

других преобразований из (8) следует

$$\sigma_n^2(t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=-N}^N r_{nk} r_{nl} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x-y) h(x) h(y) e^{-ik\Omega(t-x) - i l \Omega(t-y)} dx dy, \quad (9)$$

где $B(\tau)$ — автокорреляционная функция входного шума. Как видно, дисперсия — периодическая функция времени, т. е. выходной процесс нестационарен. Поэтому вычислим усредненную по времени дисперсию, которая в данном случае может быть определена как усредненное за период выражение (9). С учетом (4) получаем

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} \sigma_n^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(x-y) h(x) h(y) e^{ik\Omega(x-y)} dx dy.$$

С использованием теоремы Парсеваля последнюю формулу можно привести к спектральному виду

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega - k\Omega) |H(i\omega)|^2 d\omega,$$

где $F_n(\omega)$ — энергетический спектр входного шума, а $H(i\omega)$ — передаточная функция выходного фильтра. В случае белого шума ($F_n(\omega) = N_0$) ошибка определяется следующим более простым выражением:

$$\overline{\sigma_n^2(t)} = \left(\sum_{k=-N}^N r_{nk}^2 \right) N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega.$$

Последние формулы показывают, что ошибка при всех n быстро возрастает с номером гармоники. Следовательно, чем сложнее исследуемая характеристика, тем труднее выяснить ее тонкую структуру в присутствии шума. Такой вывод согласуется с основными положениями теории статистических решений.

Таким образом, проведенные теоретические расчеты полностью оправдали предложенную нами схему измерения и показали, что при определенном наборе опорных сигналов результатами измерения являются соответствующие производные исследуемой характеристики. Формы опорных сигналов инвариантны к форме исследуемой характеристики и определяются только степенью полинома, аппроксимирующего последнюю на скользящем интервале сканирования. Предлагаемая методика позволяет использовать глубокую модуляцию аргумента характеристики, что дает возможность измерять несколько ее производных одновременно и повысить точность измерения в присутствии шума.

*Поступила в редакцию 21 января 1976 г.;
окончательный вариант — 7 апреля 1977 г.*

УДК 681.325.5(72)

В. Р. ТОЛОКНОВСКИЙ
(Уфа)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ЦИФРОВЫХ АНАЛОГАХ

Общее выражение для квадратичной функции одной независимой переменной x

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx^2 + 2Ey + F = 0$$

в зависимости от параметров A, B, C, D, E, F приводится к уравнению одного из конических сечений:

$$y = \sqrt{2p}\sqrt{x} \quad (\text{парабола}); \quad (1)$$

$$y = b/a(a^2 - x^2)^{1/2} \quad (\text{эллипс}); \quad (2)$$

$$y = (r^2 - x^2)^{1/2} \quad (\text{окружность}); \quad (3)$$

$$y = b/a(x^2 - a^2)^{1/2} \quad (\text{гипербола}). \quad (4)$$

Ниже описываются способ и устройство для вычисления значений y по заданным x и известным параметрам p, a, b, r .

Рассмотрим предварительно вспомогательную задачу о способе и устройстве* для возведения чисел в квадрат с умножением результата на постоянное число. Прибегнем к кусочно-линейной аппроксимации заданной функции (рис. 1):

$$u = \varphi(z) = \alpha z^2, \quad (5)$$

где α — параметр, z — независимая переменная. Аппроксимацию выполним следующим образом: разобьем диапазон $(0 \leq z \leq z_m)$ возможных значений z на m одинаковых отрезков Δz , причем $m = 2^h$ (h — целое число). Тогда аппроксимирующая функция u_a может быть записана в виде

$$u_a = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta u_i + \Delta u_n t, \quad (6)$$

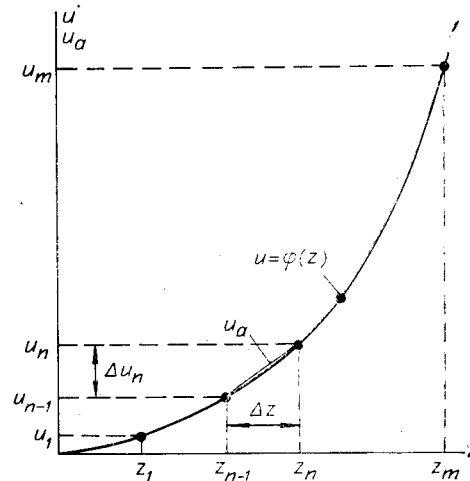


Рис. 1. Функция $u = \varphi(z)$ и ее кусочно-линейная аппроксимация.

где n — номер участка аппроксимации, t — новая вспомогательная переменная, подчиненная условию $0 \leq t \leq 1$; переменная z может быть записана в виде

$$z = \Delta z(n-1+t),$$

а функция (5) может быть представлена выражением

$$u = \varphi[\Delta z(n-1+t)]. \quad (7)$$

В узлах аппроксимации функции u_a (6) и u (7) совпадают, поэтому

$$\Delta u_n = \varphi(\Delta z n) - \varphi[\Delta z(n-1)] = \alpha \Delta z^2 (2n-1). \quad (8)$$

Для дальнейшего удобнее (8) записать в виде

$$\Delta u_n = \alpha \Delta z^2 + 2\alpha \Delta z^2 (n-1). \quad (9)$$

Аппроксимирующая функция (6) с учетом (9) примет вид

$$u_a = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta u_i + [\alpha \Delta z^2 + 2\alpha \Delta z^2 (n-1)] t. \quad (10)$$

* Голокновский В. Р. Устройство для воспроизведения функции. — «Авт. свид-во, № 487398, Б. И., 1975, № 37.

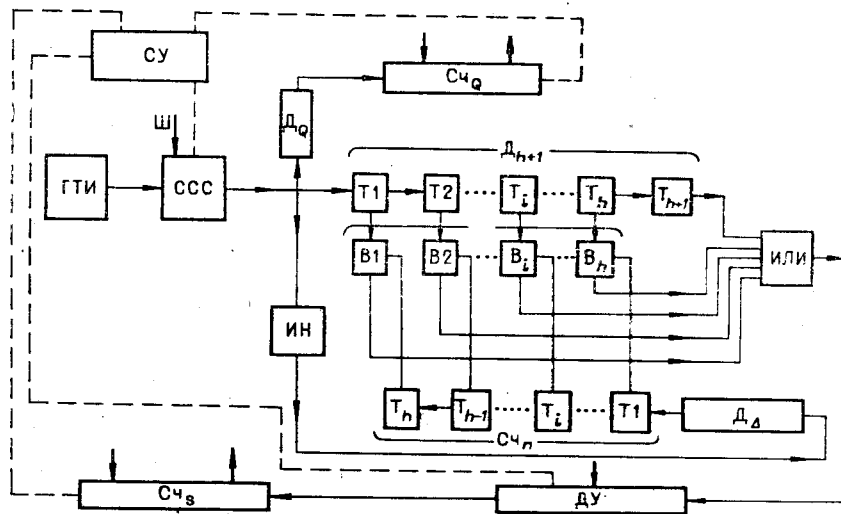


Рис. 2. Схема устройства для вычисления значений квадратичных функций.

Из выражений (9) и (10) видно, что при построении устройства необходимо обеспечить суммирование импульсов на всех участках аппроксимации $\left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta u_i\right)$, одинаковый на всех участках поток $(\alpha \Delta z^2)$ импульсов и зависимый от номера участка поток $[2\alpha \Delta z^2(n-1)]$ импульсов; кроме того, требуется масштабирование результата вычисления. Схема устройства, выполняющего эти операции, представлена на рис. 2.

Устройство включает генератор тактовых импульсов (ГТИ); стартовую схему (ССС); счетчики (СЧ_Q) и (СЧ_S) с коэффициентами пересчета Q и S, в которые вводятся исходные данные и где накапливаются результаты; делитель (Д_Q) для получения необходимой дискретности результатов; двоичный умножитель (ДУ) для целей масштабирования; инвертор (ИН) для согласования работы частей схемы во времени; делитель (Д_Δ), определяющий размер участка аппроксимации; счетчик участков (СЧ_n), включающий триггеры с Т1 по Т_n, информационные выходы которых подключены к управляющим входам группы потенциально-импульсных вентилях с В1 по В_n, выходы последних объединены в схеме ИЛИ; делитель (Д_{n+1}), информационные выходы триггеров с Т1 по Т_n которого соединены со входами вентилях, а выход делителя подключен ко входу схемы ИЛИ. Пунктиром на рис. 2 показаны схема управления (СУ) и связи управления работой устройства.

Устройство работает в цифровых аналогах, поэтому функция (5) трансформируется к виду

$$u10^{r_s} = 10^{r_s} \alpha z^2, \quad (11)$$

где r_s — фактор дискретности результата u . Перед началом работы в счетчик СЧ_Q в виде дополнительного числа $Q = 10^{r_Q} z$ (r_Q — фактор дискретности аргумента z) вводится значение аргумента, а в ДУ — коэффициент умножения $K_{ДУ}$, значение которого будет определено ниже. Работа начинается по команде «Пуск», подаваемой на шину (Ш) стартовой схемы, а заканчивается в момент переполнения СЧ_Q. На каждом участке аппроксимации на вход Д_Δ поступает $10^{r_Q} \Delta z K_Q$ импульсов, и это определяет соотношение между коэффициентом деления K_Q счетчика Д_Q и коэффициентом деления $K_{Δ}$ счетчика Д_Δ:

$$K_{Δ} = 10^{r_Q} \Delta z K_Q. \quad (12)$$

Как следует из схемы устройства, на первом участке аппроксимации на вход двоичного умножителя поступит $K_{\Delta}/2^{n-1} = K_{\Delta}/2m$ импульсов, количества импульсов на последующих участках и в сумме к концу участков приведены в таблице, из которой видно, что устройство обрабатывает квадратичную функцию. Если за n участков на вход двоичного умножителя поступит $(n^2/2)(K_{\Delta}/m)$ импульсов, то с его выхода на вход счетчика S_{Σ} пройдет $K_{\text{дв}}(n^2/2) \times (K_{\Delta}/m)$ импульсов.

Исходя из (11) с учетом того, что $z_n = \Delta z n$, это количество должно составлять $10^{r_s} \alpha (\Delta z n)^2$. Тогда

$$K_{\text{дв}} = \frac{2 \cdot 10^{r_s} m \alpha \Delta z^2}{K_{\Delta}}$$

или с учетом (12)

$$K_{\text{дв}} = \frac{2 \cdot 10^{r_s - r_q} m \alpha \Delta z}{K_Q}$$

Номер участка	Количество импульсов, поступающих на вход ДУ на протяжении участка	Суммарное количество импульсов, поступающее на вход ДУ на протяжении всех предыдущих и текущего участка
1	$\frac{1}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$	$\frac{1}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$
2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{K_{\Delta}}{m}$	$\frac{4}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$
3	$\left(2 + \frac{1}{2}\right) \frac{K_{\Delta}}{m}$	$\frac{9}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$
4	$\left(3 + \frac{1}{2}\right) \frac{K_{\Delta}}{m}$	$\frac{16}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{K_{\Delta}}{m}$	$\frac{n^2}{2} \frac{K_{\Delta}}{m}$

Если $K_{\text{дв}}$ окажется большим 1, то необходимо увеличить K_Q .

Теперь параметры схемы устройства и исходные данные, которые необходимо ввести в схему, определены и вспомогательная задача возведения переменной z в квадрат с умножением результата на постоянное число α решена. Но попутно решена и одна из основных задач — вычисление значений параболической функции. В самом деле, из схемы видно, что устройство обратимо: если перед началом работы в S_{Σ} ввести число $S = 10^{r_s} u$ и остановить работу схемы в момент его переполнения, то в счетчике S_{Σ} к этому моменту накопится число $10^{r_q} z$, причем $z = (1/\sqrt{\alpha}) \sqrt{u}$. На основе использования свойства обратимости устройства задача вычисления значений параболической функции $y = \sqrt{2p} \sqrt{x}$ решается следующим образом. Перед началом работы в счетчик S_{Σ} вводится число $S = 10^{r_s} x$, а в двоичный умножитель — коэффициент умножения

$$K_{\text{дв}} = \frac{2 \cdot 10^{r_s - r_q} m \sqrt{2p} \Delta y}{K_Q}$$

Когда параметры схемы (K_Q , K_{Δ} , h) уже выбраны, то Δy может быть определено на основании (12):

$$\Delta y = 10^{-r_q} \frac{K_{\Delta}}{K_Q}$$

тогда

$$K_{\text{дв}} = \frac{2 \cdot 10^{r_s - 2r_q} m \sqrt{2p} K_{\Delta}}{K_Q^2}$$

После пуска схемы к моменту переполнения счетчика S_{Σ} , когда работа схемы должна быть остановлена, в счетчике S_{Σ} накопится число $10^{r_q} y$, что и является решением задачи вычисления значения параболической функции (1) по заданному x и известному p .

Если для вычисления значения параболической функции требуется одна нелинейная операция — извлечение корня из x , то для вычисления

значения эллиптической функции (2) необходимы две нелинейные операции: возведение x в квадрат и извлечение корня из $a^2 - x^2$. Эти операции могут быть выполнены с помощью двух соответствующих последовательно соединенных устройств. Однако функции возведения в квадрат и извлечения корня обратны, а описанное выше (см. рис. 2) устройство обратимо. Эти обстоятельства определяют возможность вычисления значений эллиптических функций с помощью одного описанного устройства при работе его в два такта.

Перед началом работы в устройство вводится: в счетчик $S_{ч_0}$ — аргумент в виде дополнительного числа $Q = 10^r x$; в двоичный умножитель — коэффициент умножения $K_{дв}$ без множителя, зависящего от параметра квадратичной функции (он равен 1); в счетчик $S_{ч_8}$ — параметр a^2 функции (2) в виде дополнительного числа $S = 10^s a^2$. От команды «Пуск» и до переполнения счетчика $S_{ч_0}$ устройство отрабатывает квадратичную зависимость, в счетчик проходит число импульсов $10^r x^2$; в момент переполнения счетчика $S_{ч_0}$ первый такт работы устройства заканчивается, остаточная (до переполнения) емкость счетчика $S_{ч_8}$ составит при этом $10^s (a^2 - x^2)$. Одновременно начинается второй такт работы устройства, при этом в двоичный умножитель должен быть введен $K_{дв}$, содержащий параметр b/a функции (2). В момент переполнения счетчика $S_{ч_8}$ второй такт и работа всего устройства заканчиваются, причем в счетчике $S_{ч_0}$ накоплено число $y 10^{rQ} = 10^{rQ} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ — результат вычисления значения эллиптической функции.

Вычисление значений круговых функций (3) от вычисления значений эллиптических (2) функций с помощью устройства, изображенного на рис. 2, отличается лишь тем, что в момент начала второго такта работы устройства введения нового $K_{дв}$ в двоичный умножитель не требуется, так как $K_{дв}$ остается равным единице.

Для вычисления значений гиперболических функций (4) необходимо расширение возможностей счетчика $S_{ч_8}$: он должен быть реверсивным. Подготовка устройства к работе полностью совпадает с его подготовкой к вычислению значения эллиптической функции. В течение первого такта происходит переполнение счетчика $S_{ч_8}$, а к концу такта в этом счетчике накапливается число $10^r S (x^2 - a^2)$. Первый такт заканчивается в момент переполнения счетчика $S_{ч_0}$, при этом в ДУ вводится $K_{дв}$ с содержанием множителя b/a , а счетчик $S_{ч_8}$ переключается на реверсивный счет. Второй такт и работа всего устройства заканчиваются, когда содержимое $S_{ч_8}$ становится равным нулю; в счетчике $S_{ч_0}$ к этому моменту накапливается число

$$10^{rQ} y = 10^{rQ} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

которое и является результатом вычисления.

Можно назвать следующие особенности описанных способа и устройства:

кусочно-линейная аппроксимация функций реализуется без запоминания параметров участков аппроксимации, что позволяет с целью снижения погрешностей аппроксимации уменьшать размер участков аппроксимации, т. е. увеличивать их число в заданном диапазоне без заметного усложнения устройства;

для работы устройства в него необходимо ввести лишь два числа (для отработки параболы или круга — одно число), зависящих от параметров b/a и a^2 заданной функции; при варьировании этих параметров в некоторых пределах изменения схемы устройства не требуется;

процесс вычисления может быть в любой момент остановлен и про-

должен через неопределенное время; параметры заданной функции или она сама могут быть изменены простыми командами.

В отличие от цифровых вычислительных машин описанное устройство оперирует не кодами, а последовательностями импульсов. Этим объясняется сравнительно небольшая скорость вычислений. Например, при частоте 10 МГц генератора тактовых импульсов, коэффициенте деления делителя D_0 , равном 128, и цифровом аналоге аргумента в счетчике $S_{ч0}$, равном 10^4 , время вычисления круговых, эллиптических и гиперболических функций будет измеряться десятками долями секунды. Однако если решается задача воспроизведения функции $y = a\sqrt{x}$, то 10^4 последовательных значений этой функции могут быть получены за время, в несколько раз меньшее, чем на ЭВМ серии ЕС.

Особенности устройства должны учитываться при планировании его использования. С хорошим эффектом оно может включаться в информационно-измерительные системы для промежуточной обработки информации. Имеется пример реализации системы измерения и регистрации в протоколе (машинка МПУ16-3) и на ленте перфоратора ПЛ-150 значений давления в 120 точках газового тракта изделий. В этой системе используются вибрационные датчики (ПДВ) с существенно нелинейной характеристикой, и с целью получения результатов измерений в физических единицах в систему включен вычислитель, построенный на основе описанного в настоящей работе устройства.

Из схемы и описания работы устройства видно, что оно без трудностей может быть спроектировано в виде модуля в стандарте САМАС. Однако при этом должно быть принято решение стратегического характера относительно объема модуля: дело в том, что некоторые дополнения к схеме позволят с помощью устройства (модуля) выполнять операции суммирования квадратов чисел, извлечения корня из суммы квадратов, воспроизведения и вычисления полиномов второй степени и извлечения корней из них, решения квадратных уравнений и некоторые другие.

*Поступила в редакцию 5 февраля 1976 г.;
окончательный вариант — 26 декабря 1976 г.*

УДК 519.28.669

Г. М. МАРГОЛИН
(Ленинград)

ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЛАНА МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель многих экспериментов в научных исследованиях состоит в нахождении зависимости между некоторой выходной (зависимой) переменной y и независимыми переменными $x_i (i=1, \dots, q)$, которые варьируются в процессе эксперимента. Распространенным методом нахождения зависимости $y = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_q)$ является регрессионный анализ экспериментальных данных [1, 2]. Суть регрессионного анализа состоит в аппроксимации неизвестной функциональной зависимости $y = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_q)$ некоторой моделью, в частном случае линейной по параметрам b_i функцией

$$y = \sum_{i=0}^{K-1} b_i f_i(x), \quad (1)$$

которая называется кривой (поверхностью) регрессии, и нахождении параметров b_i этой модели. Отметим, что поверхность регрессии (1) —