

М. К. ЧМЫХ

(Красноярск)

ВЕСОВОЙ МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ И ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

В основу наиболее распространенных цифровых частотомеров (так называемых универсальных электронно-счетных) положено соотношение

$$F = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2\pi(t_2 - t_1)} = \frac{\varphi}{2\pi T_{\text{изм}}}, \quad (1)$$

где $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$ — фаза измеряемого сигнала в моменты времени t_1 и t_2 ; $T_{\text{изм}} = t_2 - t_1$ — время измерения; F — измеряемая частота. Электронно-счетные частотомеры имеют два основных режима работы: режим измерения частоты, в котором определяется приращение фазы φ за фиксированный интервал $T_{\text{изм}}$ ($T_{\text{изм}} = \text{const}$), и режим измерения периода, когда определяется $T_{\text{изм}}$, соответствующее приращению фазы на заранее выбранную фиксированную величину ($\varphi = \text{const}$). Погрешность измерения зависит от режима частотомера и может быть выражена следующим обобщенным соотношением (без учета составляющей, обусловленной погрешностью опорного генератора):

$$\delta F = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 q^2 T_{\text{изм}}^2 F^2} + \frac{1}{6T_{\text{изм}}^2 f^2}}, \quad (2)$$

где δF — относительная погрешность; f в режиме измерения частоты соответствует измеряемой частоте F , в режиме измерения периода — частоте счетных импульсов; q — отношение среднеквадратических значений сигнала и шума. Первое слагаемое (2) определяется шумами, второе — погрешностью дискретности.

Как видно из (2), повышение точности цифрового измерения частоты возможно при одновременном уменьшении погрешности дискретности и шумовой составляющей. Настоящая работа посвящена исследованию весового метода, предложенного для режима измерения периода в статье *. Весовой метод позволяет уменьшить одновременно обе составляющие погрешности.

Физический аспект возможности уменьшения суммарной погрешности цифрового измерения частоты можно пояснить кратко следующим образом. Анализируя работу классических цифровых частотомеров, принцип работы которых базируется на реализации соотношения (1), можно увидеть, что их особенностью является использование информации о фазе исследуемого сигнала только в моменты начала и окончания измерения. Информация о фазе сигнала в промежуточных точках не используется. Таким образом, уже эти рассуждения указывают на принципиальную возможность дальнейшего повышения точности измерения путем использования информации о фазе измеряемого сигнала в течение всего интервала измерения.

Рассмотрим особенности весового метода для режима измерения частоты. Пусть в отличие от алгоритма (1) производится $(K+1)$ отсчетов фазы исследуемого сигнала через равные интервалы времени $\tau = T_{\text{изм}}/K$: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_K, \varphi_{K+1}$. Результат измерения будем искать в виде взвешенной суммы

$$F = \frac{1}{2\pi\tau} \sum_{i=1}^K q_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \frac{1}{2\pi\tau} \left[-q_1 \varphi_1 + \sum_{i=2}^K (q_{i-1} - q_i) \varphi_i + q_K \varphi_{K+1} \right], \quad (3)$$

где q_i — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию несмещенности оценки. Для обеспечения минимальной погрешности измерения F необходимо решить задачу определения оптимальных весовых коэффициентов q_i , минимизирующих дисперсию σ_F^2 . Значения оптимальных весовых коэффициентов зависят от корреляционных связей между различными отсчетами фазы. Для некоррелированных отсчетов фазы дисперсия

$$\sigma_F^2 = \frac{\sigma_\varphi^2}{4\pi^2 \tau^2} \left[q_1^2 + \sum_{i=2}^K (q_{i-1} - q_i)^2 + q_K^2 \right], \quad (4)$$

где σ_φ^2 — дисперсия отсчета фазы в i -й точке, равная в режиме измерения частоты

* Патюков В. Г., Чмых М. К. Оптимальный алгоритм измерения частоты. — «Изв. высш. учеб. заведений. Приборостроение», 1976, № 3, с. 21—24.

$$\sigma_{\Phi}^2 = 1/2q^2 + 4\pi^2/12. \quad (5)$$

Для минимизации σ_F^2 воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, в соответствии с которым необходимо определить экстремум функции

$$\Phi(q_i) = \sigma_F^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^K q_i - 1 \right). \quad (6)$$

Дифференцирование (6) по q_i с учетом условия несмещенности приводит к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} 2q_1 - q_2 + \lambda/2 &= 0; \\ \dots & \\ -q_{i-1} + 2q_i + q_{i+1} + \lambda/2 &= 0; \\ \dots & \\ -q_{K-1} + 2q_K + \lambda/2 &= 0; \\ \sum_{i=1}^K q_i &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

В результате решения (7) получим выражение для весовых коэффициентов

$$q_i = 6i(K - i + 1)/K, \quad (8)$$

а после подстановки (8) в (4) — значение минимальной относительной погрешности

$$\delta F_{\text{опт}} = \frac{\sigma_{F\text{опт}}}{F} = \frac{\sigma_{\Phi}}{2\pi FT_{\text{изм}}} \sqrt{\frac{12K}{(K+1)(K+2)}}. \quad (9)$$

Как видно из (2) и (9), весовой метод обеспечивает снижение погрешности по сравнению с классическим в

$$l = \frac{\delta F}{\delta F_{\text{опт}}} = \sqrt{\frac{(K+1)(K+2)}{6K}} \text{ раз} \quad (10)$$

и позволяет при больших K значительно уменьшить результирующую погрешность (рис. 1). При $K \gg 1$ $l \approx \sqrt{K/6}$.

При практической реализации весового метода с оптимальными коэффициентами возникают определенные трудности, связанные с формированием весовых коэффициентов в соответствии с (8). В связи с этим целесообразно рассмотреть эффективность применения упрощенного варианта этого метода, основанного на аппроксимации оптимальной весовой функции (8) (кривая 1, рис. 2) линейно-ломаными функциями: треугольной (кривая 2) или в общем виде трапецевидной (кривая 3).

При трапецевидной весовой функции весовые коэффициенты аналитически связаны с номером i соотношением

$$q_i = \begin{cases} bi & \text{при } 1 \leq i \leq n; \\ bn & \text{при } n \leq i \leq K - n + 1; \\ b(K - n + 1 - i) & \text{при } K - n + 1 \leq i \leq K, \end{cases}$$

где $b = 1/(K - n + 1)$ — нормирующий коэффициент; n — количество возрастающих (убывающих) весовых коэффициентов. Опуская промежуточные вычисления, запишем окончательное выражение для погрешности в режиме измерения частоты

$$\sigma_{F1} = \frac{\sqrt{2n}}{n(K - n + 1)} \frac{\sigma_{\Phi}}{2\pi\tau}. \quad (11)$$

Сравнение (11) и (2) показывает, что весовой метод с использованием трапецевидной функции приводит к уменьшению погрешности измерения частоты в

$$l_1 = \sqrt{n} \left(1 - \frac{n}{K} + \frac{1}{K} \right) \text{ раз}. \quad (12)$$

Эффективность метода с трапецевидной весовой функцией зависит от параметра n .

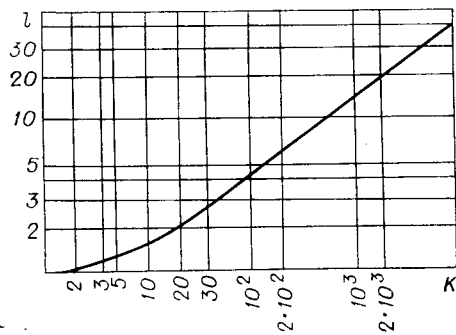


Рис. 1. Зависимость отношения погрешности классического частотомера к оптимальной погрешности от числа отсчетов K .

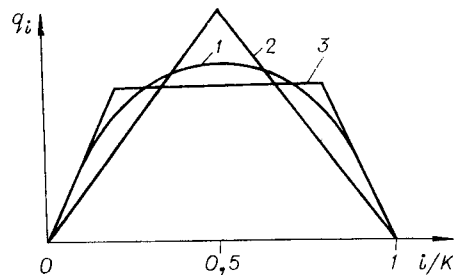


Рис. 2. Оптимальная весовая функция и ее аппроксимации.

Зависимость обобщенного коэффициента l_1/\sqrt{K} , характеризующего эффективность весового метода с трапециевидной функцией, от параметра n/K приведена на рис. 3. Значение n , которому соответствует минимальная погрешность, $n_{\text{опт}} = (K+1)/3$. При этом погрешность

$$\sigma_{F1\text{min}} = \frac{\sqrt{13,5}}{(K+1)^{3/2}} \frac{\sigma_{\Phi}}{2\pi\tau}.$$

Как видно из сравнения погрешностей, применение трапециевидной весовой функции при $n = n_{\text{опт}}$ приводит к незначительному (в $m_1 = \sqrt{13,5K(K+2)/12(K+1)^2} < 1,06$ раз) увеличению погрешности по сравнению с оптимальной.

Треугольная весовая функция также незначительно уступает оптимальной. Точность при треугольной функции ухудшается по сравнению с оптимальной в m_2 раз, где m_2 равно: при K четном $m_2 = \sqrt{4(K+1)/3(K+2)}$, при K нечетном $m_2 = \sqrt{4K(K+2)/3(K+1)^2}$ (т. е. снижение точности составляет приблизительно 15%).

В заключение отметим, что в настоящее время в Красноярском политехническом институте разработано несколько модификаций измерителей частоты, реализующих рассмотренный принцип. Проведенные экспериментальные исследования подтверждают возможность повышения точности цифрового измерения частоты на несколько порядков.

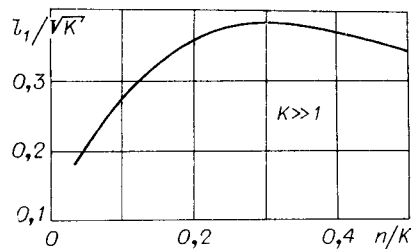


Рис. 3. Зависимость отношения погрешностей при трапециевидной весовой функции от параметра n/K .

Поступило в редакцию 28 июня 1978 г.;
окончательный вариант — 18 января 1979 г.