

А. А. ГАЛИЦКАС

(Вильнюс)

## ВЫЯВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛУБОКОЙ МОДУЛЯЦИИ ЕЕ АРГУМЕНТА

При исследовании различного рода сложных характеристик (вольт-амперные характеристики нелинейных электрических систем, оптические спектры и др.) часто бывает необходимо выявить их тонкую структуру, т. е. определить производные разных порядков. Для такой цели широко используется дифференциальный метод, заключающийся в изменении аргумента  $x$  некоторой исследуемой характеристики  $\Phi(x)$  по закону  $x + \Delta \cos \Omega t$  и измерении полученного дифференциала  $\Phi^{(1)}(x)$  ( $\Delta \cos \Omega t$ ). Измеряемая величина отображает первую производную исследуемой характеристики тем точнее, чем меньше коэффициент модуляции  $\Delta$ . Однако в реальных условиях измерения часто производятся на фоне шума, и поэтому отношение сигнал/помеха мало ввиду малости коэффициента модуляции  $\Delta$ . Кроме того, известный способ не позволяет точно определить производные высших порядков.

В данной статье разрабатывается методика одновременного измерения производных разных порядков характеристики исследуемого объекта, основанная на применении глубокой модуляции некоторой физической величины, являющейся аргументом этой характеристики.

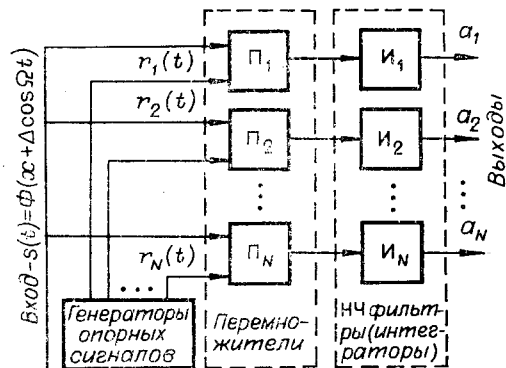
**Постановка задачи.** Исходя из вышеизложенного, примем, что коэффициент модуляции  $\Delta$  может быть выбран произвольно. Примем также, что измерительная система определяется структурной схемой, приведенной на рисунке; ее обоснование будет ясно из дальнейшего изложения.

Ставится задача определения набора опорных сигналов  $\{r_n(t)\}$  таких, что измеренные на выходе системы величины  $\{a_n\}$  точно отображали бы соответствующие производные  $\{\Phi^{(n)}(x)\}$  исследуемой характеристики  $\Phi(x)$  в окрестности заданного значения аргумента  $x$ .

Ниже будет показано, что такой набор существует, и тем самым будет обоснована здесь предложенная система измерения.

**Анализ сигнала.** Сигнал, получаемый при модуляции аргумента по гармоническому закону  $x + \Delta \cos \Omega t$ , является сложным периодическим колебанием, которое может быть представлено разложением исследуемой характеристики  $\Phi(x)$  в ряд Тейлора в окрестности заданной точки:

$$\begin{aligned} s(t) = \Phi(x + \Delta \cos \Omega t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) \frac{\Delta^n}{n!} \cos^n \Omega t = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \Phi^{(n)}(x) \left( \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(x) \times \\ &\quad \times \sum_{m=0}^n C_n^m e^{i(n-m)\Omega t} e^{-im\Omega t}, \end{aligned}$$



где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Величины

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \Phi^n(x) = Z_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

явно выражают соответствующие производные — они и подлежат измерению. Итак, с использованием обозначения (1) сигнал может быть представлен в форме

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \sum_{m=0}^n C_n^m e^{i(n-2m)\Omega t}, \quad (2)$$

которая необходима в дальнейшем.

**Определение опорных сигналов.** Периодические опорные сигналы будем искать в виде ряда Фурье

$$r_k(t) = \sum_{l=1}^{\infty} r_{kl} \cos l\Omega t = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{kl} e^{il\Omega t}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $r_{kl} = r_{k,-l}$  — коэффициенты, подлежащие определению. Измерительная система перемножает полезный и опорный сигналы и фильтрует постоянную составляющую полученного произведения (усредняет в периоде). Следовательно, измеренная на выходе такой системы величина  $a_k$  может быть выражена интегралом

$$a_k = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} s(t) r_k(t) dt = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \sum_{m=0}^n C_n^m \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{kl} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} e^{i(n-2m+l)\Omega t} dt$$

или с учетом равенства

$$\frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} e^{i\mu\Omega t} dt = \begin{cases} 1, & \mu = 0, \\ 0, & \mu = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

формулой

$$a_k = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \sum_{m=0}^n C_n^m r_{k,2m-n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Ввиду наличия в (5) удвоенного индекса  $2m$  суммирование по  $n$  более удобно вести по четным ( $n=2\mu$ ,  $\mu=1, 2, \dots$ ) и нечетным ( $n=2\mu+1$ ,  $\mu=0, 1, \dots$ ) индексам в отдельности. Тогда с использованием подстановки  $m-\mu=v$  и с учетом тождества  $C_n^m = C_n^{n-m}$  и равенства  $r_{kl} = r_{k,-l}$  выражение (5) может быть приведено к виду

$$a_k = \sum_{\mu=1}^{\infty} Z_{2\mu} \sum_{v=1}^{\mu} C_{2\mu}^{\mu+v} r_{k,2v} + \sum_{\mu=0}^{\infty} Z_{2\mu+1} \sum_{v=0}^{\mu+1} C_{2\mu+1}^{\mu+v} r_{k,2v-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда видно, что оно может быть представлено и в следующей, более наглядной матричной форме:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1N} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & r_{kl} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & \dots & r_{NN} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, 0, C_3^1, 0, C_5^2, 0, \dots \\ 1, 0, C_4^1, 0, C_6^2, \dots \\ 1, 0, C_5^1, 0, \dots \\ 1, 0, C_6^1, \dots \\ 0, \dots, 1, 0, \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}. \quad (6)$$

С использованием соответствующих обозначений полученное матричное выражение можно записать сокращенно:

$$A = RCZ$$

Формула (6) связывает измеряемые величины  $\{a_n\}$  с производными  $\{Z_n\}$  и амплитудами гармонических составляющих опорных сигналов  $\{r_{kl}\}$ . Но нам нужно, чтобы результаты измерения непосредственно отображали соответствующие производные исследуемой характеристики, т. е. чтобы соблюдались равенства  $a_n = Z_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , или  $A = Z$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $RC = I$ , где  $I$  — единичная матрица. Следовательно,  $R = C^{-1}$ , т. е. искомые амплитуды гармонических составляющих суть элементы матрицы, обратной  $C$ . Числовая треугольная матрица  $C$  в общем случае имеет бесконечный порядок. Однако если можно предположить, что на «скользящем» интервале сканирования  $[x - \Delta, x + \Delta]$  исследуемая характеристика  $\Phi(x)$  с достаточной точностью описывается полиномом конечной  $N$ -й степени, то  $\Phi^{(n)}(x) = 0$  и  $Z_n = 0$  при  $n > N$ . Тогда, как видно из (6), матрицы  $C$  и, следовательно,  $R$  становятся конечными порядка  $N$ .

Обращение матрицы  $C$  не представляет трудностей. Например, при  $N = 8$  коэффициенты  $\{r_{kl}\}$  и соответствующий набор опорных сигналов (3) определяются следующим матричным выражением:

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \\ r_4(t) \\ r_5(t) \\ r_6(t) \\ r_7(t) \\ r_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -3, & 0, & 5, & 0, & -7, & 0 \\ & 1, & 0, & -4, & 0, & 9, & 0, & -16 \\ & & 1, & 0, & -5, & 0, & 14, & 0 \\ & & & 1, & 0, & -6, & 0, & 20 \\ & & & & 1, & 0, & -7, & 0 \\ & & & & & 1, & 0, & -8 \\ & & & & & & 1, & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega t \\ \cos 2\Omega t \\ \cos 3\Omega t \\ \cos 4\Omega t \\ \cos 5\Omega t \\ \cos 6\Omega t \\ \cos 7\Omega t \\ \cos 8\Omega t \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Интересно отметить, что элементы матрицы  $R$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r_{k-1,l} - r_{k,l-1} = r_{k,l+1},$$

которое может быть доказано методом математической индукции. С использованием приведенного правила нетрудно «продолжить» обращение матрицы  $C$ , когда это необходимо.

Таким образом, если опорные сигналы формируются согласно (7), результатами измерения являются производные исследуемой характеристики в заданной точке.

**Влияние входного шума на точность измерения.** Если на входе измерительной системы присутствует шум  $\eta(t)$ , то на ее выходах появляются ошибки случайного характера, которые являются результатами перемножения входного сигнала с опорными и фильтрации полученных произведений низкочастотными фильтрами. Дисперсия этой ошибки на выходе  $n$ -го измерительного канала определяется выражением

$$\sigma_n^2(t) = m_1 \left\{ \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v) \eta(v) \sum_{k=-N}^N r_{nR} e^{-i h \Omega v} dv \right]^2 \right\}, \quad (8)$$

где  $m_1\{\cdot\}$  — символ усреднения по ансамблю, а  $h(\tau)$  — импульсная характеристика фильтра. После возведения в квадрат, усреднения и ряда

других преобразований из (8) следует

$$\sigma_n^2(t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=-N}^N r_{nk} r_{nl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x-y) h(x) h(y) e^{-ik\Omega(t-x) - i l \Omega(t-y)} dx dy, \quad (9)$$

где  $B(\tau)$  — автокорреляционная функция входного шума. Как видно, дисперсия — периодическая функция времени, т. е. выходной процесс нестационарен. Поэтому вычислим усредненную по времени дисперсию, которая в данном случае может быть определена как усредненное за период выражение (9). С учетом (4) получаем

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} \sigma_n^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x-y) h(x) h(y) e^{ik\Omega(x-y)} dx dy.$$

С использованием теоремы Парсеваля последнюю формулу можно привести к спектральному виду

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega - k\Omega) |H(i\omega)|^2 d\omega,$$

где  $F_n(\omega)$  — энергетический спектр входного шума, а  $H(i\omega)$  — передаточная функция выходного фильтра. В случае белого шума ( $F_n(\omega) = N_0$ ) ошибка определяется следующим более простым выражением:

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \left( \sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \right) N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega.$$

Последние формулы показывают, что ошибка при всех  $n$  быстро возрастает с номером гармоники. Следовательно, чем сложнее исследуемая характеристика, тем труднее выяснить ее тонкую структуру в присутствии шума. Такой вывод согласуется с основными положениями теории статистических решений.

Таким образом, проведенные теоретические расчеты полностью оправдали предложенную нами схему измерения и показали, что при определенном наборе опорных сигналов результатами измерения являются соответствующие производные исследуемой характеристики. Формы опорных сигналов инвариантны к форме исследуемой характеристики и определяются только степенью полинома, аппроксимирующего последнюю на скользящем интервале сканирования. Предлагаемая методика позволяет использовать глубокую модуляцию аргумента характеристики, что дает возможность измерять несколько ее производных одновременно и повысить точность измерения в присутствии шума.

Поступила в редакцию 21 января 1976 г.;  
окончательный вариант — 7 апреля 1977 г.

УДК 681.325.5(72)

**В. Р. ТОЛОКНОВСКИЙ**  
(Уфа)

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ЦИФРОВЫХ АНАЛОГАХ

Общее выражение для квадратичной функции одной независимой переменной  $x$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx^2 + 2Ey + F = 0$$