a/\alpha_0))$,
т. е. α_0 есть решение уравнения

$$n_0/(n_0 + n_1) = 2\Phi(a/\alpha_0);$$

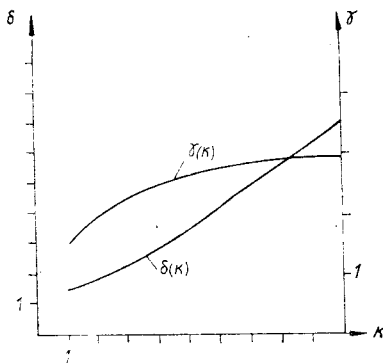


Рис. 3.

относительную среднеквадратичную ошибку в определении полуширины спектральной линии можно оценить для заданного k по формуле

$$\left(\frac{(\Delta\alpha_0)^2}{\alpha_0^2} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2n}},$$

где δ — отношение дисперсий на рис. 2; $n = \alpha_1 h$ — суммарное количество фотоэлектронов, формирующих «изображение».

Поступила в редакцию 30 июля 1975 г.

УДК 531.7.082.54:621.378.325

А. Н. БОНДАРЕНКО, Ю. Б. ДРОБОТ,
В. А. КОНСТАНТИНОВ, Г. В. КРИВОЩЕКОВ, В. П. ТРОЦЕНКО
(Новосибирск)

ИЗМЕРЕНИЕ МАЛЫХ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Вопросы измерения малых акустических колебаний поверхностей твердых тел, амплитуды которых намного меньше длины световой волны, часто возникают в широком круге физических исследований. Для примера можно указать на исследование малых пьезоэлектрических, электро- и магнитострикционных эффектов. Особый интерес представляют измерения параметров акустических волн, возникающих в различных конструкционных материалах и изделиях при их деформации.

В данной работе излагаются возможности метода, основанного на использовании активных интерферометров (собственно лазеров), и приводятся результаты их предварительных исследований. Все измерения проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Сама установка собиралась на массивном амортизированном стальном швеллере. Источником монохроматического излучения служил нестабилизированный He-Ne лазер ЛГ-38, работающий на длине волны $\bar{\lambda} = 0,62$ мкм. Интерференционная измерительная головка (см. рис. 1, б) имела размеры $3,5 \times 3; 5 \times 5$ см и в совокупности с отражающей поверхностью исследуемого объекта δ , на которую она ставится, представляла собой равноплечий интерферометр Майкельсона. В качестве светорасщепителя использовался делительный кубик, помещенный в оправу и приклеенный к кольцевому керамическому магниту 13 с тремя (под углом 120°) опорами в виде стальных шариков диаметром 0,1 см. Магнит обеспечивал достаточно устойчивое положение головки на стальных образцах. Опорное зеркало жестко крепилось на пьезокерамическом цилиндре 6, тем самым имелась возможность плавно управлять интенсивностью интерференционной картины. Луч лазера, проходя через оптический затвор 2, поворотной призмой 4 направлялся в интерферометр и фокусировался на исследуемую поверхность линзой 3. Применение фокусирующей линзы позволяло получить хорошую интерференционную картину от любых слегка полированных поверхностей. Интенсивность интерференционной картины регистрировалась