

страненных преобразователях, работающих по принципу поразрядного кодирования [6], алгоритм может быть применен для увеличения статистической точности определения младших разрядов цифрового кода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Кавалеров, С. М. Манделъштам. Введение в информационную теорию измерений. М., «Энергия», 1974.
2. Г. Я. Мирский. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., «Энергия», 1972.
3. П. П. Орнатский. Автоматические измерения и приборы. Киев, «Вища школа», 1973.
4. В. С. Гладкий. Устройство для вычисления математического ожидания.— Авт. свид-во № 354420, БИ, 1972, № 30.
5. В. П. Тарасов. О преобразовании малых напряжений в цифровой код.— «Приборостроение», 1971, № 3, с. 56—60.
6. Э. И. Гитис, О. А. Юланов. Состояние и тенденции развития разработок преобразователей напряжения в код в США.— «Приборы и сист. упр.», 1975, № 1, с. 45—46.

Поступила в редакцию 3 декабря 1975 г.;
окончательный вариант — 3 марта 1976 г.

УДК 621.391.26 : 519.2

В. П. КРАСИН, Е. П. ЧУРАКОВ

(Рязань)

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Введение и постановка задачи. В теории управления и ряде смежных областей распространена задача построения оптимальной дискретной системы, которая в соответствии с заданным оператором наилучшим в определенном смысле образом преобразует некоторый сигнал по конечномерной апостериорной выборке из его смеси с шумом [1, 2]. Математически эта задача сводится к поиску наилучшей в принятом смысле оценки \hat{h} величины $H^T A$ по значениям входного сигнала

$$V = FA + P. \quad (1)$$

Здесь V — $l+1$ -мерный вектор апостериорных данных, i -й компонент V_i ($i = \overline{0, l}$) которого представляет значение входного сигнала системы в момент $t_i = iT$ ($T = \text{const}$ — период квантования); A — $r+1$ -мерный случайный или неизвестный вектор подлежащего преобразованию сигнала, причем его составляющие a_j , $j = \overline{0, r}$, физически представляют, например, значения сигнала и r его первых производных в конечной точке интервала наблюдения; F — $(l+1) \times (r+1)$ — матрица, определяющая структуру преобразуемого сигнала и имеющая при данной интерпретации вектора A вид

$$F = ((-1)^j (1/j!) T^j (l-i)^j), \quad i = \overline{0, l}, \quad j = \overline{0, r}, \quad 0^0 = 1, \quad l > r;$$

P — вектор независимых от A шумов; H — известный вектор, постулирующий вид преобразования (прогноз, дифференцирование, интерполяцию и т. п.).

Данная задача допускает многочисленные обобщения [3—5], однако обычно используется предпосылка об априори известном распределении шумов $\omega(P)$. Вместе с тем, во многих ситуациях необходимая для решения задачи априорная информация отсутствует и известным можно считать лишь вид функции $\omega(P)$, а определяющие ее параметры оказываются неизвестными. Это эквивалентно заданию условной плотности $\omega(P/D)$, где D — неизвестный параметр (в общем случае векторный). Наиболее часто D — дисперсия шумов или однозначно с ней связанная величина. Решение задачи при неизвестном D достигается различными путями. Если имеется возможность образовать обучающую последовательность векторов p , параметр D можно оценить на основании этой последовательности с использованием известных (например, [6]) подходов к оцениванию. При отсутствии обучающей выборки наиболее простой способ решения задачи сводится к методу наименьших квадратов, не использующему информацию о свойствах помех. Однако применение этого метода ограничено относительно низкой точностью в условиях негауссовых шумов. Поэтому целесообразнее при решении задачи руководствоваться сформулированными к настоящему времени общими принципами адаптации ([7]—[9]), согласно которым можно пойти двумя путями. Используя асимптотическую нечувствительность оптимальных оценок к априорным распределениям, для параметра D можно ввести произвольную плотность распределения и решение задачи осуществить в терминах байесовых оценок с дополнительным осреднением по D . При втором способе осреднение по D заменяется оцениванием величины D в соответствии с некоторым критерием, например, условием максимального правдоподобия, которое осуществляется одновременно с поиском оценки \hat{h} . К сожалению, эти принципы не могут найти непосредственного применения в рассматриваемой задаче. Из-за конечности памяти системы асимптотические свойства оценок не проявляются, поэтому оценки зависят от априорной плотности параметра D , что не позволяет назначить ее произвольно. Оценивание же D по конечномерной выборке V существенно влияет на точность оценивания величины $H^T A$ по той же выборке. Все это делает необходимым проведение самостоятельных исследований.

Чувствительность оптимальных алгоритмов. Построению адаптивных алгоритмов целесообразно предпослать оценку чувствительности оптимальных алгоритмов фильтрации к априорной информации о величине D , так как результаты этого анализа в значительной степени могут определять принцип адаптации. Осуществить подобное исследование в общем случае фильтрации конечномерных последовательностей не удастся. Проведем его на ряде частных задач, широко представленных в практических ситуациях.

Пусть сформулированная задача решается при распространенных условиях $A \in N(0, K_A)$, $P \in N(0, DE)$ (E — единичная матрица) и на этапе проектирования системы предполагается, что дисперсия шумов равна \hat{D} , в то время как в действительности она равна D . Оценим точность системы. Предварительно заметим, что в силу коммутативности среднеквадратических оценок относительно линейных преобразований [10] можем представить

$$\hat{h} = H^T \hat{A}, \quad (2)$$

где \hat{A} — оценка вектора A , определяемая условием

$$R = M_{A, V/\hat{D}} \{ \|A - \hat{A}(V)\|^2 \} = \min_A$$

равна условному среднему

$$\hat{A} = \frac{\int_A A \mu(A) L(V/A, \hat{D}) dA}{\int_A \mu(A) L(V/A, \hat{D}) dA} \quad (3)$$

Здесь $M_{A, V/\hat{D}}$ — символ осреднения по пространствам векторов A и V при фиксированной величине \hat{D} ; $\|\dots\|$ — евклидова норма вектора; $\mu(A)$ — априорная плотность A ; $L(V/A, \hat{D})$ — функция правдоподобия. Поэтому точность системы характеризуем ковариационной матрицей ошибок оценивания вектора A , т. е. матрицей

$$K = M_{A, V/\hat{D}} \{ (A - \hat{A}(V)) (A - \hat{A}(V))^T \}. \quad (4)$$

Из (3) в рассматриваемом случае следует

$$\hat{A} = D^{-1} \frac{1}{\hat{D}} F^T V; \quad D = K_A^{-1} + \frac{1}{\hat{D}} F^T F, \quad (5)$$

что после подстановки в (4) и ряда преобразований позволяет установить

$$K = D^{-1} \left(K_A^{-1} + \frac{D}{\hat{D}^2} F^T F \right) D^{-1}. \quad (6)$$

При условии $\hat{D} = D$ соотношение (6) приводит к известной из теории оптимальной фильтрации ковариационной матрице ошибок оптимальной системы

$$K_0 = D_0^{-1}; \quad D_0 = K_A^{-1} + \frac{1}{D} F^T F.$$

С целью конкретизации результатов рассмотрим скалярный случай $r=0$, соответствующий фильтрации постоянного на интервале наблюдения сигнала. Здесь K имеет смысл среднего квадрата ошибки, и из (6) следует

$$K = \frac{\hat{D}^2 + DD_0(l+1)}{(\hat{D} + D_0(l+1))^2} D_0, \quad (7)$$

где D_0 — дисперсия фильтруемого сигнала. Представив $\hat{D} = D + \Delta D$ величину (7) разложим в ряд по степеням ΔD . Учитывая быстрое стремление к нулю коэффициентов этого ряда, ограничим разложение первыми тремя членами, что позволяет записать

$$K = K_0 + 2D_0 \frac{4D + D_0(l+1)}{(D + D_0(l+1))^3} \Delta D^2, \quad K_0 = \frac{DD_0}{D + D_0(l+1)}. \quad (8)$$

Следовательно, средний квадрат ошибки при отклонении расчетных параметров системы от действительных возрастает по квадратичному закону, но скорость возрастания в области реальных l, D, D_0 , как показывает числовой анализ, весьма невелика.

Подобное свойство проявляется и при иных законах распределения помех. Проиллюстрируем это примером фильтрации неизвестного сигнала a_0 на фоне помех с различными законами распределения. В этом случае оптимальный алгоритм следует из (3) в предположении «широкого» априорного распределения величины a_0 :

$$\hat{a}_0 = \frac{\int_{\Gamma} a_0 L(V/a_0, \hat{D}) da_0}{\int_{\Gamma} L(V/a_0, \hat{D}) da_0}, \quad (9)$$

причем область интегрирования Γ определяется диапазоном существования функции правдоподобия $L(V/a_0, \hat{D})$.

Пусть шумы p_i , $i=\overline{0, l}$, независимы и распределены по экспоненциальному закону с нулевым средним и дисперсией D , т. е.

$$\omega(p_i) = \beta \exp\{-\beta(p_i + 1/\beta)\}, \quad D = 1/\beta^2, \quad p_i > -1/\beta,$$

но при проектировании считается $D = \hat{D}$. Тогда удается показать (см. приложение), что

$$\hat{a}_0 = v_{\min} + \sqrt{\hat{D}l/(l+1)}, \quad (10)$$

где v_{\min} — минимальное наблюдение в реализации V . Средний квадрат ошибки этой оценки в условиях шумов с дисперсией D оказывается равным

$$K = (1/(l+1)^2) [(l^2+1)D - 2l^2(D\hat{D})^{1/2} + l^2\hat{D}], \quad (11)$$

и при малых ΔD , подобно (8), получаем

$$K = K_0 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{(l+1)^2} \frac{\Delta D^2}{D}; \quad K_0 = \frac{D}{(l+1)^2}. \quad (12)$$

Здесь K_0 — средний квадрат ошибки в оптимальной системе при известной величине D .

С целью более широкого анализа чувствительности оценок к априорной информации о параметре D алгоритм (9) исследовался также при центрированных независимых шумах, распределенных по закону Релея и одностороннему нормальному закону. В этих случаях установить аналитически подобные (10) алгоритмы не удается и исследование проводилось путем моделирования на ЭВМ. Принималось $l+1=5; 10; 15$, $D=1$, интегралы в (9) вычислялись методом Монте-Карло, осреднение проводилось по $5 \cdot 10^3$ реализациям. На рис. 1 представлены зависимости средних квадратов ошибки в функции \hat{D} при $l+1=5$: кривая 1 получена для экспоненциального закона; кривая 2 — для одностороннего нормального закона; кривая 3 — для релеевского закона. Кривая, соответствующая экспоненциальному распределению, построена также с использованием ЭВМ, но на основании (10). Штриховой линией помечен средний квадрат ошибки при использовании метода наименьших квадратов. Кривые при $l+1=10; 15$ обладают подобными же свойствами и не приводятся.

Анализ полученных экспериментальных кривых и аналитических зависимостей (8), (12) позволяет утверждать, что для достижения точности оценивания, близкой к предельной, достаточно использовать приближенную информацию о дисперсии шумов, которая может быть получена простыми средствами в процессе функционирования системы.

Адаптивный алгоритм. Слабая чувствительность оптимальных алгоритмов к информации о дисперсии шумов позволяет определять последнюю в процессе функционирования системы на основании оценок помех. Обозначим через V_{n-l}^n — вектор наблюдений (1) на интервале $t_{n-l} \leq t \leq t_n$, а через $\hat{A}^{(n)}$ — оценку вектора A , со-

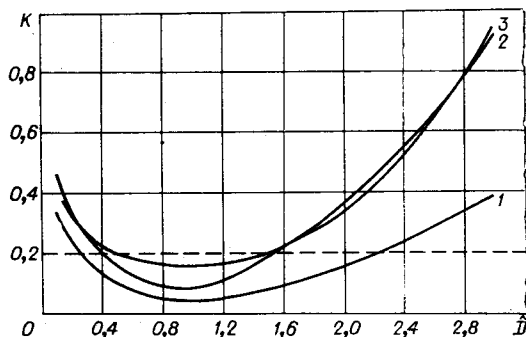


Рис. 1. Чувствительность оптимальных алгоритмов.

ответствующую V_{n-l}^n . Пусть $\hat{D}^{(n)}$ — оценка величины D в момент t_n . Адаптацию системы при неизвестной априори дисперсии D и случайном векторе A будем осуществлять по следующему очевидному алгоритму:

$$\hat{A}^{(n)} = \frac{\int_A \mu(A) L(V_{n-l}^n/A, \hat{D}^{(n-1)}) dA}{\int_A \mu(A) L(V_{n-l}^n/A, \hat{D}^{(n-1)}) dA}, \quad (13)$$

$$n = l + 1, l + 2, \dots;$$

$$\hat{D}^{(n-1)} = \frac{1}{n-r-1} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{p}_i^2; \quad (14)$$

$$\hat{p}_i = v_i - f_{i+1}^T \hat{A}^{(l)}, \quad i = \overline{0, l}; \quad (15)$$

$$\hat{p}_i = v_i - \hat{a}_0^{(i)}, \quad i = \overline{l+1, n-1}; \quad (16)$$

$$\hat{A}^{(l)} = (F^T F)^{-1} F^T V_0^l. \quad (17)$$

Здесь v_i — наблюдение в i -й момент; $\hat{a}_0^{(i)}$ — оценка компоненты a_0 вектора A в момент t_i ; f_{i+1}^T — $i+1$ -я строка матрицы F . При неизвестном векторе A используются соотношения (14) — (17), но

$$\hat{A}^{(n)} = \frac{\int_{\Gamma} AL(V_{n-l}^n/A, \hat{D}^{(n-1)}) dA}{\int_{\Gamma} L(V_{n-l}^n/A, \hat{D}^{(n-1)}) dA}, \quad (18)$$

$$n = l + 1, l + 2, \dots$$

Данный алгоритм подвергался многочисленным экспериментальным исследованиям. Приведем результаты некоторых из них.

В первом эксперименте принималось $A \in N(m_A, K_A)$, $P \in N(0, DE)$, $K_A = 0, 1E$, $m_A = 1$ (вектор, состоящий из единиц), $r = 0; 1; 2$. В этом случае из (13) следует

$$\hat{A}^{(n)} = \left(K_A^{-1} + \frac{1}{\hat{D}^{(n-1)}} F^T F \right)^{-1} \left(\frac{1}{\hat{D}^{(n-1)}} F^T V_{n-l}^n + K_A^{-1} m_A \right). \quad (19)$$

Моделирование проводилось при $D=1$, $l+1=10$, $T=0,1$. Процесс адаптации контролировался по кривой установления оценки \hat{D} . На рис. 2 приведены временные зависимости средних квадратов ошибки этой величины

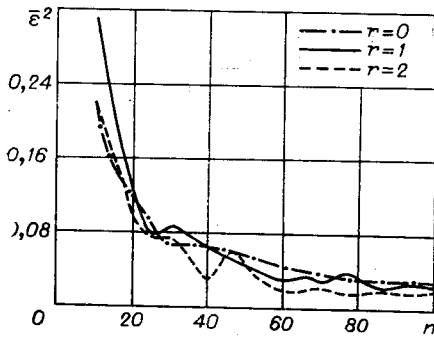


Рис. 2. Оценивание дисперсии гауссовых шумов.

$$\overline{(e^{(n)})^2} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (\hat{D}_s^{(n)} - 1)^2,$$

где $\hat{D}_s^{(n)}$ — оценка \hat{D} в n -й момент времени для s -й реализации; N — число реализаций ($N=20$) для случаев $z=0; 1; 2$.

Во втором и третьем экспериментах независимые центрированные помехи были распределены по экспоненциальному и реле-

евскому закону соответственно и исследовался одномерный ($r=0$) случай неизвестного параметра a_0 . В процессе адаптации восстанавливалась дисперсия шумов D и на основании (9), а при экспоненциальных шумах на основании (10) вычислялись оценки a_0 . На рис. 3 приведены зависимости от времени средних квадратов ошибок восстановления величины β при экспоненциальных помехах и дисперсии D при релеевских шумах. Осреднение проводилось по 10^3 реализациям, причем в экспериментах принималось $D=1$. На рис. 4 для случая $l+1=5$ приведены временные зависимости средних квадратов ошибок оценивания величины a_0 в этих же экспериментах. Штриховой линией помечен средний квадрат ошибки в системе без адаптации, основанной на критерии наименьших квадратов.

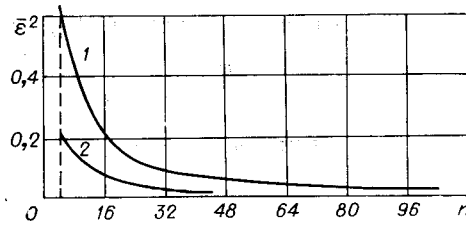


Рис. 3. Оценивание параметров
1 — экспоненциальной и 2 — релеевской плотностей.

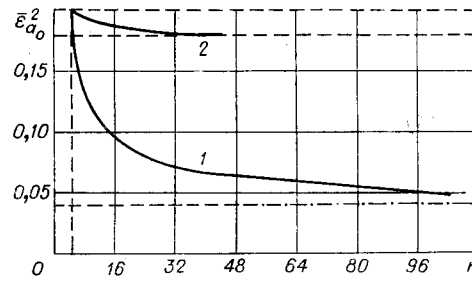


Рис. 4. Точностные характеристики адаптивных систем:
1 — экспоненциально-распределенные и 2 — релеевские шумы.

ВЫВОДЫ

Исследуемый в работе подход основан на относительно слабой чувствительности характеристик оптимальных систем к априорной информации о параметрах помех и сводится к двухканальной системе обработки входных данных. Точность адаптивного оценивания близка к предельно достижимой в байесовых алгоритмах и в значительной степени определяется характером распределения помех.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция правдоподобия в соответствии с моделью (1) при экспоненциально распределенных независимых помехах определяется выражением

$$L(V/a_0, \hat{D}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^l \hat{\beta} \exp \left\{ -\hat{\beta} \left(v_i - a_0 + \frac{1}{\hat{\beta}} \right) \right\} & (v_i - a_0 > -\frac{1}{\hat{\beta}}); \\ 0 & (v_i - a_0 < -\frac{1}{\hat{\beta}}). \end{cases}$$

Эта функция отлична от нуля при

$$-1/\hat{\beta} < v_i - a_0 < \infty, \quad i = \overline{0, l},$$

т. е. при

$$-\infty < a_0 < 1/\hat{\beta} + v_{\min}. \quad (20)$$

Подставив $L(V/a_0, \hat{D})$ в (9) и проинтегрировав по диапазону (20), получим (10).

Средний квадрат ошибки (11) находится как

$$K = M_{p_{\min}/\beta} \left\{ \left(p_{\min} + \frac{l}{(l+1)\beta} \right)^2 \right\},$$

где p_{\min} — минимальная помеха. Необходимую для вычисления K плотность распределения $\sigma(p_{\min})$ величины p_{\min} можно найти на основании теории порядковых статистик [11]

$$\sigma(p_{\min}) = (l+1) [1 - F(p_{\min})]' \omega(p_{\min}),$$

где $F(\cdot)$ и $\omega(\cdot)$ — интегральное и дифференциальное распределения произвольного компонента вектора P . Поэтому

$$\sigma(p_{\min}) = \begin{cases} (l+1)\beta \exp\left\{-(l+1)\beta\left(p_{\min} + \frac{1}{\beta}\right)\right\} & \left(p_{\min} > -\frac{1}{\beta}\right); \\ 0 & \left(p_{\min} < -\frac{1}{\beta}\right). \end{cases}$$

Последующее интегрирование непосредственно приводит к (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Кованиц. Обобщенный дискретный аналог задачи Заде — Рагазини. — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 2, с. 37—48.
2. К. Спири, Р. Браун, Дж. Гудвин. Теория управления. М., «Мир», 1973.
3. Е. П. Чураков. Построение дискретных, преобразующих систем в условиях недостоверной априорной информации. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 6, с. 41—47.
4. Е. П. Чураков. Построение дискретных преобразующих систем при наличии многих информационных каналов. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 3, с. 62—66.
5. В. П. Кузнецов, Е. П. Чураков. Метод полигауссовой аппроксимации в задаче построения оптимальной дискретной системы. — «Автоматика и телемеханика», 1975, № 9, с. 52—59.
6. В. Н. Пугачев, Е. И. Шапиро. Параметрическая оценка законов распределения. — «Зарубеж. радиоэлектроника», 1975, № 2, с. 3—27.
7. Я. З. Цыпкин. Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
8. Р. Л. Стратонович. Принципы адаптивного приема. М., «Сов. радио», 1973.
9. В. В. Шахгильдян, М. С. Лохвицкий. Методы адаптивного приема сигналов. М., «Связь», 1974.
10. Г. Ван-Трис. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М., «Сов. радио», 1972.
11. С. Уилкс. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию 19 января 1976 г.;
окончательный вариант — 4 мая 1976 г.

УДК 621.374.3

М. И. ДЕМЧУК, В. П. КУЗНЕЦОВ, А. В. ПОТАПОВ,
В. Н. ХАЙМИНОВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

(Минск)

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕТОДОМ МНОГОКАНАЛЬНОГО СТРОБИРОВАНИЯ

Регистрация формы слабых световых сигналов квазипериодической последовательности в области спектра от ультрафиолетовой до красной не представляет особых трудностей, так как для данной области выпу-