

Кроме того, анализ формул $P_n^k(\delta)$, рассчитанных для фиксированных значений n и k , позволил установить, что при четных n на участке $1/[1/(n+1)/2] < \delta < 1/[1/(n-1)/2]$ имеет место замкнутое аналитическое соотношение

$$P_n^2(\delta) = \frac{2}{n} C_n^{n/2-1} \left(1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \delta\right)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов В. М., Резник А. Л. Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n -мерном пространстве.— *Автометрия*, 1976, № 1.
2. Ефимов В. М., Резник А. Л. Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли.— *Автометрия*, 1977, № 4.
3. Ефимов В. М., Искольдский А. М., Крендель Ю. М., Лившиц З. А. О характеристиках различных методов считывания изображений дискретной структуры.— *Автометрия*, 1973, № 1.
4. Уилкс. Математическая статистика. М.: Мир, 1966.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию 5 ноября 1980 г.

М. А. СТАРКОВ
(Новосибирск)

УДК 681.32.05

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В статье * предложена модель бинарных изображений и на примерах показана ее эффективность. В настоящей работе дается обобщение статистической модели на случай многоградационных изображений. Предполагается, что читатель знаком с упомянутой публикацией, поэтому введенные в ней определения здесь не разъясняются. В целях экономии места громоздкие математические выкладки опущены там, где это не идет в ущерб изложению основного материала.

Будем рассматривать изображения, заданные на прямоугольной матрице или бесконечной квадратной сетке, причем каждый элемент изображения может принять одно из значений множества чисел $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Такое представление изображений наилучшим образом приближается к тому, что получается после оцифровки реального фотоснимка. Введем следующее определение: r -м сечением многоградационного изображения X назовем бинарное изображение X^r , которое получается из многоградационного изображения по правилу

$$x_{j,k}^r = \begin{cases} 1, & x_{j,k} \geq r, \\ 0, & x_{j,k} < r \end{cases} \quad (1)$$

(далее МИ обозначает многоградационное изображение, БИ — бинарное изображение). В упомянутой выше работе показано, что статистика БИ может быть хорошо представлена разностным уравнением второго порядка

$$\Delta P_{j,k} - \lambda(P_{j,k} - h) = 0, \quad (j, k) \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

где $P_{j,k}$ — вероятность реализации единицы в (j, k) -й точке БИ, а Δ —

* Старков М. А. Статистическая модель бинарных изображений.— *Автометрия*, 1979, № 5.

разностный оператор Лапласа на сетке. Для точек, принадлежащих опорному множеству Ω , выполняется равенство $P_{j,k} = \omega_{j,k}$. Записывая (2) для каждого сечения МИ, получим

$$\Delta R_{j,k}^r - \lambda^r (R_{j,k}^r - h^r) = 0, \quad (j, k) \in \bar{\Omega}; \quad (3)$$

$$R_{j,k}^r = \begin{cases} 1, & \omega_{j,k} \geq r, \\ 0, & \omega_{j,k} < r, \end{cases} \quad (j, k) \in \Omega.$$

Здесь $R_{j,k}^r$ — вероятность того, что в (j, k) -й точке МИ реализуется значение $x_{j,k} \geq r$; $\omega_{j,k}$ — значение МИ на множестве Ω . Будем полагать, что для n -градационного изображения ($x_{j,k} \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$) верхний индекс r пробегает все значения от 0 до n . Тогда очевидно, что $R_{j,k}^0 = 1$ — событие, достоверное для всех (j, k) , и $R_{j,k}^n = 0$ — событие, невозможное для всех (j, k) . Вероятность реализации r -й градации в (j, k) -й точке определится как первая разность от $R_{j,k}^r$ по r :

$$P_{j,k}^r = R_{j,k}^r - R_{j,k}^{r+1}. \quad (4)$$

Суммируя $P_{j,k}^r$ по всем r и учитывая вышеизложенное замечание, получим условие полноты событий для всех точек матрицы или сетки:

$$\sum_r P_{j,k}^r = 1. \quad (5)$$

Первую разность от h^r обозначим через \tilde{h}^r :

$$\tilde{h}^r = h^r - h^{r+1} \quad (6)$$

— и заметим, что она определяет априорную вероятность реализации r -й градации и непосредственно связана с гистограммой изображения.

Систему уравнений (3) будем называть статистической моделью стационарного изотропного МИ.

Итак, матрица или сетка разделяется на два подмножества точек Ω и $\bar{\Omega}$. На Ω изображение известно достоверно, на $\bar{\Omega}$ — с некоторой степенью неопределенности, которая определяется распределением вероятностей реализации градаций $P_{j,k}^r$. Можно ли улучшить наши знания об $\bar{\Omega}$, располагая только значениями на Ω ? Для этого проведем следующие рассуждения. Рассмотрим две точки a и $b \in \bar{\Omega}$. Вероятность реализации l -го значения при значениях $\omega_{j,k}$ на Ω в точке a равна $P_a^l(\Omega)$. В точке b значение t может реализоваться с вероятностью $P_b^t(\Omega)$; соединив точку b к множеству Ω , получим $\Omega' = \Omega \cup b$. Вычислив новое распределение вероятностей при прежних значениях $\omega_{j,k}$ на Ω и при значении t в точке b , получим в точке a вероятность реализации l -й градации $P_a^l(\Omega' | t)$. Просчитав, таким образом, $P_a^l(\Omega' | t)$ для всех t , можно определить вероятность реализации l -й градации в точке a по формуле полной вероятности:

$$\hat{P}_a^l(\Omega) = \sum_t P_b^t(\Omega) P_a^l(\Omega' | t).$$

При этом наши знания о точке a либо улучшатся, либо ухудшатся, либо не изменятся. Первые два случая означают, что можно изменить знания об $\bar{\Omega}$, располагая только знанием об Ω , и, следовательно, неопределенность знаний об $\bar{\Omega}$ сама точно не определена, и модель противоречива, а поэтому докажем следующую теорему.

Вероятность реализации l -й градации в точке a при заданных $\omega_{j,k}$ на Ω равна сумме вероятностей реализаций градаций в b -й точке, умноженных на соответствующие условные вероятности l -й градации в a -й точке

при заданных значениях на $\Omega' = \Omega \cup b$:

$$\sum_t P_b^t(\Omega) P_a^l(\Omega' | t) = P_a^l(\Omega). \quad (7)$$

Введем следующую функцию:

$$F_{j,k}^l = \sum_t P_b^t(\Omega) R_{j,k}^l(\Omega' | t), \quad (8)$$

где $P_{j,k}^l$ и $R_{j,k}^l$ связаны между собой соотношением (4), и, таким образом, первая разность по l от $F_{j,k}^l$ дает левую часть соотношения (7). Сравним между собой $F_{j,k}^l$ и $R_{j,k}^l(\Omega)$. Пусть $(j, k) \in \Omega$ и $\omega_{j,k} \geq l$, тогда $R_{j,k}^l(\Omega)$ и $R_{j,k}^l(\Omega' | t)$ равны 1 и $F_{j,k}^l = \sum_t P_b^t(\Omega) = 1$ в силу (5), в случае $\omega_{j,k} = 0$ $R_{j,k}^l(\Omega) = R_{j,k}^l(\Omega' | t) = F_{j,k}^l = 0$. Таким образом, $F_{j,k}^l$ и $R_{j,k}^l(\Omega)$ совпадают всюду на Ω . В точке b имеем

$$F_b^l = \sum_t P_b^t(\Omega) R_b^l(\Omega' | t),$$

но $R_b^l(\Omega' | t) = 1$ при $l \leq t$ и $R_b^l(\Omega' | t) = 0$ при $l > t$, тогда

$$F_b^l = \sum_{t=l}^{n-1} P_b^t(\Omega) = R_b^l(\Omega).$$

Итак, $F_{j,k}^l$ и $R_{j,k}^l(\Omega)$ совпадают всюду на Ω' , а на $\bar{\Omega}'$ удовлетворяют уравнению (3). В силу единственности решения уравнения (3) $F_{j,k}^l$ и $R_{j,k}^l(\Omega)$ представляют собой одну и ту же функцию, а следовательно, совпадают их первые разности по l , и равенство (7) справедливо, что и требовалось доказать.

Рассмотрим основные свойства МИ. Для этого изучим свойства решений системы уравнений (3). Подстановкой

$$S_{j,k} = P_{j,k} - h \quad (9)$$

уравнение (2) приведем к виду

$$\Delta S_{j,k} - \lambda S_{j,k} = 0. \quad (10)$$

Обозначим через $g_{j,k}^{r,s}$ решение уравнения (10) при следующих значениях на Ω :

$$g_{j,k}^{r,s} = \begin{cases} 0, & (j,k) \neq (r,s), \quad (j,k) \wedge (r,s) \in \Omega, \\ 1, & (j,k) = (r,s) \in \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь в единственной точке (r, s) опорного множества задано значение, равное единице, в остальных точках Ω $\omega_{j,k} = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, решением уравнения (10) при произвольных значениях $\omega_{j,k}$ будет

$$S_{j,k} = \sum_{(r,s) \in \Omega} \omega_{r,s} g_{j,k}^{r,s}. \quad (12)$$

Нас будут интересовать только решения при $\omega_{j,k} = 0 \vee 1$. Разобьем Ω на два подмножества Ω_0 и Ω_1 таких, что

$$\omega_{j,k} = \begin{cases} 0, & (j,k) \in \Omega_0, \\ 1, & (j,k) \in \Omega_1. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда решение уравнения (2) представляется в виде

$$P_{j,k} = (1-h) \sum_{(r,s) \in \Omega_1} g_{j,k}^{r,s} - h \sum_{(r,s) \in \Omega_0} g_{j,k}^{r,s} + h, \quad (14)$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой (14) в формулу (2). Рассмотрим

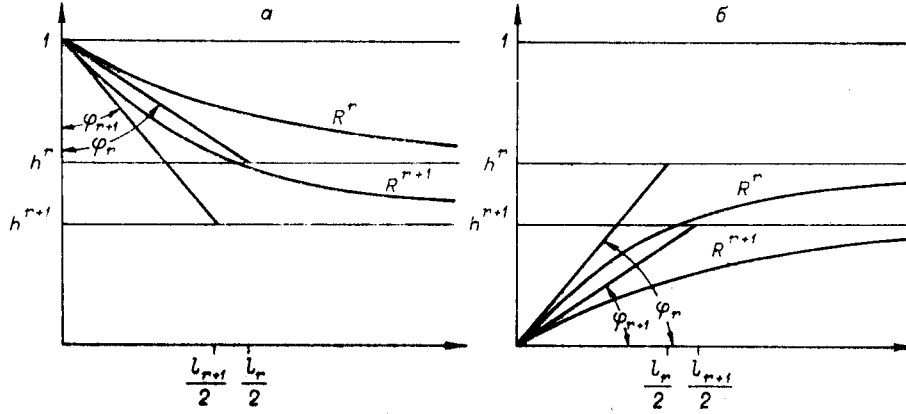


Рис. 1.

рим одномерный случай. Если Ω состоит из одной-единственной точки, принадлежащей началу координат, то $g_k^0 = g_k$ определится выражением

$$g_k = (1 + \lambda/2 + \sqrt{\lambda + \lambda^2/4})^{-|k|}. \quad (15)$$

Параметр λ связан со средней длиной отрезка d соотношением

$$\lambda = 4/(d^2 - 1). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$g_k = \left(\frac{d+1}{d-1}\right)^{-|k|} = e^{-|k| \ln \frac{d+1}{d-1}}. \quad (17)$$

Воспользуемся разложением логарифма в показателе экспоненты в следующий ряд:

$$\ln((d+1)/(d-1)) = 2(1/d - 1/3d^3 + 1/5d^5 + \dots). \quad (18)$$

Заметим, что всегда $d > 1$, отбросим в (18) все члены разложения выше первого порядка и, подставив (18) в (17), получим

$$g_k = e^{-2|k|/d}. \quad (19)$$

Таким образом, в одномерном случае решения системы уравнений (3) выражаются через экспоненты

$$R_k^r = \begin{cases} (1 - h^r) e^{-2\frac{|k|}{d_r}} + h^r, & r \leq \omega_0; \\ h^r \left(1 - e^{-2\frac{|k|}{d_r}}\right), & r > \omega_0, \end{cases} \quad (20)$$

где d_r — средняя длина отрезка в r -м сечении изображения. Рассмотрим соотношения, которые должны выполняться между d_r и h^r , для чего потребуем выполнения условия неотрицательности первой разности по r решения (20). Пусть в начале координат реализовалось наибольшее значение. Рассмотрим решения (20) для r -го и $r+1$ -го сечений. Как видно из рис. 1, а, для неотрицательности первой разности по r необходимо выполнение условия $\operatorname{tg} \varphi_r > \operatorname{tg} \varphi_{r+1}$, где φ — угол между осью ординат и касательной к экспоненте. Таким образом, с одной стороны, имеем

$$d_r/(1 - h^r) \geq d_{r+1}/(1 - h^{r+1}) \quad \text{или} \quad d_{r+1} \leq d_r(1 - h^{r+1})/(1 - h^r).$$

С другой стороны, рассматривая решения при условии реализации

нуля в начале координат (рис. 1, б), получим ограничение

$$d_{r+1} \geq d_r h^{r+1}/h^r.$$

Оба неравенства, выраженные в относительных приращениях, представляются в виде

$$-\frac{\hbar^r}{h^r} \leq \frac{d_{r+1} - d_r}{d_r} \leq \frac{\hbar^r}{1 - \hbar^r}. \quad (21)$$

Таким образом, d_r с номером сечения может получать как положительные, так и отрицательные приращения. Интересно рассмотреть предельные случаи. Пусть средний отрезок возрастает с номером сечения. Здесь градации, соответствующие малым значениям, склонны образовывать небольшие светлые пятна, градации же, соответствующие большим значениям, имеют тенденцию образовывать большие по размерам черные пятна. Визуально такой снимок выглядит как бы перепроявленным. При реализации в опорной точке какого-либо промежуточного значения t в ее окрестности с большей вероятностью ожидаются значения $\geq t$ и с меньшей вероятностью $< t$. Если же с возрастанием номера сечения длина среднего отрезка убывает, то, наоборот, фон будет светлым с тенденцией образовывать большие связанные области, а градации, соответствующие большим значениям, малыми областями «рассыпаны» по кадру.

Будем называть нормальным многоградационным изображением (НМИ) такое изображение, для которого средняя длина отрезка постоянна по всем сечениям. Система уравнений (3) для НМИ существенно упрощается, поскольку λ не зависит от r . Взяв первую разность по r от уравнений (3), получим

$$\Delta P_{j,k}^r - \lambda (P_{j,k}^r - \hbar^r) = 0, \quad (j, k) \in \bar{\Omega}; \quad (22)$$

$$P_{j,k}^r = \begin{cases} 1, & \omega_{j,k} = r, \\ 0, & \omega_{j,k} \neq r \end{cases}, \quad (j, k) \in \Omega.$$

В систему (22) вероятность реализации r -й градации входит уже непосредственно. Условие на Ω задается в виде единицы в тех точках, где была реализована данная градация.

Вычислим корреляционную функцию для ансамбля изображений. Пусть $\Omega = \emptyset$. Корреляционная функция определяется как математическое ожидание произведения $(t - M)(i - M)$, где t — значение изображения в (j, k) -й точке, i — значение изображения в (r, s) -й точке, а M — математическое ожидание значения изображения. Для стационарных изображений корреляционная функция будет зависеть только от разности значений координат (j, k) -й и (r, s) -й точек, поэтому одну из точек можно совместить с началом координат. Не нарушая общности рассуждений, будем считать априорное распределение значений МИ равномерным, т. е. $\hbar^r = \hbar$, $M = (n - 1)/2$. По определению корреляционной функции

$$K_{j,k} = \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (t - M)(i - M) P_{0,0}^t P_{j,k}^i(|t), \quad (23)$$

где $P_{0,0}^t = \hbar$ — вероятность реализации t -й градации в начале координат, $P_{j,k}^i(|t)$ — вероятность реализации i -й градации в (j, k) -й точке при условии реализации t -й градации в начале координат. Подставляя (4) в (23) и учитывая замечание о $P_{0,0}^t$ получим

$$K_{j,k} = \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (t - M)(i - M) [R_{j,k}^i(|t) - R_{j,k}^{i+1}(|t)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (t-M)(i-M) R_{j,h}^i(|t) - \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n (t-M)(i-1-M) R_{j,h}^i \times \\
&\times (|t) = \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (t-M)(i-M) R_{j,h}^i(|t) - \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (t-M)(i-M) \times \\
&\quad \times R_{j,h}^i(|t) + \hbar \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n (t-M) R_{j,h}^i(|t).
\end{aligned}$$

Первые две суммы не совпадают между собой только в пределах изменения внутренней суммы по i . Замечая, что $R_{j,h}^0(|t) = 1$, а $R_{j,h}^n(|t) = 0$, будем иметь

$$K_{j,h} = -\hbar M \sum_{t=0}^{n-1} (t-M) + \hbar \sum_{t=0}^{n-1} (t-M) \sum_{i=1}^{n-1} R_{j,h}^i(|t).$$

Первая сумма есть математическое ожидание центрированной случайной величины и поэтому равна нулю. Во второй сумме согласно (14) $R_{j,h}^i(|t)$ представляется в виде

$$R_{j,h}^i(|t) = \begin{cases} (1-h^i) g_{j,h}(\lambda_i) + h^i, & i \leq t, \\ h^i - h^i g_{j,h}(\lambda_i), & i > t. \end{cases} \quad (24)$$

Подставляя (24) в корреляционную функцию, получим

$$\begin{aligned}
K_{j,h} &= \hbar \sum_{t=1}^{n-1} (t-M) \sum_{i=1}^t [(1-h^i) g_{j,h}(\lambda_i) + h^i] + \\
&+ \hbar \sum_{t=0}^{n-1} (t-M) \sum_{i=t+1}^{n-1} [h^i - h^i g_{j,h}(\lambda_i)].
\end{aligned}$$

После упрощений

$$K_{j,h} = \hbar \sum_{t=1}^{n-1} (t-M) \sum_{i=1}^t g_{j,h}(\lambda_i). \quad (25)$$

Изменяя в (25) порядок суммирования, получим корреляционную функцию МИ в окончательном виде

$$K_{j,h} = \hbar \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(n-i)}{2} g_{j,h}(\lambda_i). \quad (26)$$

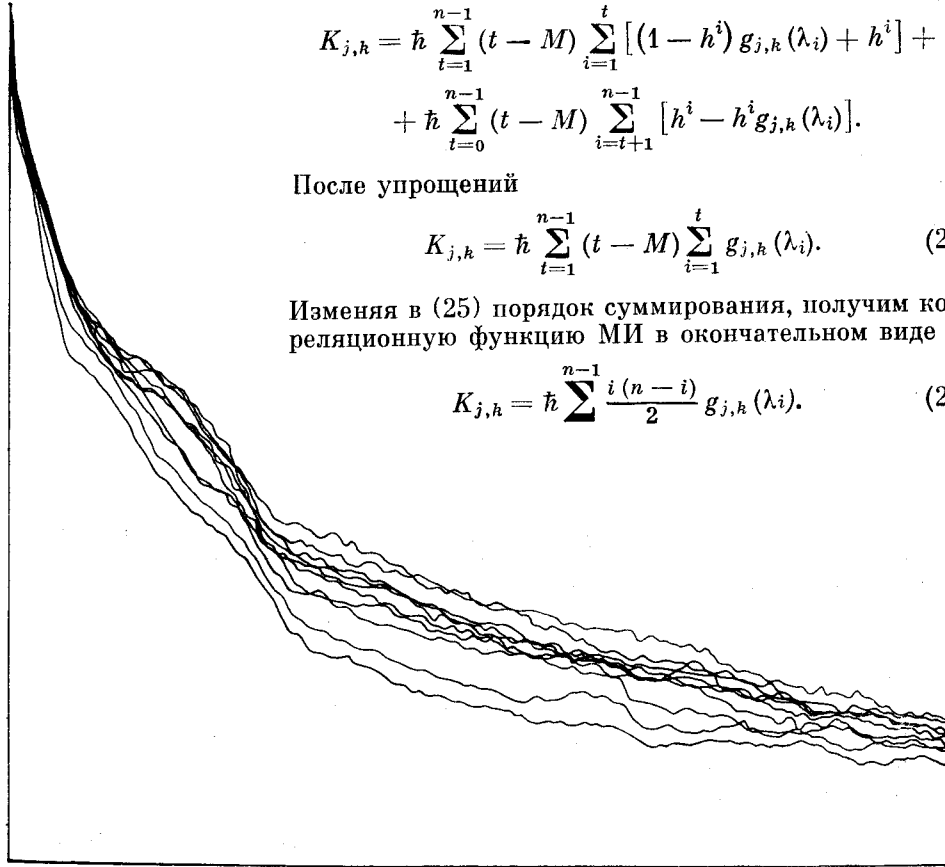


Рис. 2.

Из выражения (26) видно, что наибольший вклад в корреляционную функцию МИ вносят решения для значений градаций, близких к математическому ожиданию. Заметим, что λ_i может изменяться от градации к градации лишь в небольших пределах (см. (16) и (21)), поэтому корреляционная функция для широкого класса изображений должна сохранять свой вид. Подставляя (19) в (26), получим корреляционную функцию для одномерного случая, т. е. функцию внутрисканной корреляции:

$$K_h = \hbar \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(n-i)}{2} e^{-2 \frac{|h|}{d_i}}. \quad (27)$$

Изменение d_i в допустимых пределах несущественно влияет на вид K_h . На рис. 2 показано несколько реализаций функции внутрисканной корреляции, снятых с реального изображения (портрет). Из него видно, что выражение (27) вполне удовлетворительно соответствует действительности и может быть принято для теоретических построений. Те же рассуждения для НМИ дают

$$K_{j,k} = D^2 g_{j,k}(\lambda), \quad (28)$$

где $D = \sqrt{\hbar \Sigma(t-M)^2}$ — дисперсия. Нормированная корреляционная функция

$$\hat{K}_{j,k} = (1/D^2) K_{j,k} = g_{j,k}(\lambda) \quad (29)$$

совпадает с решением уравнения (10), и решение системы уравнений (22) для НМИ может быть выражено через функцию автокорреляции:

$$P_{j,k}^r = \begin{cases} (1-h) \hat{K}_{j,k} + h, & r = \omega_{0,0}, \\ h(1 - \hat{K}_{j,k}), & r \neq \omega_{0,0}. \end{cases} \quad (30)$$

В этом случае, учитывая, что при большом числе градаций $\hbar \approx 0$ и $1 - \hbar \approx 1$, $\hat{K}_{j,k}$ получает простую физическую интерпретацию. Действительно, если в точке $(0, 0)$ реализовалось значение r , то $\hat{K}_{j,k}$ определяет вероятность обнаружения этой же градации в (j, k) -й точке.

Заметим, что в решениях как системы (3), так и системы (22) числовые значения градации не входят и для них важен только факт их упорядоченности (больше, меньше или темнее, светлее). Это вполне соответствует нашему обычному представлению об изображениях. Для НМИ эти свойства идут дальше. Сравним два изображения: $f(x, y)$ и $F[f(x, y)]$, где $F(z)$ — гладкая возрастающая функция, и проведем квантование их на одинаковое число градаций по следующему правилу:

$$\hat{f} = \bar{f}(j, k)(n-1) / (\max \bar{f}(j, k) - \min \bar{f}(j, k)).$$

Здесь $\bar{f}(j, k)$ подразумевает усреднение по растру цифрующим устройством в окрестности (j, k) -й точки изображения. Поскольку для НМИ λ не зависит от сечения, нормированные корреляционные функции для обоих изображений будут совпадать. Таким образом, $\hat{K}_{j,k}$ для НМИ выступает инвариантом по отношению к нелинейным преобразованиям снимка.

В заключение заметим, что в рамках настоящей работы мы не попытались дать решение задач по обработке изображений, предложенная модель изображений вырабатывает только подход к постановкам. Задачи обработки и кодирования будут рассмотрены отдельно.

Поступила в редакцию 4 ноября 1980 г.