

ЛИТЕРАТУРА

1. Железнов Н. А. Некоторые вопросы теории информационных электрических систем. Л., изд. ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1960.
2. Брин И. А. Некоторые вопросы теории стационарных случайных функций. М., изд. МЭИ, 1969.
3. Борисов В. А., Сидоров Е. А. Ошибки восстановления стационарных процессов с произвольной функцией корреляции по дискретным координатам.— «Труды МЭИ», 1975. вып. 230, с. 68—71.

Поступила в редакцию 3 января 1978 г.

УДК 621.396.969.11

В. В. МИСЬКИВ, Г. И. СКРЫПНИК

(Львов — Москва)

О ВЫБОРЕ ЧИСЛА ШКАЛ И СООТНОШЕНИЙ МАСШТАБОВ В МНОГОШКАЛЬНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1. При создании радиоинтерферометрических устройств, предназначенных для определения расстояния или направления, возникает задача синтеза многошкальной измерительной системы. Эта задача заключается в выборе числа шкал и соотношений масштабов по критериям точности измерений и надежности раскрытия неоднозначности фазовых отсчетов при различных конструктивных ограничениях [1—3]. Исходная информация о системе задается в виде неполной линейной системы целочисленных уравнений:

$$x = \frac{k_1 + \varphi_1}{d_1} = \dots = \frac{k_i + \varphi_i}{d_i} = \dots = \frac{k_m + \varphi_m}{d_m},$$

где x — определяемый параметр (дальность или направляющий косинус), принимающий значение из интервала $[a, b)$; $k_i = [d_i x]^+$ и $\varphi_i = \{d_i x\}^+$ — соответственно целая и дробная части фазы $\Phi_i = d_i x$; d_i — масштабный коэффициент i -й шкалы; d_m ($d_m > d_i$, $l \neq m$) — внешний масштаб системы; m — число шкал. Наблюдаемые значения дробных частей фазы $\hat{\varphi}_i = \{\varphi_i + \psi_i\}^+$ в общем случае содержат случайные ошибки измерений

$$\psi_i = \{\hat{\varphi}_i - \varphi_i + 1/2\}^+ - 1/2, \quad i = \overline{1, m},$$

с известной совместной плотностью вероятностей $G(\psi) = W(\psi_1, \dots, \psi_m)$. Следуя [4], представим оценку величины x по шкале с наибольшим масштабом в следующем виде:

$$x_m = (n_m + \hat{\varphi}_m - \xi_m) / d_m, \quad (1)$$

где $n_m = k_m + \delta k_m$ — целое число циклов; $\delta k_m = [\varphi_m + \psi_m]^+$ — перебросы фазы на ± 1 цикл, вызываемые ошибкой ψ_m ; неизвестный параметр $\xi_m = \xi_m(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m)$, принимающий значения в интервале $[-1/2, 1/2)$, введен для уточнения $\hat{\varphi}_m$. Для определения параметров n_m , ξ_m обычно используется метод максимального правдоподобия. Как показано в [4], задача оптимизации функции правдоподобия $L(x)$ может быть сведена в рассматриваемом случае к смешанной непрерывно-дискретной

экстремальной задаче, решаемой за два последовательных этапа:

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x < b} L(x) = & \max_{a_m(n_m) \in A_m} \max_{-1/2 \leq \xi_m < 1/2} G \left(\left\{ z_m^{(1)}(n_m) + \frac{d_1 \xi_m}{d_m} + 1/2 \right\}^+ - \right. \\ & \left. - 1/2, \dots, \left\{ z_m^{(m-1)}(n_m) + \frac{d_{m-1} \xi_m}{d_m} + 1/2 \right\}^+ - 1/2, \xi_m \right). \end{aligned}$$

Здесь A_m — множество точек $a_m = (a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(m-1)})$, образующее в евклидовом пространстве R_{m-1} алфавит состояний многошкальной системы; $a_m^{(l)}(n_m) = \{d_l n_m / d_m\}^+$, $z_m^{(l)}(n_m) = \{\hat{b}_m^{(l)} - a_m^{(l)}(n_m) + 1/2\}^+ - 1/2$, $\hat{b}_m^{(l)} = \{\varphi_l - d_l \hat{\varphi}_m / d_m\}^+$, $l = 1, m-1$. На первом этапе находится неоднозначная оценка $\hat{\xi}_m = f_m[z_m(n_m)]$, доставляющая условный максимум $L(x)$ при $z_m(n_m) = \text{const}$. На втором этапе решается задача раскрытия неоднозначности оценки $\hat{\xi}_m: \hat{a}_m(n_m) \Rightarrow \hat{n}_m$. Эквивалентное представление алгоритма раскрытия неоднозначности дает решающая схема, разбивающая область изменения параметра $\hat{b}_m \in \Theta_{m-1}$, являющуюся в R_{m-1} $(m-1)$ -мерным гиперкубом, в соответствии с алфавитом состояний $A_m \subset \Theta_{m-1}$, содержащим q_m элементов, на q_m непересекающихся множеств $B^{(0)}, \dots, B^{(p_m)}, \dots, B^{(q_m-1)}$ таким образом, чтобы при каждом попадании \hat{b}_m в область $B^{(p_m)}$ функция правдоподобия

$$\begin{aligned} G(\{z_m^{(1)} + d_1 f_m[z_m(n_m)]/d_m + 1/2\}^+ - 1/2, \dots, \{z_m^{(m-1)} + \\ + d_{m-1} f_m[z_m(n_m)]/d_m + 1/2\}^+ - 1/2, f_m[z_m(n_m)]) \end{aligned}$$

достигала максимума при $z_m(n_m) = z_m(p_m)$. Тогда из принадлежности \hat{b}_m к области $B^{(n_m)}$ следует $\hat{b}_m \in B^{(n_m)} \Rightarrow \hat{n}_m$.

Наиболее распространенными критериями качества оценки (1) являются среднеквадратическое отклонение величины $\hat{\eta}_m/d_m = (\delta k_m + \varphi_m - \xi_m)/d_m$ при $\hat{k}_m = k_m - \sigma = \text{СКО}(\hat{\eta}_m/d_m | \hat{k}_m = k_m)$ и вероятность правильного определения целого числа циклов $-P(\hat{k}_m)$. В соответствии с приведенным алгоритмом оценивания можно записать

$$\sigma = \frac{1}{d_m} \left[\int [\hat{\eta}_m(k_m) - E\hat{\eta}_m(k_m)]^2 W(\hat{\eta}_m | \hat{k}_m = k_m) d\hat{\eta}_m \right]^{1/2}; \quad (2)$$

$$P(\hat{k}_m) = \int_{z_m[n_m(\hat{k}_m)] \in Z^{(\hat{k}_m)}} W(z_m) dz_m, \quad (3)$$

где $\hat{\eta}_m(k_m) = \varphi_m + \psi_m - f_m[z_m(n_m(k_m))]$; $E\hat{\eta}_m$ — математическое ожидание случайной величины $\hat{\eta}_m(k_m)$; $z_m^{(l)}[n_m(\hat{k}_m)] = \{\psi_l - d_l \psi_m / d_m + 1/2\}^+ - 1/2$; $Z^{(\hat{k}_m)}$ — отображение решающей схемы $B^{(\hat{k}_m)}$ с помощью преобразования $z_m^{(l)}[n_m(\hat{k}_m)] = \{\hat{b}_m^{(l)} - a_m^{(l)}(n_m(\hat{k}_m)) + 1/2\}^+ - 1/2$, $l = 1, m-1$; $W(\hat{\eta}_m | \hat{k}_m = k_m)$ и $W(z_m)$ — плотности вероятностей величин $\hat{\eta}_m(k_m)$ и z_m , выражаемые через $G(\psi)$.

2. В рамках рассматриваемого критериального подхода задача синтеза многошкального измерителя будет состоять в нахождении таких значений масштабных коэффициентов d_1, \dots, d_m , которые обеспечивают необходимое качество восстановления x по дробным частям $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$, представляемое в виде неравенств $\sigma \leq \alpha$, $P(\hat{k}_m) \geq \beta$, а также удовлетворяют дополнительным требованиям, возникающим при проектировании устройств (например, геометрическим ограничениям на расположение антенн в фазовом пеленгаторе, конструктивным требова-

ниям на частоты шкал в радиодальномере и т. д.). Решение поставленной задачи наталкивается в общем случае на значительные математические трудности, связанные с построением решающих схем и расчетом параметров (2) и (3). В этой связи представляет интерес решение задачи синтеза для решающей схемы простейшей конфигурации, образованной системой $(m-1)$ -мерных параллелепипедов-брусков

$$B^{(n_m)}: -\delta_l \leq z_m^{(l)}(n_m) < \delta_l, \quad l = \overline{1, m-1}, \quad (4)$$

с гранями, параллельными координатным плоскостям R_{m-1} , и с длинами ребер $2\delta_l$, не зависящими от n_m . Расчет показывает, что рассматриваемая решающая схема является оптимальной и эффективной для равномерного закона ошибок измерений, имеющего плотность вероятностей

$$G(\psi) = \begin{cases} 1 / \left(2^m \prod_{i=1}^m \Delta_i \right) & \text{при } -\Delta_i \leq \psi_i < \Delta_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ 0 & \text{при } \psi_i < -\Delta_i, \psi_i \geq \Delta_i, \quad i = \overline{1, m}; \end{cases}$$

при легко выполняемых на практике ограничениях:

$$\Delta_l \geq \frac{1}{2} \frac{d_l}{d_m} (\Delta_m - [-\Delta_m]^+), \quad \frac{d_l \Delta_l}{d_m} \leq |\delta_l - \Delta_l|, \quad 1 \leq l \leq m-1.$$

Тогда $\hat{\xi}_m = 0$ и оптимальная оценка принимает вид $\hat{x}_m = (\hat{n}_m + \hat{\varphi}_m) / d_m$, а параметры качества находятся по формулам

$$\sigma = \Delta_m / (\sqrt{3} d_m), \quad P(\hat{k}_m) = \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\min(\Delta_l, \delta_l)}{\Delta_l}. \quad (5)$$

В [4] формулируется следующее условие существования однозначной оценки (теорема 1):

$$\{(1-\varepsilon)bd_m\}^+ - [ad_m]^+ + 3 \leq q_m = \text{НОК}(q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(l)}, \dots, q_m^{(m-1)}), \quad (6)$$

где ε — бесконечно малая положительная величина, введенная для замыкания интервала изменения x ; q_m — число точек алфавита A_m , равное наименьшему общему кратному чисел $q_m^{(1)}, \dots, q_m^{(l)}, \dots, q_m^{(m-1)}$; $q_m^{(l)}$ — знаменатель отношения d_l/d_m после его приведения к несократимой целочисленной дроби. При выполнении соотношения (6) число целых циклов фазы, укладывающихся на интервале $[a-1/d_m, b+1/d_m]$, не превышает числа точек алфавита. Важной для дальнейшего изложения является приведенная в [4] теорема 2 о разбиении гиперкуба Θ_{m-1} на плотноупакованные бруски, в которой в общем виде устанавливается связь между размерами ребер брусков в соотношении (4) и масштабными коэффициентами системы. Среди возможного набора брусков, удовлетворяющих условиям указанной теоремы, целесообразно выбрать для решающей схемы тот брусок, у которого ребро минимального (максимального) размера является наибольшим (наименьшим). Бруски, обладающие указанным свойством, названы в [2] дискретам алфавита. Процедура нахождения размеров плотноупакованных дискретов алфавита дает следующая теорема.

Теорема 1. Бруски, у которых длины ребер удовлетворяют соотношениям

$$2\delta_{l_\alpha} = \max_{\substack{l \neq l_1 \\ \dots \\ l \neq l_{\alpha-1}}} 1/q_{m-\alpha+1}^{(l)}, \quad 2\delta_{l_1} \leq 2\delta_{l_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq m-1, \quad (7)$$

где число $q_{m-\alpha}^{(l)} = q_{m-\alpha+1}^{(l)} / (q_{m-\alpha+1}^{(l)}, q_{m-\alpha+1}^{(l)})^+$ — знаменатель несократимой

дроби $q_l^{(m-\alpha)}/q_{m-\alpha}^{(l)} = q_{m-\alpha+1}^{(l\alpha)}/q_{m-\alpha+1}^{(l)}$ (скобками $(\cdot)^+$ обозначен наибольший делитель двух чисел), определяют плотноупакованные дискретные алфавиты. При нарушении системы неравенств $2\delta_{l_1} \leq 2\delta_{l_2}$ ($1 \leq \alpha \leq m-1$) дискретные алфавиты образуют неплотную упаковку.

Доказательство данной теоремы было выполнено на основе теоремы 2 из [4] и определения дискретных алфавитов. Приведенная теорема устанавливает правило, с помощью которого находятся длины ребер плотноупакованных дискретных алфавитов по значениям целых чисел $\{q_m^{(l)}\}$, $l = \overline{1, m-1}$, связанных с масштабными коэффициентами, и может быть использована для анализа многошкальных систем.

Практический интерес для решения задачи синтеза многошкальной системы представляет следующая теорема, являющаяся в определенном смысле обратной теореме 1.

Теорема 2. Пусть задано целое число $q_m = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{m-1}$, где $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{m-1}$ и множитель μ_1 является минимальным при всех возможных разбиениях числа q_m на $m-1$ множителей. Тогда алфавит A_m с масштабными коэффициентами

$$\tilde{d}_m = q_m, \quad \tilde{d}_l = q_m q_l^{(m)}/q_m^{(l)}, \quad (q_l^{(m)}, q_m^{(l)})^+ = 1 \quad (l \neq m) \quad (8)$$

и знаменателями

$$\begin{aligned} q_m^{(1)} &= \mu_1, \quad q_m^{(2)} = v_1^{(2)} \mu_2, \quad q_m^{(3)} = v_1^{(3)} v_2^{(3)} \mu_3, \dots, q_m^{(m-1)} = \\ &= v_1^{(m-1)} v_2^{(m-1)} \dots v_{m-2}^{(m-1)} \mu_{m-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где числа $v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, \dots, v_1^{(m-1)}$ суть делители числа μ_1 ; числа $v_2^{(3)}, v_2^{(4)}, \dots, v_2^{(m-1)}$ — делитель числа μ_2 и т. д.; число $v_{m-2}^{(m-1)}$ — делитель числа μ_{m-2} , причем эти числа подчиняются условиям

$$\left(\frac{\mu_p}{v_p^{(s)}}, v_{p+1}^{(s)} v_{p+2}^{(s)} \dots v_{s-1}^{(s)} \mu_s \right)^+ = 1, \quad p < s, \quad p = \overline{1, m-2}, \quad s = \overline{2, m-1}, \quad (10)$$

содержит q_m элементов и имеет плотноупакованные дискретные алфавиты с длинами ребер $2\delta_l = \mu_l^{-1}$.

Следствие. Если $q_m = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое представление числа q_m , то максимальное число шкал системы с q_m состояниями равно $\sum_I \alpha_j + 1$.

Доказательство приведенной теоремы было выполнено на основе теоремы 1. Действительно, если подставить (8) в (7), то при выполнении соотношений (10), определяющих единственность делителей $v_p^{(s)}$, получим $2\delta_{l_\alpha} = \mu_\alpha^{-1}$. Заметим, что при $\tilde{d}_m = \text{const}$ и $\mu_l = \text{const}$ соотношения (2) и (3) не зависят от чисел $v_p^{(s)}, q_l^{(m)}$. Эта закономерность определяет свободу выбора масштабных коэффициентов системы.

3. Процедуру выбора масштабных коэффициентов рассмотрим на примере равномерного закона распределения ошибок измерений, когда справедливы соотношения (5)–(10). Приводимую процедуру, носящую итеративный характер, можно условно разбить на три этапа.

Определение $\inf \alpha_m, \inf q_m$. Нижняя граница внешнего масштаба d_m находится из условия обеспечения необходимой точности измерений параметра x . На основании первого соотношения в (5) можно записать, что $d_m \geq \Delta m / (\alpha \sqrt{3}) \equiv \inf d_m$. В свою очередь, условие (6) дает

$$q_m \geq [(1-\varepsilon)b \inf d_m]^+ - [a \inf d_m]^+ + 3 \equiv \inf q_m.$$

$m-1$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	P
1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$	—	—	—	—	—	—	1/600
2	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 5^2$	—	—	—	—	—	1/120
3	$2^2 \cdot 5$	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 5$	—	—	—	—	1/24
4	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 5$	5	2^2	—	—	—	5/24
5	$2 \cdot 3$	5	5	5	2^2	—	—	5/6
6	5	5	5	2^2	3	2	—	1
7	5	5	5	3	2	2	2	1

Нахождение m, μ_i, q_m, d_m . Число шкал назначается из условия обеспечения требуемой надежности раскрытия неоднозначности. Последовательно из полуинтервала $q_m \geq \inf q_m$ выбирается целое число q_m , которое в соответствии с теоремой 2 разбивается на сомножители μ_i . Число сомножителей при $q_m = \text{const}$ постепенно увеличивается от 1 до $m-1$, и для каждого шага рассчитывается значение P по формуле (5). Процесс заканчивается при выполнении неравенства $P \geq \beta$.

Определение $q_m^{(l)}, d_l$. В качестве $q_m^{(l)}$ и d_l используются последовательности чисел, приведенные в теореме 2. При этом числа $v_p^{(s)}, q_i^{(m)}$ выбираются таким образом, чтобы удовлетворить возникающим конструктивным требованиям. Исходные масштабы системы находятся по формуле $d_i = \tilde{d}_i d_m / q_m$.

Пример. Пусть требуется синтезировать фазовый радиодальномер, обеспечивающий однозначное определение расстояния в интервале [1 км, 2999 км] с погрешностью измерений не хуже $\alpha = 10^{-3}/\sqrt{3}$ км и надежностью раскрытия неоднозначности не ниже $\beta = 5/6$ при наличии ошибок измерений: в грубых шкалах — $\Delta_l = 10^{-1}$ ФЦ, в точной шкале — $\Delta_m = 10^{-3}$ ФЦ. При этом значения масштабных коэффициентов грубых шкал, пропорциональные частотам шкал, должны быть сосредоточены в интервале наименьшей длины, т. е. удовлетворяют требованию

$$\min_{\tilde{d}_1 \dots \tilde{d}_{m-1}} \left(\max_l \tilde{d}_l - \min_l \tilde{d}_l \right), \quad \tilde{d}_l \neq \tilde{d}_k \text{ при } l \neq k. \quad (11)$$

На первом этапе находим

$$q_m \geq [(1-\varepsilon) 2999 \cdot 10^{-3} / (\sqrt{3} \cdot 10^{-3} / \sqrt{3})]^+ - [1 \cdot 10^{-3} / (\sqrt{3} \cdot 10^{-3} / \sqrt{3})]^+ + 3 = 3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

На втором этапе полагаем $q_m = 3000$ ($d_m = \inf d_m = 1$) и последовательно разбиваем данное число на группы упорядоченных множителей: $\mu_1; \mu_1 \geq \mu_2; \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3$ и т. д. Для каждой группы по второму соотношению в (5) вычисляется величина вероятности правильного раскрытия неоднозначности. Результаты расчета различных вариантов приведены в таблице. Анализируя приведенные данные, можно заключить, что максимальное число вспомогательных шкал равно 7, а требуемая надежность раскрытия неоднозначности обеспечивается при $m-1=5$. На третьем этапе на основе соотношений (8)–(11) определяются значения масштабных коэффициентов при $m=6$. В соответствии с таблицей $\mu_1=6, \mu_2=5, \mu_3=5, \mu_4=5, \mu_5=4$ и соотношение (9) принимает вид

$$q_6^{(1)} = 6, q_6^{(2)} = v_1^{(2)} 5, q_6^{(3)} = v_1^{(3)} v_2^{(3)} 5, q_6^{(4)} = v_1^{(4)} v_2^{(4)} v_3^{(4)} 5, q_6^{(5)} = v_1^{(5)} v_2^{(5)} v_3^{(5)} v_4^{(5)} 4.$$

Опишем множество целых чисел $v_p^{(s)}$, удовлетворяющих условию (10):

$$v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_1^{(4)}: 1; 2; 3; 6, v_1^{(5)} = 2, v_2^{(3)} = v_2^{(4)} = 5, \\ v_2^{(5)}: 1; 5, v_3^{(4)} = 5, v_3^{(5)}, v_4^{(5)}: 1; 5.$$

С учетом данного представления соотношение (8) принимает вид

ряющих условию (11) и расположенных внутри интервала шах \tilde{d}_i — $\min \tilde{d}_i = 100$. Если условие (11) распространить на две последовательно сравниваемые шкалы и потребовать, чтобы масштабные коэффициенты вспомогательных шкал с четными номерами были меньше коэффициентов с нечетными номерами, то определится единственный набор масштабных коэффициентов, удовлетворяющий (12) и равный $\tilde{d}_1 = 500 (q_1^{(6)} = 1)$, $\tilde{d}_2 = 400 (q_2^{(6)} = 2, v_1^{(2)} = 3)$, $\tilde{d}_3 = 420 (q_3^{(6)} = 7, v_1^{(3)} = 2)$, $\tilde{d}_4 = 416 (q_4^{(6)} = 52, v_1^{(4)} = 3, q_4^{(6)} = 104, v_1^{(4)} = 6)$, $\tilde{d}_5 = 417 (q_5^{(6)} = 139, v_2^{(5)} = v_3^{(5)} = v_4^{(5)} = 5)$, $\tilde{d}_6 = 3000$. Исходные масштабы шкал, выражаемые в км^{-1} , находятся по формуле

$$d_i = 2f_i/c = d_m d_i / q_m = \tilde{d}_i / 3000,$$

где f_i — частоты шкал, c — скорость света в вакууме. Приведем результаты расчета значений f_i :

i	1	2	3	4	5	6
f_i , кГц	25	20	21	20,8	20,85	150

В заключение отметим, что в классе решающих схем вида (4) приведенная процедура выбора масштабов легко распространяется на другие законы распределения ошибок измерения соответствующей заменой соотношений (5). В результате приходим к решению задачи квазиоптимального синтеза многошкальной системы. Строгое решение рассматриваемой задачи синтеза для любого другого закона распределения ошибок измерения дробных частей требует исследования оптимальной решающей схемы и установления зависимости между ее параметрами и масштабными коэффициентами системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скрыпник Г. И., Серова А. А., Атаев Д. И. О надежности устранения многозначности фазовых измерений. — «Радиотехника и электроника», 1968, т. 13, № 10, с. 1753.
2. Глобенко Ю. В., Скрыпник Г. И. О разрешении неоднозначности циклических измерений. — «Автометрия», 1972, № 4, с. 69.
3. Собцов И. В. Оценка максимального правдоподобия многошкальной измерительной системы. — «Радиотехника и электроника», 1972, т. 17, № 10, с. 2076.
4. Скрыпник Г. И. О рекуррентной процедуре раскрытия неоднозначности фазовых измерений. — «Автометрия», 1978, № 3, с. 8—13.

Поступила в редакцию 5 апреля 1978 г.