

В. М. ВОЛОДИН, О. С. ЛЮБУТИН
(Москва)

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Создание нового измерительного прибора (ИП) — проблема весьма сложная. Процесс совершенствования электронной схемы и доведения прибора до промышленного образца требует длительного времени и значительных материальных затрат. Результаты эксперимента на действующем макете прибора носят обычно частный характер и почти не поддаются обобщению. Сложность ИП, нелинейность их элементов и случайный характер явлений, происходящих в элементах, затрудняют технические расчеты. Применение математического моделирования как метода проектирования ИП позволило бы обойтись без эмпирических методов испытания его на серии опытных образцов. В основу такого метода может быть положен блочный принцип построения модели. ИП рассматривают как сочетание различных элементарных блоков, которые можно описать определенными математическими соотношениями, а затем объединить их в систему относительно общих параметров. Получив функциональные зависимости, характеризующие свойства отдельных элементов, можно попытаться создать «фонд» математических моделей различных блоков, а затем, пользуясь ими как составными элементами и варьируя составом и параметрами, конструировать самые разнообразные схемы ИП. Тогда можно будет не строить заново модель каждого ИП, а, проведя соответствующую классификацию их, создать унифицированные модели для каждого класса приборов.

Преимущества такого метода моделирования ИП достаточно очевидны. Во-первых, его можно использовать на начальной стадии проектирования, когда неизвестен еще окончательный вариант аппаратного оформления. Во-вторых, он позволяет, не прибегая к сложным и дорогостоящим натурным экспериментам, используя мощное средство моделирования — вычислительную технику, изучать характеристики проектируемых приборов. И, наконец, в-третьих, применяя математические методы оптимизации, можно заранее строить оптимальные структуры ИП, обеспечивающие заданную точность.

Первоначальные сведения о предполагаемой блок-схеме прибора получают на основе имеющихся априорных знаний и логических заключений. В качестве элементов схемы выбираются такие блоки, которые допускают аналитическое или экспериментальное исследование или уже исследовались ранее методом моделирования. Затем определяют совокупность параметров, воздействующих на каждый отдельный блок прибора при соединении их в конкретной схеме.

Математическую модель ИП в общем виде можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, z_1, u_1), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_N &= f_N(x_N, z_N, u_N), \end{aligned} \tag{1}$$

где x_1, x_2, \dots, x_N — векторы входных параметров блоков; y_1, y_2, \dots, y_N — векторы выходных параметров; z_1, z_2, \dots, z_N — векторы возмущающих воздействий; u_1, u_2, \dots, u_N — векторы управляющих параметров. В выражении (1) на все векторы наложены естественные ограничения $x_i \in X$,

$y_i \in Y, z_i \in Z, u_i \in U, i=1, \dots, N$, где X, Y, Z, U — замкнутые ограниченные множества.

Для получения полной модели систему (1) необходимо дополнить соотношением, характеризующим соединения, имеющие место в ИП (рис. 1):

$$x_{i+1} = \sum_{j=1}^N a_j y_j, \quad 0 \leq a_j \leq 1. \quad (2)$$

На основе (1) и (2) может быть проведено моделирование всего прибора путем приближенной или точной реализации этих зависимостей на ЭВМ. Тот факт, что процессы, протекающие в самом приборе, гораздо менее инерционны, чем изменения, происходящие в реальных технологических процессах, позволяет использовать для целей моделирования прибора лишь статистические характеристики (СХ) блоков. Естественно, что при отсутствии каких-либо сведений о виде СХ надо попытаться получить их из экспериментального материала.

После получения статистических характеристик блока и его возмущающих воздействий можно промоделировать работу этого блока, например, каким-либо из методов статистического моделирования. Для этого необходимо создать моделирующий алгоритм, который бы имитировал поведение параметров блока и их взаимодействие с учетом случайных возмущающих факторов и выдавал оценки характеристик системы, предусмотренных программой.

На последнем этапе решения задачи — оптимизации — могут быть рассмотрены два варианта:

- 1) выбор оптимального значения параметров ИП заданной структуры, которые обеспечивают получение минимального разброса показаний прибора при автоматическом контроле технологических параметров;
- 2) нахождение оптимальной структуры ИП, обеспечивающего заданную точность измерений.

Далее будут рассмотрены оба варианта.

Определение оптимального уровня стабилизации возмущающих воздействий, обеспечивающих минимальное влияние их на выходной параметр, проведено на примере прибора для контроля количества растворимых (степени отверждения) в дозирующемся стекловолокните (ДСВ) [1].

Принцип работы прибора основан на контроле изменения высокочастотной активной проводимости в процессе отверждения смолы. Измеряется активная проводимость материала определенного объема с коррекцией на плотность засыпки путем взвешивания и внесения в показание прибора соответствующей поправки. Содержание связующего и летучих должно находиться в пределах технологического регламента: связующее (39 ± 2), летучих ($1,0 \div 3,0$)%. При этом погрешность измерения количества растворимых не превышает 3%.

Однако, как показали измерения и лабораторные анализы, количество связующего и летучих, а потому и вес материала колеблется в более широких пределах, чем указывает допуск (в связи с обрывами нитей, остановками и пуском машин): по связующему ($36,0 \div 44,5$)% и летучим ($0,8 \div 1,5$)%. Поэтому была поставлена задача получить математическую модель при более широких допусках параметров для определения точности измерения, а также найти оптимальную область изменения параметров, обеспечивающих более высокую точность измерения (погрешность менее 1,5%).

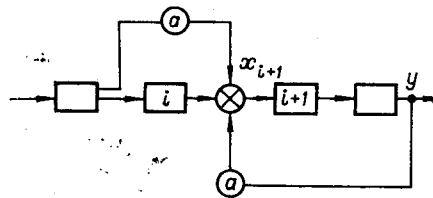


Рис. 1.

В качестве входных параметров были приняты: x_1 — процент растворимых, x_2 — процент летучих, x_3 — процент связующего, x_4 — вес контролируемого образца. В качестве выходного параметра y взят процент растворимых, определенных прибором. Зависимость $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ была определена для материала ДСВ-4 марки «0». Было проведено 70 измерений, по результатам которых подсчитаны средние значения переменных и их среднеквадратические отклонения. Значения полученных коэффициентов взаимной корреляции (приводятся только значимые величины): $r_{x_1y} = 0,5931$; $r_{x_2y} = 0,8227$; $r_{x_1x_4} = 0,5048$; $r_{x_2x_4} = 0,2371$; $r_{x_3x_4} = 0,3772$. Прибор моделировался уравнением вида $y = 2,4(-5,3176x_1 - 29,0478x_2 - 5,978x_3 - 1,4x_4 + 0,0114x_1x_4 + 0,0572x_2x_4 + 0,012x_3x_4 + 667,6038) + 81,61$. Проверка подтвердила адекватность принятой модели.

Исследование поведения прибора в условиях случайного характера изменения параметров x_1-x_4 было проведено на ЭВМ БЭСМ-4 с помощью метода Монте-Карло [2]. В математическую модель прибора (3) были подставлены значения параметров x_1-x_4 , определенные по формуле

$$x_i = \bar{x}_i \pm \sigma_{x_i} z_i, \quad (3')$$

где z_i — значения случайной величины, распределенной в интервале $(-3, +3)$. При этом определялось значение y_m модели и метрологические параметры прибора: абсолютная погрешность и относительная погрешность измерения. Расчетные значения погрешностей соответственно равны: 1,5 и 1,8%. Анализ полученных данных показывает, что при большем изменении переменных ($\pm 3z$) погрешность измерения для материала ДСВ-4 марки «0» не ниже желаемой (1,5%).

С целью обеспечения более высокой точности измерений было принято решение сузить область изменения сопутствующих параметров x_2, x_3, x_4 . Для этого при моделировании прибора случайные числа z в выражении (3') были взяты из интервала $(-1, +1)$. Результаты расчета метрологических параметров исследуемого прибора при новом интервале варьирования переменных следующие: абсолютная погрешность 1,4139; относительная погрешность — 1,3%. Таким образом, для получения минимальной погрешности измерения степени отвердения для материала ДСВ-4 «0» (меньше — 1,5%) оптимальный диапазон изменения параметров x_2, x_3, x_4 должен быть в пределах $\pm \sigma_{x_i}$ при достаточно широком интервале изменения контролируемого параметра $x_i (\pm 3\sigma)$, т. е. должен быть изменен технологический регламент.

При создании прибора, изменяя его структуру или значения управляющих параметров отдельных блоков u_1, \dots, u_N , можно, очевидно, изменять характеристики всего прибора и улучшать качественные показатели. Степень улучшения качественных характеристик прибора может быть зафиксирована лишь при точном задании некоторой количественной оценки качества, зависящей от значений входных и выходных величин всего прибора.

Рассмотрим для простоты «однопараметрический» ИП, когда на вход прибора подается одна величина и на выходе фиксируется также значение одного параметра. Тогда x_1 будет измеряемым параметром, а y_N — выходным параметром прибора. Введем в рассмотрение $X = \{x_{1j}\}$ и $Y = \{y_{Nj}\}$, где X — допустимое множество значений входного параметра x_1 , Y — допустимое множество значений выходных параметров.

В процессе измерения получают две совокупности: $x_1, x_2, \dots, x_{1j}, \dots, x_m$ и $y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{Nj}, \dots, y_{Nm}$, каждый элемент которых принадлежит рассмотренным множествам: $x_{1j} \in X$ и $y_{Nj} \in Y, j=1, 2, \dots, m$ (j — номер измерения). Для задания критерия качества прибора необходимо определить некоторую меру близости двух совокупностей

$\{x_{1j}\}$ и $\{y_{Nj}\}$. Наиболее распространенным критерием такого типа является сумма квадратов отклонений

$$I = \sum_{j=1}^m (y_{Nj} - x_{1j})^2.$$

Однако использование квадратичного критерия для задачи оптимизации ИП представляется нецелесообразным, так как он может допускать большие отклонения для некоторых элементов совокупности $\{y_{Nj}\}$ от истинных значений $\{x_{1j}\}$. В этом случае общая близость совокупностей не дает гарантии близости двух произвольных значений из этих совокупностей. Это положение может быть проиллюстрировано графиком x_{1j} и y_{Nj} (рис. 2).

Очевидно, указанное обстоятельство противоречит сложившимся принципам оценки точности приборов. Обычно в качестве таких оценок используются класс точности, определяемый как отношение максимального отклонения показаний прибора от истинного значения измеряемого параметра к диапазону измерения. Обозначив класс точности прибора через δ , можно записать

$$\delta = \frac{\max_{x_{1j} \in X} |y_{Nj} - x_{1j}|}{\max_{y_{Nj} \in Y} y_{Nj} - \min_{y_{Nj} \in Y} y_{Nj}}. \quad (4)$$

Для улучшения качества прибора необходимо минимизировать значение δ путем выбора управляющих параметров блоков. Легко заметить, что в каждом конкретном случае величина δ зависит лишь от числителя выражения (4), так как величины, входящие в знаменатель выражения, являются неизменными и зависят от задания множества Y (диапазона измерения). Минимальное значение δ будет достигаться при минимизации $\max_{x_{1j} \in X} |y_{Nj} - x_{1j}|$ (за счет изменения значений y_{Nj} при выборе управляющих параметров u_1, \dots, u_N). Таким образом, наиболее приемлемый в данном случае критерий качества — минимаксный критерий, который можно записать в виде

$$I = \min_{u_i \in U} \max_{x_{1j} \in X} |y_{Nj} - x_{1j}|, \quad (5)$$

где U — допустимое множество параметров управления отдельными блоками.

Для решения задачи оптимизации могут быть использованы методы теории оптимального управления дискретными процессами, в частности динамическое программирование Р. Беллмана [3] и ряд других [4].

Рассмотрим схему применения метода динамического программирования для решения задачи оптимального проектирования простейшего однопараметрического ИП, который с учетом только прямых связей может быть изображен в виде структурной схемы (рис. 3). Ставится задача оптимизации для выбранного функционала

$$I = \min_{u \in U} \max_{x_1 \in X} |x_{N+1} - x_1|, \quad (6)$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)$ — вектор управления, U — допустимое множество

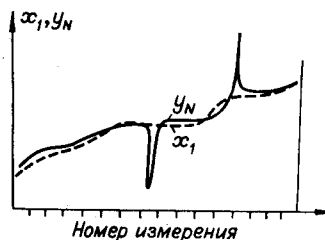


Рис. 2.

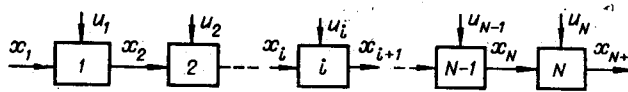


Рис. 3.

параметров управления отдельными блоками. При наличии связей в виде рекуррентных соотношений

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i), \quad (7)$$

где x_i , x_{i+1} — соответственно входной и выходной параметр i -го блока, требуется определить вектор $u = (u_1, \dots, u_N)$, минимизирующий максимальное отклонение показателей прибора от значения измеряемого параметра на всем диапазоне измерения.

Сделаем предположение, что ошибка измерения, которая будет зависеть от вектора управления u , может быть представлена в следующем виде:

$$F(u) = \max_{x_i \in X} |x_{N+1} - x_1| = \sum_{i=1}^N \max_{x_i \in X_i} |x_{i+1} - x_i| \quad (8)$$

(X_i — допустимое множество изменения x i -го блока). В результате мы получаем несколько видоизмененный критерий

$$I = \min_{u \in U} \sum_{i=1}^N \max_{x_i \in X_i} |x_{i+1} - x_i| = \min_{u \in U} F(u). \quad (9)$$

Функциональное уравнение Беллмана для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\Phi_{i+1}(x_{i+1}) = \min_{u_i \in U} \left[\max_{x_i \in X} |x_{i+1} - x_i| + \Phi_i(x_i) \right], \quad (10)$$

где $\Phi_i(x_i)$ — функция Беллмана.

Согласно общепринятому подходу, решение задачи определения оптимального управления нужно проводить, начиная с последнего блока. Для каждого заданного значения x_{N+1} и x_N вычисляют значение U , для которого максимальная разность во всем диапазоне измерения была бы минимальна, и затем переходят к оптимизации на следующем блоке $N-1$. Реализация данного алгоритма позволяет определить вектор $u = (u_1, \dots, u_N)$ для всех блоков прибора.

В заключение заметим, что указанный подход справедлив лишь при выполнении предположения (8). В общем же случае можно утверждать, что

$$\max_{x_i \in X} |x_{N+1} - x_1| \leq \sum_{i=1}^N \max_{x_i \in X} |x_{i+1} - x_i|. \quad (11)$$

Однако решение сформулированной выше задачи позволит определить верхнюю оценку значения критерия оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Любутин, В. И. Бурякин, Е. В. Васильев, И. М. Масленников. Контроль процентного содержания связующего и растворимых в процессе получения пресс-материала марки ДСВ. — Тезисы доклада Всесоюзной научно-технической конференции «Композиционные полимерные материалы и их применение. Т. III. Гомель, 1972, с. 54—57.

2. Ю. Шрейдер. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1959.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. А. М. Цирлин. Решение задач оптимального управления посредством приведения к простейшей изопериметрической задаче.— «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1968, № 5, с. 151—159.

*Поступила в редакцию 8 апреля 1974 г.;
окончательный вариант — 10 октября 1976 г.*

УДК 519.24

О. Ю. БОРЕНШТЕЙН, Б. И. КОГАН, О. Л. СОКОЛОВ

(Ленинград)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРИОДОГРАММ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. В работах [1, 2] изучались статистики энергетического спектра нестационарного случайного процесса (НСП). В настоящей статье вводится определение асимптотической спектральной плотности НСП, связанное с расширением понятия периодограммы стационарного случайного процесса (ССП) на нестационарный случайный процесс.

В качестве асимптотически несмещенной оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса может быть использована периодограмма вида

$$\hat{S}_x(f, T) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \right|^2. \quad (1)$$

Теория таких оценок хорошо известна (например, [3]). При переходе к нестационарным случайным процессам уместно вместо (1) рассматривать периодограммы вида

$$\hat{S}_x(f, \theta, T) = \frac{1}{T} \left| \int_{\theta}^{\theta+T} x(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \right|^2. \quad (2)$$

Введение параметра θ связано с тем, что периодограммы вида (2) задают в общем случае различные случайные величины в зависимости от сдвига начала отсчета θ . В настоящей работе предлагается определение асимптотической спектральной плотности, оценками для которой являются периодограммы вида (2). Указывается ряд свойств таких оценок, в частности неравенства для смещений и вероятности больших уклонений, а также обобщается одно свойство эргодичности.

Полученные результаты позволяют распространить метод периодограмм на широкий класс нестационарных случайных процессов.

Асимптотическая спектральная плотность квазигармонизируемых случайных процессов и ее статистическая оценка. Допустим, что корреляционная функция R_x процесса X допускает представление вида

$$R_x(\eta, \eta - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi \eta} B_x(d\xi, \tau), \quad (3)$$

справедливое при $\eta \geq \tau$, $\eta \geq 0$.