

Ю. Б. ФОГЕЛЬСОН
(Москва)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ СИГНАЛА В ШУМАХ

При автоматической обработке результатов наблюдений и измерений часто возникает необходимость обнаружения пиков сигнала при наличии шумов. В некоторых случаях пик сигнала достаточно охарактеризовать тремя точками: минимум, максимум, минимум. В этом случае задача сводится к поиску локальных экстремумов сигнала в шумах. Если под локальным экстремумом понимать точку, в которой первая производная меняет знак, то вопрос упирается в решение задачи численного дифференцирования, которая, как известно, является некорректной. Многие алгоритмы сглаживания, предложенные для численного дифференцирования, эквивалентны линейной фильтрации. Понятно, что если области спектров сигнала и шума сильно перекрываются, то фильтрация не поможет отысканию экстремумов, хотя при этом пики сигнала и шума могут сильно отличаться амплитудными, энергетическими и другими характеристиками.

Если все пики сигнала имеют фронты, близкие по крутизне к пикам шума, но сильно отличаются другими характеристиками, например, амплитудой для сигнала, показанного на рис. 1, *a**, то, перебрав последовательно все пики, легко отобрать из них «правильные». Однако если в сигнале наряду с ситуацией, изображенной на рис. 1, *a*, имеется ситуация, показанная на рис. 1, *б* (разнесенные по крутизне пики сигнала и шума), то ни простой перебор пиков, ни линейная фильтрация не дадут нужного результата. На рис. 2, *a* показан сигнал, в котором имеются как те,

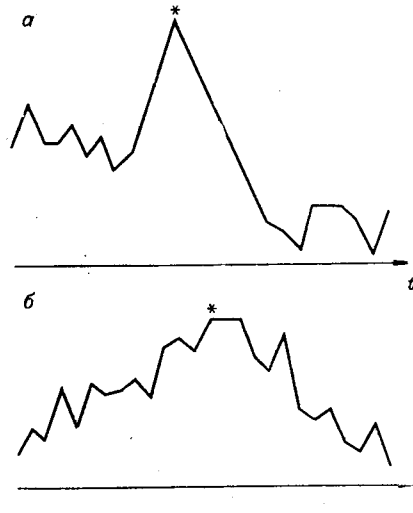


Рис. 1.

Пусть последовательность $\{x_i\}$, $t=0, \dots, N$, представляет собой выборки из такой смеси сигнала и шума, что у полезного сигнала имеются пики, не перекрывающиеся в частотной области с пиками шума, и пики, перекрывающиеся с шумом, но сильно отличающиеся характеристиками во временной области, такими, как амплитуда и т. д. Рассмотрим последовательность $\{z_i\}$, $t=0, \dots, N$, полученную из $\{x_i\}$ линейной операцией сглаживания (при этом степень гладкости зависит от ширины полосы пропускания низкочастотного фильтра, соответствующую данной операции). Рассмотрим точки t_i , в которых $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ меняет знак. При достаточно узкой полосе пропускания точек t_i будет, вообще говоря, немного и они будут представлять экстремумы пиков, спектр которых лежит в области достаточно низких частот, хотя расположение их может сильно отличаться от истинного (рис. 2, *б*).

* Пики сигнала на рисунках помечены звездочкой.

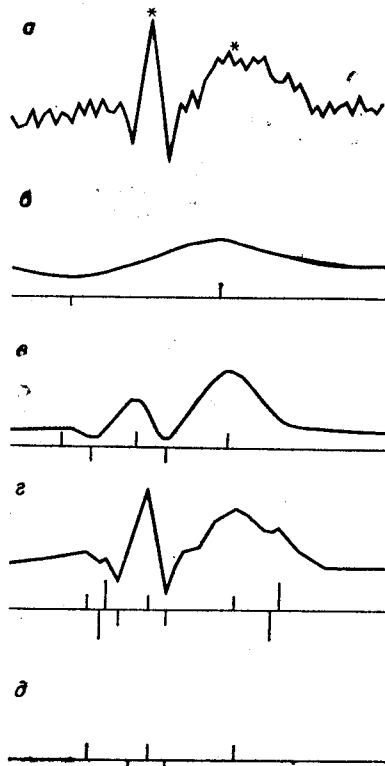


Рис. 2.

При расширении полосы точки t_i будут сдвигаться в сторону истинного положения экстремумов. При достаточно широкой полосе появятся точки, соответствующие пикам, спектр которых лежит в области более высоких частот и среди них могут оказаться ложные (экстремумы шумового компонента), как это показано на рис. 2, в, г. Понятно, что новые точки t_i внутри $0 < t < N$ могут возникать только парами (максимум и минимум). Это дает возможность, постепенно расширяя полосу фильтра, выявить вновь образовавшиеся пики и анализировать их в соответствии с некоторыми пороговыми критериями.

Пусть теперь $\{x_i\}$ — отсчеты смеси сигнала с шумом, взятые с интервалом h . Тогда для фильтрации применим один известный алгоритм сглаживания, а именно: если под гладкой последовательностью понимать $\{z_i\}$ с малым значением $\sum (\Delta z_i)^2$, то сглаженную последовательность $\{z_i\}$ можно получать из $\{x_i\}$, минимизируя по z_i , $0 \leq t \leq N$, функционал

$$\Phi = \sum_{t=0}^{N-1} (x_t - z_t)^2 + \frac{\lambda^2}{h^2} \sum_{t=0}^{N-1} (\Delta z_t)^2.$$

Здесь λ должно выбираться тем большим, чем большая требуется гладкость. Эта операция и частотно-избирательные свойства соответствующего фильтра рассмотрены в работе *. Такой фильтр удобен тем, что полоса его зависит только от λ и поэтому изменение полосы легко программируемо.

Минимизируя Φ , получаем разностное уравнение и два соотношения на границе:

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda^2/h^2)z_t - (\lambda^2/h^2)(z_{t+1} + z_{t-1}) &= x_t, \quad 1 \leq t \leq N-1; \\ z_0 - (\lambda^2/h^2)(z_1 - z_0) &= x_0; \\ (1 - \lambda^2/h^2)z_{N-1} + (\lambda^2/h^2)z_N &= x_N. \end{aligned}$$

Так как один из корней характеристического уравнения $\mu^2 - (2 + h^2/\lambda^2)\mu + 1 = 0$ больше единицы (т. е. решения задачи Коши будут неустойчивы) и соотношения на границе имеют вид, отличный от разностного уравнения, то здесь имеет смысл решать граничную задачу с условием $z_0 = z_N$ (условие периодичности). Такая задача может быть решена, например, методом прогонки, однако при этом следует иметь в виду, что из-за неустойчивости на концах интервала накапливается большая вычислительная погрешность **. Для того чтобы этого избежать, можно $\{x_i\}$ перестроить в $\{x_i^*\}$, дополнив последовательность $\{x_i\}$ справа и слева и сдвинув ее влево, например, так:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_0, \quad 0 \leq t < M; \\ x_i^* &= x_{i-M}, \quad M \leq t < N + M; \end{aligned}$$

* Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М., «Наука», 1973, с. 274.

** Там же, с. 550.

$$x_t^* = x_N, \quad N + M \leq t \leq N + 2M,$$

где число M выбирается, исходя из длины последовательности.

Пусть теперь $\{z_t^*\}$ — последовательность, полученная сглаживанием $\{x_t^*\}$. Обозначим $z_t = z_{t+M}^*$, $0 \leq t \leq N$, и зафиксируем t_j в точках изменения знака Δz_t . Полагая $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_i > \lambda_{i+1}$, получим на k -м шаге список точек $\{t_j^k\}$; список $\{t_j^0\}$ обозначим $\{\tau_i^0\}$. Теперь для $k=1, 2, \dots, l$ будем строить $\{\tau_i^k\}$ в два этапа. На первом этапе включим в $\{\tau_i^k\}$ все $t_j^k = \tau_i^k$ такие, что

$$|\tau_i^k - \tau_i^{k-1}| = \min |t_j^k - \tau_i^{k-1}|. \quad (1)$$

Этим в список $\{\tau_i^k\}$ включаются ранее отобранные τ_i^{k-1} с учетом возможного их сдвига из-за расширения полосы пропускания фильтра. Понятно, что при отыскании точек, ближайших к ранее отобранным [в соответствии с (1)], необходимо учитывать, какому именно экстремуму (максимуму или минимуму) соответствует данная τ_i^{k-1} . На рис. 2 длинными столбиками обозначены элементы списка $\{t_j^k\}$, не вошедшие в $\{\tau_i^k\}$.

Рассмотрим теперь второй этап. На этом этапе требуется отобрать и включить в список $\{\tau_i^k\}$ те из вновь появившихся точек, которые не являются экстремумами шумового компонента. Для этого заметим, что новые точки могут возникать только парами (за исключением границ, но крайние экстремумы можно исключить из рассмотрения). Пусть (p, q) и есть такая пара ($q > p$); из рис. 3 видно, что совокупность значений последовательности $\{z_t\}$ для $p \leq t \leq q$ можно трактовать как левую (правую) часть пика, ограниченную справа максимумом (минимумом) при $t=q$ и слева минимумом (максимумом) при $t=p$. (На рисунке столбики соответствуют членам $\{z_t\}$, рассматриваемым как правая часть пика.) Для набора значений $z_p, z_{p+1}, \dots, z_{q-1}, z_q$ можно подсчитать амплитудные, временные и другие характеристики. На основании сказанного введем в рассмотрение пороговые критерии:

$$\begin{aligned} f_1(z_p, \dots, z_q) &\geq \theta_1; \\ f_2(z_p, \dots, z_q) &\geq \theta_2; \\ f_s(z_p, \dots, z_q) &\geq \theta_s. \end{aligned} \quad (2)$$

Например, $f_1(z_p, \dots, z_q) = |z_p - z_q|$ — амплитудный критерий;

$$f_2(z_p, \dots, z_q) = \frac{1}{q-p} \sum_{t=p}^q (z_t - \min[z_p; z_q])^2$$

— критерий по мощности. Конкретно вид критерия зависит от априорной информации о пиках сигнала и шума. Теперь, на втором этапе, включим в список $\{\tau_i^k\}$ те пары из оставшихся в $\{t_j^k\}$, для которых удовлетворяется (2). Проведя эту процедуру до $k=l$, получим список $\{\tau_i^l\}$, который и будет списком искомым экстремумов. На рис. 2, д показан результат работы алгоритма с амплитудным критерием и критерием по мощности для сигнала (см. рис. 2, а).

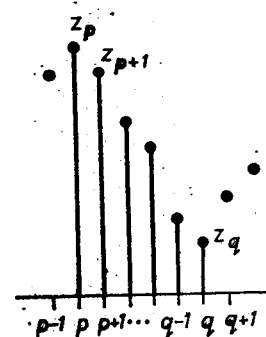


Рис. 3.

Из приведенного выше описания видно, что работа алгоритма существенно зависит от выбора критериев f_1, \dots, f_n , порогов $\theta_1, \dots, \theta_n$ и последовательности $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Выбор порогов и критериев, как уже отмечалось, может быть выполнен на основе априорной информации об отличиях пиков сигнала от пиков шума, тогда как выбор $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ зависит от тонких свойств сигнала и шума в окрестности экстремумов.

При работе с описанным алгоритмом следует иметь в виду, что критерии (2) применяются не к целому пику, а к некоторой его части, поэтому для сигналов с сильно несимметричными пиками этот алгоритм может отбраковать правильный пик, ориентируясь только на его часть. Однако возможности алгоритма могут быть расширены для анализа несимметричных пиков, если анализировать вместо пары три числа (минимум, максимум, минимум), хотя подбор третьей точки к вновь возникшей паре значительно увеличивает число операций.

В заключение можно сказать, что с учетом ограничений, присущих данному алгоритму, он позволяет решать много задач поиска пиков сигнала в шумах, когда спектры сигнала и шума пересекаются по частотам и известны нелинейные ограничения на пики сигнала. На рис. 2, например, представлены итерационные шаги, сделанные программой, реализующей этот алгоритм при поиске «зубцов» на электрокардиограмме.

Автор пользуется возможностью поблагодарить профессора А. П. Мановцева за его внимание и поддержку при выполнении этой работы.

Поступила в редакцию 4 мая 1975 г.

УДК 621.317.76

В. И. БАБЕНКО

(Киев)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ СПЕКТРА ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) независимо от способа его реализации в цифровом [1] или дискретно-аналоговом [2] виде сводится к представлению интеграла Фурье комплексной квадратурной суммой

$$F_N(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t) e^{-j\omega k\Delta t}. \quad (1)$$

В том и другом случае определение ДПФ осуществляется путем кодирования выборочных значений $f(k\Delta t)$ исследуемого сигнала $f(t)$ в моменты времени $k\Delta t$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), последующего их взвешивания по закону $\exp(-j\omega k\Delta t)$ и суммирования продуктов взвешивания.

Известно, что ДПФ при конечном шаге дискретизации Δt является оценкой аналитического спектра сигнала на частоте ω , которая определяется суммой периодических отсчетов этого спектра в точках $\omega - k2\pi/\Delta t$. Члены суммы при $k \neq 0$ определяют погрешность оценки, равную [3]

$$\Delta F(\omega) = \sum_k' F\left(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta t}\right),$$