

няться соотношением $f_2 = d_1 \left(1 + \frac{b_1^2}{4d_1^2} \right)$, то «горловина» выходящего пучка переместится непосредственно к самой линзе, в то время как его расходимость практически не изменится [8].

В табл. 2 приведены результаты расчетов по формулам (4), (5) для пучка с $r_0 = 0,22$ мм и «обратным» телескопом при $d_0 = 70$ мм и $f_2/f_1 = 18$.

Как следует из табл. 2, использование оптической системы дает возможность уменьшить погрешность до $0,7 \cdot 10^{-9}$. При проведении измерений с более высокой точностью (что будет возможно после перехода на новый эталон длины) поправку на сдвиг $\Delta\Phi$ можно вводить в тех случаях, когда справедливы допущения, при которых были получены формулы (1) и (6). Кроме того, в этом случае при больших значениях разности хода становится существенным дополнительный фазовый сдвиг, обусловленный дифракцией на зеркалах интерферометра (см., например, [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Корженевич, А. Я. Лейкин, А. М. Ратнер, В. С. Соловьев, В. Б. Телегин. О погрешности интерферометрических измерений длины волны, связанной с искривлением волнового фронта. — «Метрология», 1973, № 1, с. 61—68.
2. В. С. Игнатовский. Влияние формы и положения источника света при измерениях интерференц-компаратором Кестерса. Л.—М., Стандартгиз, 1935. 87 с.
3. Ю. П. Ефремов, Ю. П. Каневский. О поправке на размер выходной диафрагмы при фотоэлектрической регистрации интерференционных полос равного наклона. — «Опт. и спектр.», 1960, т. 8, вып. 2, с. 266—268.
4. Л. А. Вайнштейн. Открытые резонаторы и волноводы. М., «Сов. радио», 1967. 475 с.
5. H. Kogelnik. On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation. — «Appl. Opt.», 1965, vol. 4, p. 1562—1569.
6. Когельник, Л. И. Резонаторы и световые пучки лазеров. — «ТИИЭР», 1965, т. 54, № 10, с. 95—113.
7. В. П. Коронкевич, Г. А. Ленкова. Временная когерентность газового лазера. — «Электронная техника. Сер. 3.», 1967, вып. 2, с. 14—18.
8. С. Г. Зейгер, Н. И. Калитиевский, Э. Е. Фрадкин, М. П. Чайка. Структура поля излучения газового лазера со сферическими зеркалами. — «Опт. и спектр.», 1965, т. 19, вып. 2, с. 255.
9. W. Tango, R. Q. Twiss. Diffraction effects in long path interferometers. — «Appl. Opt.», 1974, vol. 13, № 8, p. 1814—1819.

Поступила в редакцию 2 июня 1975 г.;
окончательный вариант — 9 октября 1975 г.

УДК 778.38

**В. М. КЛИМЕНКО, Ф. Н. МАРЧЕВСКИЙ,
И. М. ПОЧЕРНЯЕВ, В. Л. СТРИЖЕВСКИЙ**

(Киев)

ВЛИЯНИЕ ИНТЕРМОДУЛЯЦИОННЫХ ШУМОВ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ДИАПАЗОН ФАЗОВЫХ ТРАНСПАРАНТОВ

Хорошо известно, что использование фазовых транспарантов позволяет существенно увеличить дифракционную эффективность. Однако последнее приводит к увеличению интермодуляционных шумов. Физи-

ческая природа интермодуляционных шумов обусловлена нелинейной зависимостью функции пропускания от сигнала. Причем роль этих шумов в значительной мере определяется спектральным составом этого сигнала.

Исследованию различных аспектов интермодуляционных шумов фазовых транспарантов посвящено ограниченное число работ, появившееся лишь в последнее время. Теоретический и экспериментальный анализ интермодуляционных шумов в основном проводился применительно к фазовым голограммам [1]. В работе [1] исследовались тонкие и толстые фазовые голограммы диффузно рассеивающих объектов. Было показано, что влияние интермодуляционных шумов существенно подавляется в толстых голограммах вследствие наличия условий Брэгга. Однако в указанной работе не проводилось последовательного учета всех возможных взаимодействий сигнальных компонент различных пространственных частот. Последнее осуществлено в работе [2], где полученные теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [2]. В указанных выше работах [1—2] рассмотрение влияния шумов ограничивалось окрестностью некоторой фиксированной частоты, соответствующей первому порядку дифракции.

В настоящей работе будет теоретически изучено влияние интермодуляционных шумов фазовых транспарантов на спектральный состав считываемой информации.

Общая теория расчета динамического диапазона с учетом интермодуляционных шумов. Рассмотрим модель фазового транспаранта (ФТ) в виде плоскопараллельной пластинки, на одной из граней которой записан сложный сигнал, представляющий собой суперпозицию большого числа однородных синусоидальных сигналов. Тогда профиль поверхности транспаранта, на которой записан сигнал, можно представить в виде

$$Z = \sum_{j=0}^N a_j \cos(\omega_j x + \varphi_j).$$

В приближении геометрической оптики, справедливом, когда средний радиус кривизны рельефа поверхности достаточно велик по сравнению с длиной волны λ считываемого сигнала, представляющего собой плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль нормали плоской грани, функцию пропускания ФТ можно записать в виде

$$T(x) = \exp \left\{ i \sum_{j=0}^N \xi_j \cos(\omega_j x + \varphi_j) \right\},$$

где $\xi_j = (2\pi/\lambda)a_j(n-1)$, n — показатель преломления ФТ.

Разлагая функцию $T(x)$ в ряд Фурье — Бесселя — Якоби [3], получим

$$T(x) = \prod_{j=0}^N \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} i^{k_j} J_{k_j}(\xi_j) \exp \{ i(k_j \varphi_j + k_j \omega_j x) \}. \quad (1)$$

Предположим, что выполняются неравенства

$$|\xi_j| \ll 1, \quad j \neq 0,$$

которые позволяют разложить функцию $T(x)$ в ряд Тейлора по ξ_j . При этом ограничимся квадратичными по ξ_j членами. Последнее позволяет положить все $J_k(\xi_j) = 0$ при $j \neq 0$, $|k_j| > 2$ и функции $J_0(\xi_j)$, $J_{\pm 1}(\xi_j)$, $J_{\pm 2}(\xi_j)$ аппроксимировать выражениями [4]:

$$J_0(\xi_j) = 1 - \frac{\xi_j^2}{4}, \quad J_{\gamma}(\xi_j) = \gamma \frac{\xi_j}{2}, \quad J_{2\gamma} = \frac{\xi_j^2}{8}, \quad \gamma = \pm 1, \quad j \neq 0.$$

Тогда формула (1) примет вид

$$T(x) = \sum_{k_0=-\infty}^{\infty} i^{k_0} J_{k_0}(\xi_0) e^{i(k_0\omega_0 x + k_0\varphi_0)} \left\{ 1 + \sum_{\gamma, j} \gamma \frac{\xi_j}{2} i^\gamma e^{i\gamma(\varphi_j + \omega_j x)} + \right. \\ \left. + \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \gamma_1 \gamma_2 i^{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\xi_{j_1} \xi_{j_2}}{2^2 2!} e^{i(\gamma_1 \varphi_{j_1} + \gamma_2 \varphi_{j_2})} e^{i(\gamma_1 \omega_{j_1} + \gamma_2 \omega_{j_2}) x} \right\}, \quad (2)$$

где $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 = \pm 1$.

В дальнейшем для упрощения знаки сумм будем опускать.

В выходной плоскости спектроанализатора получим частотное распределение функции пропускания ФТ длиной $2A$:

$$\frac{T(\omega)}{2A} = i^{k_0} J_{k_0}(\xi_0) e^{i k_0 \varphi_0} \left\{ \text{sinc}(k_0 \omega_0 + \omega) A + \gamma \frac{\xi_j}{2} i^\gamma e^{i \gamma \varphi_j} \text{sinc}(k_0 \omega_0 + \right. \\ \left. + \omega_j \gamma + \omega) A + \gamma_1 \gamma_2 i^{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\xi_{j_1} \xi_{j_2}}{2^2 2!} e^{i(\gamma_1 \varphi_{j_1} + \gamma_2 \varphi_{j_2})} \text{sinc}(k_0 \omega_0 + \right. \\ \left. + \omega_{j_1} \gamma_1 + \omega_{j_2} \gamma_2 + \omega) A \right\}, \quad \text{sinc } x = \sin x/x. \quad (3)$$

Выражение (3) дает возможность непосредственно перейти к расчету динамического диапазона (ДД), определяемого как отношение спектральной интенсивности сигнала и спектральной интенсивности шума [5].

Пусть, наряду с полезным сигналом $z_0 = a_0 \cos(\omega_0' x + \varphi_0)$, в когерентную оптическую систему поступает также паразитный сигнал $z'(x) = \sum_{j=1}^N a_j \cos(\omega_j x + \varphi_j)$. Наличие постоянной шумовой составляющей можно не учитывать, поскольку она не влияет на спектральный состав считываемой информации. Учитывая вышесказанное, преобразуем (3) к виду

$$\frac{T(\omega)}{2A} = i^{k_0} e^{i k_0 \varphi_0} \text{sinc}(k_0 \omega_0' + \omega) A \left\{ J_{k_0}(\xi_0) + \gamma \frac{\xi_j}{2} i^{\gamma(1-j')} e^{i\gamma(\varphi_j - j'\varphi_0)} J_{k_0 - j'\gamma} + \right. \\ \left. + \gamma_1 \gamma_2 i^{\gamma_1(1-j'_1) + \gamma_2(1-j'_2)} e^{i\gamma_1(\varphi_{j_1} - j'_1\varphi_0) + i\gamma_2(\varphi_{j_2} - j'_2\varphi_0)} J_{k_0 - j'_1\gamma_1 - j'_2\gamma_2} \right\}, \quad (4)$$

где $j' = jp$; $j'_{1,2} = p - j_{1,2}$; $p = \omega_0/\omega_0'$.

Спектральную интенсивность сигнала $I(\omega) = |T(\omega)|^2$ нетрудно получить, используя (4) и учитывая, что основной вклад в $I(\omega)$ вносят слагаемые двойной суммы по k_0 и k_0' , у которых $k_0' = k_0^*$. Тогда имеем

$$\frac{I(\omega)}{4A^2} = \text{sinc}^2(k_0 \omega_0' + \omega) A \left\{ J_{k_0}^2(\xi_0) + \xi_j J_{k_0}(\xi_0) \text{Re } S_j^{h_0} + \right. \\ \left. + \frac{\xi_{j_1} \xi_{j_2}}{4} [J_{k_0}(\xi_0) \text{Re } Q_{j_1 j_2}^{h_0} + \text{Re } S_{j_1}^{h_0} \text{Re } S_{j_2}^{h_0} + \text{Im } S_{j_1}^{h_0} \text{Im } S_{j_2}^{h_0}] \right\}. \quad (5)$$

Здесь

$$S_j^{h_0} = \gamma e^{i \frac{\pi}{2}(1-j')\gamma} e^{i\gamma(\varphi_j - j'\varphi_0)} J_{k_0 - j'\gamma}; \quad Q_{j_1 j_2}^{h_0} = \gamma_1 \gamma_2 e^{i \frac{\pi}{2}[(1-j'_1)\gamma_1 + (1-j'_2)\gamma_2]} \times \\ \times e^{i[\gamma_1(\varphi_{j_1} - j'_1\varphi_0) + \gamma_2(\varphi_{j_2} - j'_2\varphi_0)]} J_{k_0 - j'_1\gamma_1 - j'_2\gamma_2}. \quad (6)$$

* Необходимый критерий имеет вид: $A \gg x_0'$, $x_0' = 2\pi/\omega_0'$.

Поскольку слагаемые под знаком суммы по k_0 в формуле (5) перекрываются слабо, то для отдельных пространственных частот $\omega_k = k\omega_0$ нетрудно определить искомую величину ДД:

$$D_k^{-1} = J_k^{-2}(\xi_0) \left| \xi_j J_k \operatorname{Re} S_j^k + \frac{\xi_{j_1} \xi_{j_2}}{4} [J_k \operatorname{Re} Q_{j_1 j_2}^k + \operatorname{Re} S_{j_1}^k \operatorname{Re} S_{j_2}^k + \operatorname{Im} S_{j_1}^k \operatorname{Im} S_{j_2}^k] \right|. \quad (7)$$

Выражение (7) полностью решает поставленную задачу о вычислении ДД с учетом влияния интермодуляционных шумов и описывает большой круг различных конкретных задач. О некоторых из них речь пойдет ниже.

Анализ конкретных случаев. Применим полученную формулу (7) к анализу различных частных случаев.

1. Большой интерес представляет исследование вопроса о влиянии на ДД интермодуляционных шумов, обусловленных паразитными сигналами на частотах гармоник основного сигнала. Пусть в когерентную систему помимо основного сигнала частоты ω_0 поступает шумовой сигнал на частоте l -й гармоники ($l\omega_0$). Профиль рельефа поверхности фазового транспаранта будет иметь вид

$$z = a_0 \cos(\omega_0 x) + a_l \cos(l\omega_0 x). \quad (8)$$

Тогда, используя выражение (7), нетрудно получить

$$D_k^{-1} = J_k^{-2}(\xi_0) \left| J_k \xi_l \operatorname{Re} S_l^k + \frac{\xi_l^2}{4} [J_k \operatorname{Re} Q_{ll}^k + (\operatorname{Re} S_l^k)^2 + (\operatorname{Im} S_l^k)^2] \right|, \quad (9)$$

где

$$\xi_l = (2\pi/\lambda) a_l (n-1).$$

Коэффициенты S_l^k , Q_{ll}^k определяются формулами (6). Имеем

$$S_l^k = \gamma e^{i\frac{\pi}{2} \nu(1-l)} J_{k-l\nu}; \quad Q_{ll}^k = \gamma_1 \gamma_2 e^{i\frac{\pi}{2} (1-l)(\nu_1+\nu_2)} J_{k-l(\nu_1+\nu_2)}. \quad (10)$$

Из выражений (10) непосредственно следует важное свойство. При четном l ($l=2m$) $\operatorname{Re} S_l^k = 0$. Следовательно, интермодуляционные шумы, обусловленные шумовыми сигналами на частотах четных гармоник, в меньшей степени влияют на ДД, чем на частотах нечетных гармоник. Так как в первом случае ДД определяется только квадратичными по ξ_l членами, а во втором — линейными и квадратичными.

В иллюстративных целях по формуле (9) нами был проведен численный расчет. Результаты расчетов зависимости ДД от номера пространственной частоты и индекса модуляции ξ_0 для случая $l=3$ представлены на рис. 1, 2. Отметим немонотонную осциллирующую зависимость D_k от ξ_0 . Такая сложная зависимость $D_k(\xi_0)$ указывает на необходимость подходящего выбора ξ_0 для достижения предельно возможного ДД. Что касается характера зависимостей ДД от номера пространственной ча-

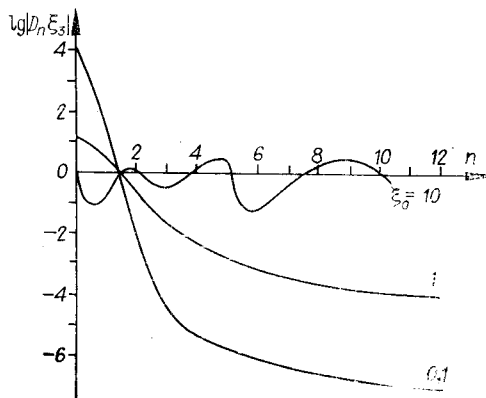


Рис. 1. Зависимость ДД от номера пространственной частоты при различных значениях индекса модуляции ξ_0 для случая, описанного формулой (9).

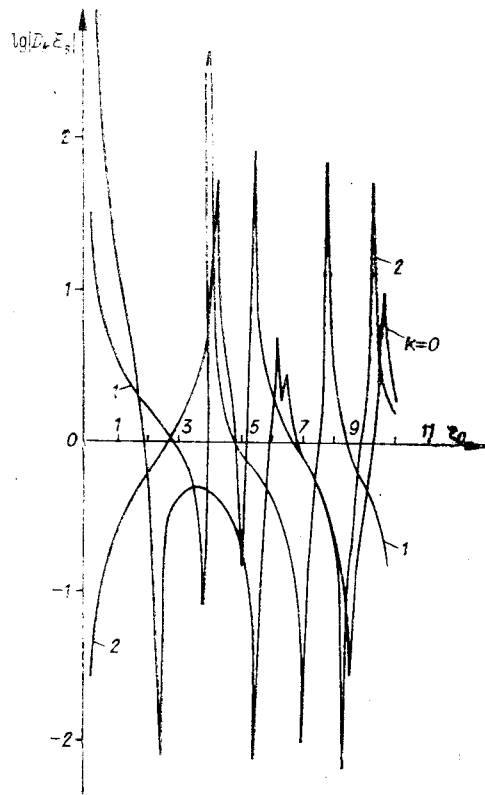


Рис. 2. Зависимость ДД от ξ_0 для случая, описанного формулой (9).

стоты, то, как видно из рис. 2, при $\xi_0 \ll 1$ D_k монотонно убывает с ростом k , а при $\xi_0 \gg 1$ зависимость $D_k(k)$ становится осциллирующей.

Интересно отметить, что формула (9) описывает также влияние низкочастотных шумов (по отношению $k\omega_0$) на ДД ($l < 1$). Применяя формулу (9) к случаю $l = 1/2$, можно показать, в частности, что при $\xi_0 \ll 1$ величины D_0 и D_1 пропорциональны $\sqrt{\xi_0}$. Кроме того, выбирая индекс модуляции ξ_0 равным одному из корней трансцендентного уравнения $\sin \xi + \cos \xi - \text{sinc } \xi = 0$, можно существенно увеличить величину D_1 . (Наименьшим, отличным от нуля корнем является величина $\xi \approx 1,75$.)

2. Рассмотрим случай циклической записи синусоидального сигнала. Такой режим может реализоваться, в частности, при записи информации на термопластических носителях информации (ТПН), хорошей моделью которых является описанная выше модель фазового транспаранта. Поэтому ниже для определенности будем рассматривать ТПН.

Предположим, что при каждом цикле записывается сигнал с одинаковым периодом $2\pi/\omega_0$, но с разной фазой. Учтем также, что считывание информации происходит после $N+1$ цикла и при каждом цикле сигналы, записанные на ТПН, частично стираются. Тогда профиль рельефа ТПН будет иметь вид

$$z = a_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0) + \sum_{j=1}^N a_j \theta_j \cos(\omega_0 x + \varphi_j), \quad (11)$$

где коэффициенты θ_j описывают эффект стирания ($\theta_j \leq 1$).

Просуммировав в (11) все слагаемые по j , получим

$$z = a_0 \cos(\omega_0 x + \varphi_0) + \bar{a} \cos(\omega_0 x + \bar{\varphi}), \quad (12)$$

где

$$\bar{a} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N a_j \theta_j \cos \varphi_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N a_j \theta_j \sin \varphi_j\right)^2};$$

$$\text{tg } \bar{\varphi} = \frac{\sum_{j=1}^N a_j \theta_j \sin \varphi_j}{\sum_{j=1}^N a_j \theta_j \cos \varphi_j}. \quad (13)$$

Далее, применяя формулу (9), найдем

$$D_k^{-1} = J_k^{-2}(\xi_0) \left| \bar{\xi} J_k \text{Re } S_j^k + \frac{\bar{\xi}^2}{4} [J_k \text{Re } Q_{11}^k + (\text{Re } S_1^k)^2 + (\text{Im } S_j^k)^2] \right|. \quad (14)$$

Здесь $\bar{\xi} = (2\pi/\lambda)\bar{a}(n-1)$;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S_1^k &= \cos(\bar{\varphi} - \varphi_0) [J_{k-1} - J_{k+1}]; \\ \operatorname{Im} S_1^k &= \sin(\bar{\varphi} - \varphi_0) [J_{k-1} + J_{k+1}]; \\ \operatorname{Re} Q_{11}^k &= \cos [2(\bar{\varphi} - \varphi_0)] [J_{k-2} + J_{k+2}] - 2J_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Анализ выражения (14) проведен при следующих упрощающих предположениях. Пусть частота следования сигналов настолько высока, что стирание сигналов практически не происходит ($\theta_j \approx 1$). Далее предположим, что при каждом цикле записываются сигналы с одинаковой амплитудой ($a_j = a$, $j \neq 0$), но сдвинутые по фазе на постоянную величину относительно друг друга так, что $\varphi_j = j\Delta\varphi$. Однако амплитуда $(N+1)$ -го сигнала a_0 не равна a . Проводя вычисления по формулам (13), найдем \bar{a} , $\bar{\varphi}$:

$$\bar{a} = a_0 \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}; \quad \bar{\varphi} = (\Delta\varphi/2) \cdot (N+1). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) и (14), учитывая формулу $J_{k-1} - J_{k+1} = 2J'_k$ [4] и ограничиваясь в (14) линейными по $\bar{\xi}$ членами, получим

$$D_k = \left| \frac{u J_k(\bar{\xi}_0)}{\bar{\xi} J'_k(\bar{\xi}_0)} \right|; \quad u = \frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\sin(N\Delta\varphi/2) \cos(N+1/2)\Delta\varphi}. \quad (17)$$

Формула (17) позволяет проанализировать зависимости ДД от параметров k , N , $\Delta\varphi$. Прежде всего следует отметить возможность управления величиной D_k путем изменения условий записи. Фактор u передает зависимость D_k от N , $\Delta\varphi$. Величина $u_1^{-1} = \sin(N\Delta\varphi/2)/\sin(\Delta\varphi/2)$ обращается в нуль, если $N\Delta\varphi/2 = l\pi$ ($l=0, \pm 1, \dots$) и $\Delta\varphi/2 \neq m\pi$ ($m=0, \pm 1, \dots$). При этих условиях $D_k \rightarrow \infty$. Физически это соответствует тому, что в результате циклической записи после N -го цикла шумового сигнала нет вообще, т. е. стирание сигналов осуществляется самими же сигналами. При $N\Delta\varphi \ll 1$ ДД оказывается обратно пропорциональным числу циклов N .

Формула (17) оказывается непременимой, когда $u_2^{-1} = \cos\left(\frac{N+1}{2}\Delta\varphi\right) = 0$, что эквивалентно условию $(N+1)\Delta\varphi = \pi(2l+1)$. При этом для расчета ДД необходимо пользоваться формулой (14), которая в данном случае принимает вид

$$D_k = \left| \frac{4J_k^2(\bar{\xi}_0) u_1}{\left[J_k(J_{k-2} + J_{k+2}) - J_k^2 \left(1 - \left(\frac{2k}{\bar{\xi}} \right)^2 \right) \right] \bar{\xi}^2} \right|. \quad (18)$$

Выражения (17), (18) по-разному зависят от номера пространственной частоты k . Так, при $\bar{\xi}_0 \ll 1$, $k \geq 1$ из (17) получаем $D_k = |u/k|$, а из (18) — $D_k = |u_1|/k^2$.

Зависимость величины D_k от индекса модуляции $\bar{\xi}_0$ и номера пространственной частоты передается фактором $F_k = 2|J_k(\bar{\xi}_0)| |J'_k(\bar{\xi}_0)|$. Эта зависимость проиллюстрирована рис. 3, 4, из которых отчетливо виден различный характер зависимостей $D_k(k)$ и $D_k(\bar{\xi}_0)$. Наличие резко выраженных максимумов на рис. 4 указывает на необходимость особых требований при выборе $\bar{\xi}_0$ для достижения предельного ДД.

В заключение отметим, что формулу (17) нетрудно обобщить на

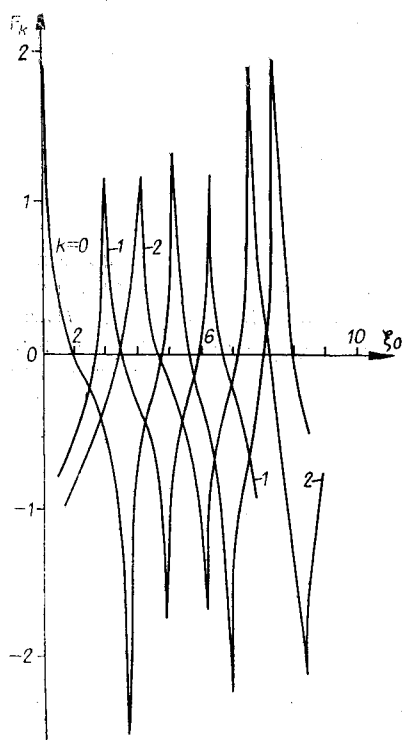


Рис. 3. Зависимость ДД от номера пространственной частоты при различных значениях индекса модуляции ξ_0 для случая, описанного формулой (17).

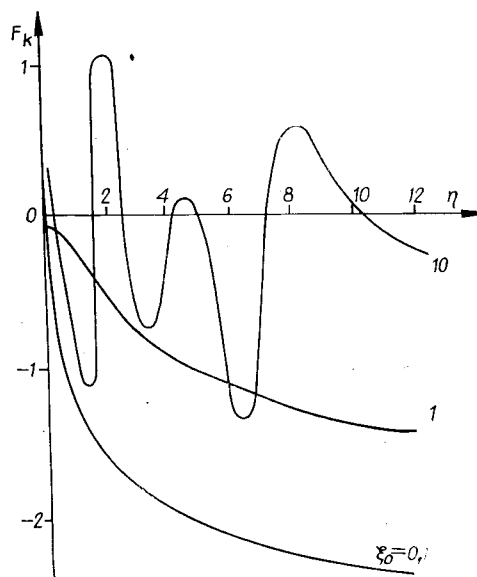


Рис. 4. Зависимость ДД от ξ_0 для случая, описанного формулой (17).

В этом случае формула (17) остается справедливой, если заменить u величиной \tilde{u} , равной

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{-1} = & e^{-\beta} \{ (1 - e^{-\beta} \cos \Delta\varphi) [\cos \Delta\varphi - e^{-\beta N} \cos (N+1) \Delta\varphi] - \\ & - e^{-\beta} \sin \Delta\varphi [\sin \Delta\varphi - e^{-\beta N} \sin (N+1) \Delta\varphi] \} \times \\ & \times [(1 - e^{-\beta} \cos \Delta\varphi)^2 + e^{-2\beta} \sin^2 \Delta\varphi]^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, проведенное исследование влияния интермодуляционных шумов на ДД фазовых транспарантов позволит, по-видимому, во многих практически важных случаях выявить условия достижения предельно возможного ДД.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Upatnieks, S. Leonard. Efficiency and image contrast of dielectric hologram. — "IOSA", 1970, vol. 60, p. 297.
2. F. Saito. Phase modulation noise in a reconstructed image of a Fourier-transform plane phase hologram. — "Opt. Commun.", 1972, vol. 6, p. 81.
3. Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику. М., «Мир», 1970. 117 с.
4. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. М., «Наука», 1970. 665 с.
5. Г. С. Кондратенков. Обработка информации когерентными оптическими системами. М., «Сов. радио», 1972. 111 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 1975 г.