

Л. А. МАМОНТОВА, В. А. ПОНОМАРЕВ, Е. П. ПОПЧИТЕЛЕВ  
(Ленинград)

## МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СВЯЗИ ДИСКРЕТНЫХ СПЕКТРОВ ФУРЬЕ И УОЛША

Среди известных методов автоматической обработки случайных процессов спектральный анализ по экспоненциальному базису занял важное место в различных областях научных исследований и при решении практических задач [1, 2]. В частности, в медицине и физиологических исследованиях он находит применение для анализа различных биологических сигналов — электрокардиограмм, электроэнцефалограмм и др. [3, 4].

Существенное место в физиологических исследованиях, особенно в длительных экспериментах, занимает непрерывная оценка мгновенного состояния организма по ряду физиологических показателей. В организме человека происходят сложные динамические взаимодействия различных регуляторных систем, которые отражаются в определенных биоритмах. Для выявления этих ритмов текущий спектральный анализ является основным средством, позволяющим оценивать тонкую «волновую структуру» процессов [3]. Важное значение при этом имеют простота технической реализации спектральных преобразований и повышение скорости вычислений мгновенных спектров сигнала. Спектральная плотность мощности дискретных сигналов обычно представляется в виде отсчетов мощности гармонических составляющих спектрального разложения Фурье. Однако разложение сигнала по системе тригонометрических функций (спектр Фурье) — только одно из возможных его представлений. Для спектрального разложения может быть применена любая полная ортогональная система базисных функций, например система функций Уолша. Использование функций Уолша значительно уменьшает время на спектральное разложение сигналов за счет применения алгоритма быстрого преобразования Уолша (БПУ). В то же время техническая реализация этого преобразования намного проще, поскольку функции Уолша принимают только значения  $\{+1, -1\}$ . Для практического использования БПУ с учетом общепринятой физиологической интерпретации результатов обработки биологических сигналов необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между коэффициентами спектрального разложения Фурье и Уолша. Взаимосвязь двух способов разложения для непрерывных сигналов исследовалась в работе [5], однако полученные при этом результаты не могут быть применены для сопоставления спектров дискретных сигналов.

Задача данной работы — определение матричной связи спектральных разложений произвольной функции  $\psi(i)$  ( $i$  — дискретный параметр), заданной  $N=2^p$  ( $p=1, 2, \dots$ ) отсчетами, в базисах Фурье и Уолша.

Дискретную функцию можно представить в виде вектора  $\Psi$   $N$ -мерного линейного пространства, который может быть разложен ортогональным базисом Фурье и Уолша:

$$\Psi = (L^F)^T E^F = (L^W)^T E^W,$$

где  $L^F = \|l_m^F\|$ ,  $L^W = \|l_k^W\|$ ,  $m, k=0, N-1$  — столбцевые матрицы коэффициентов разложения вектора  $\Psi$  в базисах Фурье и Уолша соответственно;  $E^F = \|e_m^F\|$ ,  $E^W = \|e_k^W\|$ ,  $m, k=0, N-1$ , — базисные векторы разложения Фурье и Уолша.

Зависимость между базисными векторами можно выразить в векторной форме через матрицу перехода  $R = \|r_{km}\|$ :

$$E^W = RE^F.$$

Элементы матрицы  $R$  представляют собой коэффициенты разложения векторов  $E^W$  по системе базисных векторов  $E^F$ . Поскольку базисные системы  $E^W$  и  $E^F$  при условии нормировки являются ортонормированными, преобразование координат любой точки при переходе от одного базиса к другому производится обычным путем

$$L^W = RL^F, L^F = R^T L^W$$

при помощи ортогональных матриц перехода  $R$  и  $R^T$ .

Исходя из линейной изоморфности векторного и функционального пространств [2], элементы матриц  $L^F$  и  $L^W$  можно определить как коэффициенты спектрального разложения дискретной функции  $\psi(i)$  по соответствующим системам базисных функций:

1) в базисе Фурье — по системе тригонометрических функций  $\{\sin[(2\pi/N)ni], \cos[(2\pi/N)ni]\}$  отдельно для четных  $m=2n$  и нечетных  $m=2n-1$  номеров функций:

$$\begin{aligned} l_m^F &= l_{2n-1}^F = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i) \sin\left(\frac{2\pi}{N} ni\right); \\ l_m^F &= l_{2n}^F = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i) \cos\left(\frac{2\pi}{N} ni\right), \quad n = 1, \overline{\frac{N}{2}-1}; \\ l_0^F &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i), \quad l_{N-1}^F = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i) \cos(\pi i); \end{aligned} \quad (1)$$

2) в базисе Уолша — по системе дискретных функций Уолша  $\{\text{wal}(k, i)\}$ , упорядоченных по числу перемен знака ( $k$ ) на интервале определения  $N$ , в виде

$$l_k^W = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i) \text{wal}(k, i).$$

Элементы матрицы  $R$  можно определить, подставляя в выражение (1) вместо  $\psi(i)$  базисные функции Уолша. Транспонирование матрицы  $R$  дает матрицу  $R^T = \|r_{mk}\|$ , отображающую спектр из базиса Уолша в базис Фурье.

Известно [2], что система  $\{\text{wal}(k, i)\}$  представляет собой систему четных  $k=2j$  и нечетных  $k=2j-1$  функций Уолша

$$\text{cal}(j, i) = \text{wal}(2j, i), \text{sal}(j, i) = \text{wal}(2j-1, i)$$

дискретного параметра  $j$ , определяемого как частота следования функций Уолша. С целью разделения четных и нечетных составляющих обозначим коэффициенты спектрального разложения в рассматриваемых базисах следующим образом:

$$\begin{aligned} a_c^F(n) &= l_{2n}^F, & a_s^F(n) &= l_{2n-1}^F; \\ a_c^W(j) &= l_{2j}^W, & a_s^W(j) &= l_{2j-1}^W. \end{aligned}$$

Тогда, используя блочное представление матрицы преобразования  $R^T$ ,

в общем случае  $N=2^p$  можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \|a_c^F(n)\| &= Q_{11} \|a_c^W(j)\| + Q_{12} \|a_s^W(j)\|; \\ \|a_s^F(n)\| &= Q_{21} \|a_c^W(j)\| + Q_{22} \|a_s^W(j)\|, \quad n, j = 1, \frac{N}{2} - 1; \\ a_c^F(0) &= a_c^W(0), \quad a_c^F\left(\frac{N}{2}\right) = a_s^W\left(\frac{N}{2}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\|a_c^F(n)\|, \|a_s^W(j)\|$  — столбцовые матрицы четных коэффициентов матриц  $L^F$  и  $L^W$ ;  $\|a_s^F(n)\|, \|a_c^W(j)\|$  — столбцовые матрицы нечетных коэффициентов матриц  $L^F$  и  $L^W$ ;  $Q_{11}, Q_{22}$  — квадратные матрицы размерности  $(N/2-1)$  с элементами  $q_{nj}^{11} = r_{(2n)(2j)}$  и  $q_{nj}^{22} = r_{(2n-1)(2j-1)}$ ;  $Q_{12} = KQ_{11}K$ ;  $Q_{21} = -KQ_{22}K$ ,  $K$  — перестановочная матрица, элементы которой определяются символом Кронекера  $k_{nj} = \delta_n\left(\frac{N}{2} - j\right)$ . Матрица  $Q_{22}$  отличается от

$Q_{11}$  лишь матрицей знаков

$$U_{22} = KU_{11}K,$$

где элементы матриц  $U_{11}$  и  $U_{22}$  определяются в соответствии с выражениями  $u_{nj}^{11} = \text{sign } q_{nj}^{11}$ ;  $u_{nj}^{22} = \text{sign } q_{nj}^{22}$ . Представим  $Q_{11}$  и  $Q_{22}$  в виде

$$Q_{11} = \|q_{nj}^{11}\| = \|u_{nj}^{11} b_{nj}^{11}\|; \quad Q_{22} = \|q_{nj}^{22}\| = \|u_{nj}^{22} b_{nj}^{22}\|,$$

где  $b_{nj}^{11} = |q_{nj}^{11}| = b_{nj}^{22} = |q_{nj}^{22}|$ ;  $u_{nj}^{22} = u_{\left(\frac{N}{2} - n\right)\left(\frac{N}{2} - j\right)}^{11}$ .

Таким образом, элементы матрицы  $Q_{22}$  можно определить через элементы матрицы  $Q_{11}$  как

$$q_{nj}^{22} = u_{\left(\frac{N}{2} - n\right)\left(\frac{N}{2} - j\right)}^{11} b_{nj}^{11}. \quad (3)$$

Следовательно, можно формировать значения полной матрицы преобразования  $R^F$  за счет хранения только элементов матрицы  $Q_{11}$ . Матрицы  $Q_{11}$  для  $N=8$  и 16 приведены на рис. 1, а, б.

Полученные результаты могут быть использованы, например, при непрерывном анализе биологических сигналов для вычисления мгновенной спектральной плотности мощности:

$$g_{\mu}^F(n) = \frac{N}{2} \left\{ (a_c^F(n))^2 + (a_s^F(n))^2 \right\}_{\mu}, \quad (4)$$

б

$Q_{11}, N=16$

		j								
		1	2	3	4	5	6	7		
n	1	1,26		0,52		-0,10		0,25		
	2		1,21				0,50			
	3			0,90		0,60		0,25		
	4				1					
	5					0,17	-0,40	0,60	0,25	
	6						-0,21		0,50	
	7							0,05	-0,02	-0,10

а

$Q_{11}, N=8$

		j		
		1	2	3
n	1	1,21		0,50
	2		1	
	3			0,50

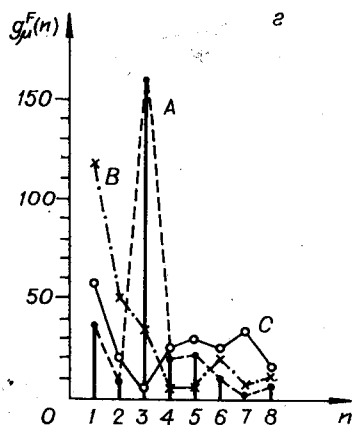
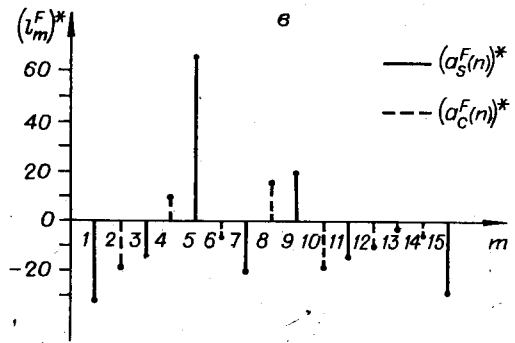
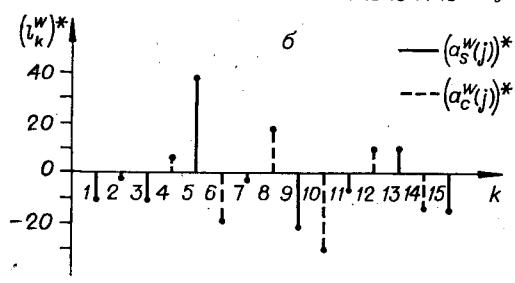
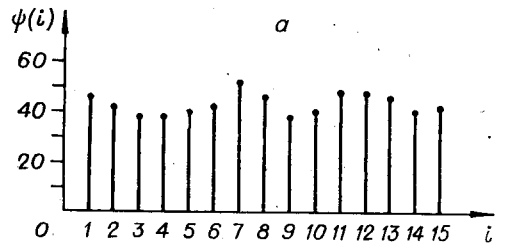


Рис. 2.

где  $\mu$  — номер отрезка реализации, каждый из которых представлен  $N=2^p$  отсчетами.

Используя выражения (2) и (3), коэффициенты спектрального разложения Фурье можно определить как

$$\|a_c^F(n)\| = \|u_{nj}^{11} b_{nj}^{11}\| \|a_c^W(j)\| + \left\| u\left(\frac{N}{2}-n\right)\left(\frac{N}{2}-j\right) b\left(\frac{N}{2}-n\right)\left(\frac{N}{2}-j\right) \right\| \|a_s^W(j)\|; \quad (5)$$

$$\|a_s^F(n)\| = \left\| u\left(\frac{N}{2}-n\right)\left(\frac{N}{2}-j\right) b_{nj}^{11}\right\| \|a_s^W(j)\| - \left\| u_{nj}^{11} b\left(\frac{N}{2}-n\right)\left(\frac{N}{2}-j\right) \right\| \|a_c^W(j)\|.$$

Спектральные коэффициенты Уолша, представленные в виде матриц-столбцов  $\|a_c^W(j)\| \|a_s^W(j)\|$ , вычисляются на основе алгоритма БПУ.

Для иллюстрации рассмотрим процесс вычисления мгновенной спектральной плотности мощности Фурье  $g_\mu^F(n)$  последовательности  $RR$ -интервалов электрокардиограммы, заданной  $N=16$  отсчетами.

На рис. 2, а представлена исходная последовательность  $RR$ -интервалов. На рис. 2, б приведены ненормированные коэффициенты спектрального разложения Уолша, т. е.

$$(a_c^W(j))^* = N a_c^W(j) \text{ и } (a_s^W(j))^* = N a_s^W(j).$$

Вычисления по формулам (5) с использованием матрицы перехода  $Q_{11}$ ,  $N=16$  (см. рис. 1, б) дают в результате спектральные коэффициенты Фурье, представленные на рис. 2, в. Спектральная плотность мощности Фурье, приведенная в виде дискретных отсчетов  $g_\mu^F(n)$ ,  $n=1, \bar{8}$  (см. рис. 2, г, огибающая  $A$ ), вычислена по выражению (4). На этом же рисунке представлены огибающие  $B$  и  $C$  спектральной плотности мощности  $g_\mu^F(n)$ , полученные аналогичным путем для других отрезков исследуемой реализации.

Таким образом, использование полученных матриц связи дискретных спектров Фурье и Уолша позволяет осуществлять спектральный анализ сигналов в базисе Фурье, используя разложение по системе дискретных функций Уолша. Вычисление спектральных коэффициентов Фурье на основе БПУ существенно сокращает время обработки, во-первых, за счет  $N \log_2 N$  операций сложения вместо того же числа умножений комплексных чисел, а во-вторых, за счет блочной компоновки матриц перехода и однозначной связи между блоками.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Дженкинс, Д. Ваттс. Спектральный анализ и его приложения. М., «Мир», 1971, т. 1; 1972, т. 2.
2. А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М., «Сов. радио», 1975.
3. З. Янушкевичус, В. Кусас, Д. Жемайтис. Автокорреляционный и спектральный анализ синусового ритма сердца.— «Cor et Vasa», 1973, Ed. ross. т. 15, № 2, с. 108—120.
4. D. Vognet, J. Schuh, G. Tomaselli. Die Analyse biologischer Rhythmen mittels Korrelationsfunktion und Power-Spektrum.— «Biologisches Zentralblatt», 1975, Bd 94, H. 1, S. 3—15.
5. Н. М. Блэчмен. Сопоставление преобразований Фурье и Уолша.— «ТИИЭР», 1974, т. 62, № 3, с. 72—83.

Поступила в редакцию 28 января 1976 г.;  
окончательный вариант — 18 мая 1976 г.