

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев А. А., Набиев М. А., Нагиев Т. А. Некоторые вопросы выбора длины волны в доплеровских измерителях скорости потока.— «За технический прогресс», Баку, 1976, № 11, с. 1—3.
2. Лазерные доплеровские измерители скорости. Отв. ред. чл.-кор. АН СССР Ю. Е. Нестерихин. Новосибирск, «Наука», 1975.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
4. Зубкович С. Г. Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности. М., «Сов. радио», 1968.
5. Вертикальный пневмотранспорт гранулированного и порошкообразного материала.— «Обзоры по отдельным производствам химической промышленности», М., 1973, вып. 38.

*Поступила в редакцию
21 января 1977 г.*

УДК 551.521.3 : 551.463.5 : 535.36

И. В. КАМЕНЕВ, М. Б. КУДРЯВЦЕВ
(Новосибирск)

МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА НА ЖИВЫХ КЛЕТКАХ

К настоящему времени имеется ряд работ [1, 2] по рассеянию плоской электромагнитной волны биологическими частицами, в которых клетка рассматривается как однородная сферическая частица с постоянными оптическими свойствами. В то же время представляет значительный интерес задача рассеяния на клетке как на сферической частице с изменяющимся в радиальном направлении показателем преломления. Известно [3], что вклады различных органелл клетки в суммарную интенсивность рассеяния распределены весьма неравномерно, так как для длин волн видимого излучения характерный параметр ρ большинства органелл меньше единицы ($\rho = 2\pi r/\lambda_1$, r — радиус органеллы, λ_1 — длина волны света в среде). Исключение составляют центрально расположенное ядро и небольшой набор субклеточных структур с показателями преломления, близкими к показателю преломления цитоплазмы. Поэтому в нулевом приближении ограничимся двухслойной моделью клетки в предположении постоянства показателей преломления внутренней сферы (ядра) m_i и оболочки (цитоплазмы) m_z . Характерные параметры рассматриваемой модели — радиус оболочки $r_z = 5$ — 10 мкм, показатели преломления оболочки m_z и ядра m_i — близки к показателю преломления среды m_a , в которую помещена клетка; действительные части m_i и m_z намного больше их мнимых частей для длин волн падающего света $\lambda = 0,4$ — $0,63$ мкм, отношение радиусов оболочки и ядра $0 \leq n \leq r_z m_z / (r_i m_i) \leq 1$. Анализ параметров двухслойной модели показывает, что теоретические расчеты можно вести в приближении аномальной дифракции малоуглового рассеяния. В работе приводятся основные математические выкладки решения задачи рассеяния, в результате которого получены выражения для фак-

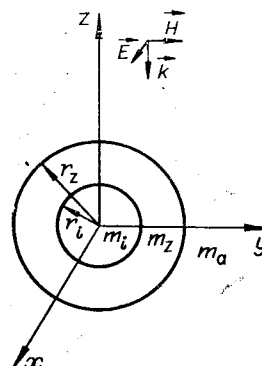


Рис. 1.

тора эффективности ослабления $K_{\text{осл}}$ и интенсивности рассеяния I в малых углах.

Плоская монохроматическая волна когерентного света падает на модель живой клетки (рис. 1) вдоль оси z . Электрический потенциал U^0 падающей волны во внешней среде в обозначениях [1] запишется в виде

$$U^0 = \frac{1}{k_a^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \Psi_l(k_a r) P_l^{(1)}(\cos \Theta) \cos \Phi, \quad (1)$$

где $k_a = 2\pi m_a / \lambda = k_0 m_a$ (k_0 — волновое число в вакууме), r , Θ , Φ — сферические координаты.

Потенциалы электрических колебаний в оболочке и ядре и рассеянного поля в тех же обозначениях имеют вид:

$$U^z = \frac{1}{k_z^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} \{C_l^z \zeta_l(k_z r) + C_l^{*z} \Psi_l(k_z r)\} P_l^1(\cos \Theta) \cos \Phi; \quad (2)$$

$$U^i = \frac{1}{k_i^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} C_l^i \Psi_l(k_i r) P_l^1(\cos \Theta) \cos \Phi; \quad (3)$$

$$U^a = \frac{1}{k_a^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} C_l^a \zeta_l(k_a r) P_l^{(1)}(\cos \Theta) \cos \Phi. \quad (4)$$

Здесь $k_z = k_0 m_z$, $k_i = k_0 m_i$, C_l^z , C_l^{*z} , C_l^i и C_l^a — неопределенные коэффициенты. Введем безразмерные радиусы ядра ρ_1 и оболочки ρ_2 и их относительные показатели преломления m_1 и m_2 :

$$\rho_1 = k_z r_i, \quad \rho_2 = k_a r_z, \quad m_1 = m_i / m_z, \quad m_2 = m_z / m_a.$$

Из граничных условий для потенциалов (1) — (4) при $r = r_i$ и $r = r_z$ получаем систему линейных уравнений для определения C_i :

$$\begin{pmatrix} \Psi(\rho_1 m_1) & -\zeta(\rho_1) & -\Psi(\rho_1) & 0 \\ \Psi'(\rho_1 m_1) & -m_1 \zeta'(\rho_1) & -m_1 \Psi'(\rho_1) & 0 \\ 0 & \zeta(\rho_2 m_2) & \Psi(\rho_2 m_2) & -\zeta(\rho_2) \\ 0 & \zeta'(\rho_2 m_2) & \Psi'(\rho_2 m_2) & -m_2 \zeta'(\rho_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_i^* \\ C_i^z \\ C_i^{*z} \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \Psi(\rho_2) \\ i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} m_2 \Psi'(\rho_2) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь во всех функциях Риккати — Бесселя опущен нижний индекс l .

Аналогично (1) — (4) записываются потенциалы магнитных колебаний, отличающиеся от соответствующих электрических потенциалов множителем $-m_p$ ($p = z, i, a$ — соответствующий потенциалу индекс), заменой $\cos \Phi$ на $\sin \Phi$ и введением новых неопределенных коэффициентов B_l^z , B_l^{*z} , B_l^i , B_l^a . Записывая условия непрерывности на границах, по-

лучаем систему уравнений для определения B_i :

$$\begin{pmatrix} \Psi(\rho_1 m_1) & m_1 \zeta(\rho_1) & -m_1 \Psi(\rho_1) & 0 \\ \Psi'(\rho_1 m_1) & \zeta'(\rho_1) & -\Psi'(\rho_1) & 0 \\ 0 & -\zeta'(\rho_2 m_2) & \Psi'(\rho_2 m_2) & -\zeta'(\rho_2) \\ 0 & -\zeta(\rho_2 m_2) & \Psi(\rho_2 m_2) & -m_2 \zeta(\rho_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_i^* \\ B_i^z \\ B_i^{*z} \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \Psi'(\rho_2) \\ i^{l-1} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} m_2 \Psi(\rho_2) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В (5) и (6) перейдем к индексации:

$$\begin{aligned} \Psi(\rho_i m_i) &\rightarrow \Psi_{ii}, \\ \zeta(\rho_i m_i) &\rightarrow \zeta_{ii}, \quad i=0, 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где значение $i=0$ указывает на отсутствие данного параметра.

Введем коэффициенты c_l и b_l , связанные с C_l и B_l следующим образом:

$$\begin{aligned} C_l &= i \frac{(2l+1)}{l(l+1)} (-1)^l c_l; \\ B_l &= -i \frac{(2l+1)}{l(l+1)} (-1)^l b_l. \end{aligned}$$

Из (5) с учетом (7) по правилу Крамера имеем

$$c_l = \Delta_0^* / \Delta_0, \quad (8)$$

где

$$\Delta_0 = \left. \begin{array}{cccc|c} \Psi_{11} & -\zeta_{10} & -\Psi_{10} & 0 & 1 \\ \Psi'_{11} & -m_1 \zeta'_{10} & -m_1 \Psi'_{10} & 0 & 2 \\ 0 & \zeta_{22} & \Psi_{22} & -\zeta_{20} & 3 \\ 0 & \zeta'_{22} & \Psi'_{22} & -m_2 \zeta'_{20} & 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{— ядро } (r_i, m_i), \\ \text{— оболочка } (r_z, m_z); \end{array} \quad (9)$$

$$\Delta_0^* = \begin{vmatrix} \Psi_{11} & -\zeta_{10} & -\Psi_{10} & 0 \\ \Psi'_{11} & -m_1 \zeta'_{10} & -m_1 \Psi'_{10} & 0 \\ 0 & \zeta_{22} & \Psi_{22} & -\Psi_{20} \\ 0 & \zeta'_{22} & \Psi'_{22} & -m_2 \Psi'_{20} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Для упрощения раскрытия определителей (9), (10) представим их путем тождественных алгебраических преобразований в блочной форме:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \bar{A} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \begin{matrix} B & 0 \\ 0 & D \end{matrix} \end{vmatrix}; \quad (11)$$

$$\Delta_0^* = \begin{vmatrix} \bar{A} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \begin{matrix} B^* & 0 \\ 0 & D^* \end{matrix} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Здесь \bar{A} — определитель второго порядка;

$$B^* = \zeta_{22} \left[\frac{x'_{22} x_{20} - m_2 x_{20} x'_{22}}{\Psi_{20} \zeta'_{22} - m_2 \zeta_{22} \Psi'_{20}} - \frac{\Psi_{11} \Psi_{10} - m_1 \Psi_{10} \Psi_{11}}{\zeta_{10} \Psi'_{11} - m_1 \zeta'_{10} \Psi_{11}} \right];$$

$$D^* = \frac{\Psi_{20} \zeta'_{22} - m_2 \zeta_{22} \Psi'_{20}}{\zeta_{22}}.$$

Из (8), (13) определяем коэффициенты парциальных волн:

$$c_i = B^* D^* / (BD). \quad (14)$$

Выражение (14) упрощается при использовании разложений Дебая функций Риккати — Бесселя следующего вида:

$$\Psi_l(\rho) = \frac{\cos(\rho f - \pi/4)}{(\sin \tau)^{1/2}}; \quad \zeta_l(\rho) = \frac{\exp[-i(\rho f - \pi/4)]}{(\sin \tau)^{1/2}}, \quad (15)$$

$$\Psi'_l(\rho) = \cos(\rho f - \pi/4) (\sin \tau)^{1/2}; \quad \zeta'_l(\rho) = \exp[-i(\rho f + \pi/4)] (\sin \tau)^{1/2},$$

где $\cos \tau = l/\rho$; $f = \sin \tau - \tau \cos \tau$; τ — дебаевский угол падения луча света на сферу. Согласно (15), получим

$$\frac{\zeta'_l(\rho)}{\zeta_l(\rho)} = -i \sin \tau; \quad \frac{\Psi'_l(\rho)}{\Psi_l(\rho)} = \sin \tau.$$

Для приведения (14) к виду, удобному для интегрирования, выделим в (13) коэффициенты c_{i_0} парциальных волн [4] однородной сферы с параметрами ядра и оболочки:

$$c_{i_0} = \frac{\Psi_l(\rho) \Psi'_l(m\rho) - m \Psi_l(m\rho) \Psi'_l(\rho)}{\zeta_l(\rho) \Psi'_l(m\rho) - m \Psi_l(m\rho) \zeta'_l(\rho)},$$

при этом (14) преобразуется в выражение

$$\frac{B^* D^*}{BD} = \frac{c_{i_{22}} + c_{i_{11}}}{c_{i_{22}}} c_{i_2}, \quad (16)$$

где $c_{i_1} = c_{i_0}(\rho_1, m_1)$, $c_{i_2} = c_{i_0}(\rho_2, m_2)$, $c_{i_{22}} = c_{i_0}(m_2 \rho_2, m_2)$. В линейных коэффициентах при выводе (16), согласно [1], полагалось $\Delta_i = (m_i - 1) = 0$, $i = 1, 2$.

В (16) воспользуемся разложениями коэффициентов c_{i_0} парциальных волн однородной сферы через коэффициенты Френеля [2], имеющие при $m \rightarrow 1$ вид

$$c_{i_0} = \frac{1}{2} [1 - \exp(-i\delta \sin \tau)], \quad (17)$$

где $\delta = 2\rho\Delta$, $\Delta = m - 1$, угол τ определен в (15). Из (17) следует, что коэффициенты парциальных волн при $\tau \rightarrow 0$ малы, т. е. при $\Delta_2 \rightarrow \frac{c_2}{c} \rightarrow 1$. С учетом этого из (14), (16), (17) получим

$$c_i = 1 - 0,5 [\exp(-i\delta_1 \sin \tau_1) + \exp(-i\delta_2 \sin \tau_2)], \quad (18)$$

где

$$\delta_j = 2\rho_j \Delta_j, \quad \cos \tau_j = l/\rho_j, \quad \Delta_j = m_j - 1, \quad j = 1, 2.$$

Коэффициенты b_i определяются из системы уравнений (6) аналогичным путем. В приближении данной модели можно показать, что $b_i = c_i$.

Амплитудная функция рассеяния вперед $S(0)$ в случае аномальной дифракции дается в [5, 6] выражением

$$S(0) = i \sum_{l=1}^{\infty} l(c_l + b_l). \quad (19)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C_1(\tau_1) &= 0,5[1 - \exp(-i\delta_1 \sin \tau_1)]; \\ C_2(\tau_2) &= 0,5[1 - \exp(-i\delta_2 \sin \tau_2)]; \\ n &= \rho_1/\rho_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Зависимость угла τ_2 от τ_1 имеет следующий вид:

$$\cos \tau_2 = n \cos \tau_1. \quad (21)$$

Переходя от суммирования к интегрированию по τ_2 , в выражении (19) при учете (18), (20), (21) получим

$$S(0) = i\rho_2^2 \left[\int_0^{\arccos n} C_2(\tau_2) \sin \tau_2 \cos \tau_2 d\tau_2 + \int_{\arccos n}^{\pi/2} C_1(\tau_2) \sin \tau_2 \cos \tau_2 d\tau_2 \right]. \quad (22)$$

Результаты интегрирования запишутся в виде

$$S(0) = i\rho_2^2 \{ n^2 R(in^2 \delta_{1,2}) + (1 - n^2) R(i\sqrt{1 - n^2} \delta_2) \}, \quad (23)$$

где $\delta_{1,2} = \delta_2 \Delta_1 / \Delta_2$, $R(z) = 0,5 + e^{-z}/z + (e^{-z} - 1)/z^2$ — функция Хюлста.

Остановимся на анализе полученной формулы (23). Как и следовало ожидать, в отличие от однослойной частицы $S(0)$ зависит дополнительно от $n = \rho_1/\rho_2$ и показателя преломления ядра. С помощью ЭВМ были вычислены значения фактора эффективности ослабления $\text{Re} \frac{S(0)}{\rho_2^2}$, $\text{Im} \frac{S(0)}{\rho_2^2}$ и сумма их квадратов в зависимости от n , изменяющаяся в интервале $[0,3-1]$, и δ_2 — $[0,1-22]$. Численные результаты $\text{Re} \frac{S(0)}{\rho_2^2}$

при $n=0,3; 0,6; 1$ представлены на рис. 2. Кривая 1 соответствует предельному случаю $n=1$, ее значения совпадают со значениями, вычисленными в [2] для однослойных частиц биологического происхождения в морской воде. Это совпадение вполне закономерно, поскольку предельный переход в (23) при $n \rightarrow 1$ дает формулу, найденную в [2] для однослойной частицы. Кривые 2, 3 получены при значениях $n=0,3$, $n=0,6$ соответственно. На рис. 2 видно, что двухслойность частицы существенно изменяет график фактора эффективности ослабления.

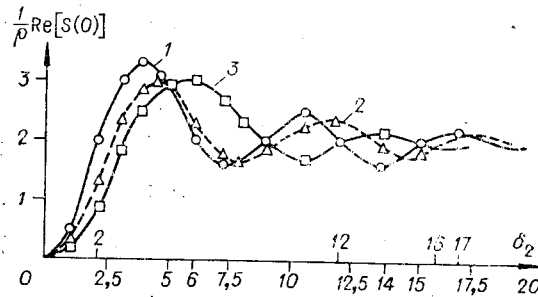


Рис. 2.

Максимальная разность значений кривых 3 и 1 равна 1,82 при $\delta_2=7$. В области значений $0,4 \leq n \leq 0,9$ максимальное отклонение значений фактора эффективности ослабления двухслойной частицы от значений однородной частицы составляет 0,601 (кривые 1, 2).

Определим интенсивность света I , рассеянного двухслойной частицей в малых углах. Известно [2], что интенсивность I_1 , рассеянная однородной частицей в малом угле, равна произведению значений интенсивностей света I_d , дифрагированного на частице, на поправочный множитель $\frac{4|S(0)|^2}{\rho_2^4}$, не зависящий от угла рассеяния:

$$I_1 = 4I_d \frac{|S(0)|^2}{\rho_2^4}. \quad (24)$$

Из выражений (11), (12), (14) следует, что задача рассеяния на двухслойной модели клетки приводится к задаче рассеяния на некоторой однослойной частице, для которой I_1 вычисляется из (24). Следовательно, интенсивность I можно определить из (24) путем подстановки в нее I_d и $|S(0)|^2$, полученных для модели двухслойной клетки. Дифракционная составляющая рассеянного света известна [7] и в обозначениях данной работы имеет вид

$$I_d(\gamma) = I_0 \frac{\rho_2^2}{4k_a^2 \gamma^2 (1+n^2)^2} \{2J_1(\beta) + 2nJ_1(n\beta)\}^2, \quad (25)$$

где $J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\beta(\gamma) = \rho_2 \gamma / m_a$. Из выражений (23), (24) найдем

$$I(\gamma) = I_0 \frac{4m_a^2 |S(0)|^2}{k_0^2 \gamma^2 (1+n^2)^2 \rho_2^2} [J_1(\beta) + nJ_1(n\beta)]^2. \quad (26)$$

Анализ численных значений интенсивностей, рассчитанных по формулам (25) и (26), показал, что практически для всех значений γ, δ_2, n формула (26) лучше аппроксимирует точные значения, чем дифракционная формула (25). Согласие между значениями, рассчитанными по формуле (26), и точными значениями вполне удовлетворительное. Ошибки возрастают в области $\beta \approx 3,83$, где функции $J_1(\beta)$ обращаются в нуль. При увеличении размеров частиц сужается диапазон углов, в котором справедлива формула (26). Так, при $\rho \approx 100$ область углов, где ошибки расчета невелики, ограничивается углом $\gamma_{\max} = 1,5^\circ$. Для менее крупных частиц ($\rho \approx 20$) формула (26) пригодна во всем диапазоне малых углов. Практический интерес при исследовании живых клеток представляет предельное значение формулы (26) при $\gamma \rightarrow 0$:

$$I(0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\gamma, n, \rho) = I_0 |S(\delta, n)|^2 \frac{m_a^2}{k_0^2 \rho_2^2}. \quad (27)$$

На рис. 3 приведены в логарифмическом масштабе графики значений $I(0)$, вычисленные на ЭВМ согласно (27), для различных значений размеров оболочки и ядерно-плазменных отношений n клеток. Из графиков можно заметить, что все кривые интенсивностей для различных ядерно-плазменных отношений клеток флуктуируют около кривой, пропорциональной квадрату радиуса оболочки, и асимптотически к ней приближаются. Для области значений $\delta \leq 6$ (см. рис. 3) рассматриваемой модели имеется однозначное соответствие интенсивности рассеянного света и размера оболочки при постоянном показателе преломления, что

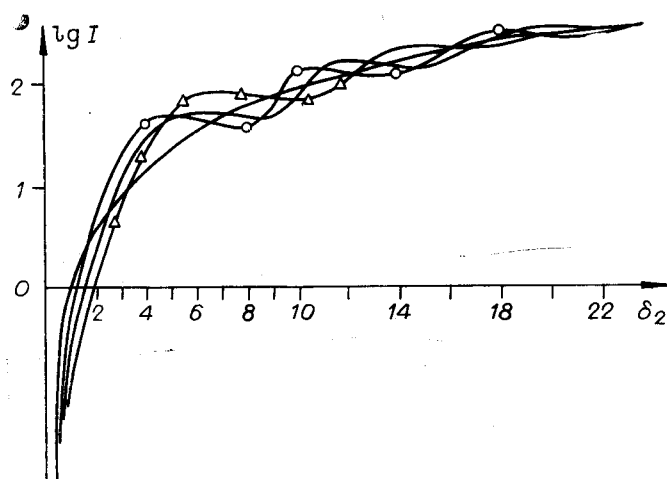


Рис. 3.

позволяет по экспериментально измеренной интенсивности рассеянного света определять радиус оболочки.

На установке с типичной оптической схемой (см., например, [3]) авторами проведено экспериментальное определение фактора эффективности ослабления лазерного пучка света на живых клетках культуры ткани (штамм *L* и МТР), содержащих ядро (ядерно-плазменное отношение измерялось с помощью микроскопа). Полученные значения хорошо согласуются с данными машинного расчета по формуле (27). Описание установки и экспериментальных результатов будет опубликовано в отдельной работе.

Результаты данной работы могут быть использованы как при решении обратной задачи рассеяния с целью определения физических параметров живой клетки, так и для решения прямой задачи рассеяния в средах, содержащих двухслойные частицы.

Авторы выражают благодарность Л. А. Андрианову за полезные обсуждения, Л. Я. Гембому за помощь, оказанную при подготовке данных к вычислению на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
2. Буренков В. И., Копелевич О. В., Шифрин К. С. Рассеяние света крупными частицами с показателями преломления, близкими к единице.— «Изв. АН СССР. ФАО», 1975, т. 11, № 8, с. 828.
3. Степанов Б. И., Иванов А. П. Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск, «Наука и техника», 1971.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970.
5. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М., ИЛ, 1961.
6. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсионными частицами. М., «Мир», 1971.
7. Hubert F. A., Tschunko. Annular apertures with high obstruction.— «Appl. Opt.», 1974, vol. 13, N 1, p. 22.

Поступила в редакцию 14 января 1977 г.;
окончательный вариант — 8 апреля 1977 г.