

7. Коллонтай, Харконен. Цифровая линеаризация результатов измерений.— Электроника, 1968, № 5.
8. Schlaepfli H. P. A Formal Language for Describing Machine Logic Timing and Sequencing (LCTIS).— IEEE Trans on Elec. Comp. Eng., 1964, p. 439—448.
9. Chu Y. An Algol-Like Computer Design Language.— Comm. of ACM., 1967, p. 607—615.
10. Чу Я. Организация ЭВМ и микропрограммирование. М.: Мир, 1975.

Поступило в редакцию 27 ноября 1979 г.

УДК 681.325 : 621.376

Р. Р. ХАМИТОВ  
(Москва)

### ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРИ ВЫБОРЕ ПРИЗНАКОВ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

При реализации на ЭВМ системы распознавания с большой размерностью вектора наблюдений  $N_0$  желательно иметь возможно меньшее число признаков. Поэтому важное значение имеет такое преобразование исходного пространства наблюдений, которое дало бы возможность проводить классификацию в пространстве признаков меньшей размерности  $N \ll N_0$  без существенной потери в точности системы.

Пусть  $X$  есть последовательность  $1 \times N_0$  случайных векторов наблюдений, искаженных аддитивным гауссовым шумом и принадлежащих к одному из классов (эталонных образов)  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). При этом математическое ожидание

$$\bar{X} = \omega_i, \quad X \in \omega_i, \quad (1)$$

и ковариационная матрица

$$\overline{(X - \omega_i)(X - \omega_i)^T} = K_i, \quad X \in \omega_i \quad (2)$$

( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $t$  — операция транспонирования.

В [1] показано, что при байесовом классификаторе и равных ковариационных матрицах  $K_i = K$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) оптимальной с точки зрения минимизации верхней границы вероятности ошибочной классификации является модификация известного преобразования Карунена — Лозва, базис которого строится из собственных векторов матрицы  $K^{-1}A$ , где матрица

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(\omega_i) p(\omega_j) (\omega_i - \omega_j)(\omega_i - \omega_j)^T \quad (3)$$

определяется расположением средних векторов классов,  $p(\omega_i)$  — априорная вероятность классов.

Ясно, что расчет собственных векторов матрицы  $K^{-1}A$  — трудоемкая задача даже при не слишком значительных  $N_0$ . Поэтому реализация указанного преобразования весьма затруднительна. Этим объясняется то, что на практике чаще применяются не оптимальные, но быстрые преобразования Фурье, Адамара — Уолша, Хаара и т. п.

Однако, проделав несложные линейные преобразования, можно показать, что оптимальное в указанном смысле преобразование  $Q$ , которое формируется из собственных векторов  $K^{-1}A$ , представляется в таком виде:

$$Q = CS^{-1/2}B. \quad (4)$$

В этом выражении строки матрицы  $B$  являются собственными векторами матрицы  $K$ ;  $S$  — диагональная матрица, элементы которой есть собственные значения  $K$ , а строки матрицы  $C$  — собственные векторы матрицы

$$D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(\omega_i) p(\omega_j) (\mu_i - \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^T, \quad (5)$$

где  $\mu_i = S^{-1/2}B\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Таким образом, преобразование  $Q$  можно осуществить в следующей последовательности:

- 1) определяются векторы  $X_i - \omega_i$ ;
- 2) в соответствии с выражениями (П4), (П5) рассчитываются собственные зна-

- чения и собственные векторы матрицы  $K$ , из которых формируются матрицы  $B$  и  $S^{-1/2}$ ;
- 3) эталонные образцы  $\omega$  преобразуются в  $\mu = S^{-1/2}B\omega$ ;
  - 4) определяются векторы  $\mu_i - \mu_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ );
  - 5) с помощью процедуры (П4) рассчитываются первые  $N$  собственных векторов матрицы  $D$  (5), из которых строится матрица  $C$ ;
  - 6) искомая  $N \times N_0$  матрица преобразования  $Q$  определяется по формуле (4).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Итерационная процедура для нахождения собственных векторов ковариационных матриц случайных векторов.* Пусть  $\Psi_j$  — собственные векторы матрицы

$$K = \overline{XX^T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i, \quad (\text{П1})$$

которая определяется по выборке из  $n$  случайных векторов  $X$ , причем принято, что  $\overline{X} = 0$  (общность при этом не теряется).

В [2] показано, что если  $K_n$  представляет последовательность независимых, одинаково распределенных матриц, а  $\overline{K_n} = K$ , где  $K$  — симметрическая положительная матрица, то при  $|\overline{K}|^2 < \infty$ ,  $(\overline{\Psi_1}, \overline{\Psi_{\max}}) > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$   $\Psi_n$ , определяем

мый итерационной процедурой

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \gamma_n [K_n \Psi_n - (K_n \Psi_n, \Psi_n) \Psi_n / (\Psi_n, \Psi_n)], \quad (\text{П2})$$

стремится к  $\Psi_{\max}$  с вероятностью единица ( $\Psi_n$  — последовательность случайных векторов;  $n$  — номер итерации;  $\Psi_{\max}$  — собственный вектор матрицы  $K$ , соответствующий максимальному собственному значению  $\lambda_{\max}$ ).

Кроме того, с вероятностью единица

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(K_i, \Psi_i, \Psi_i)}{(\Psi_i, \Psi_i)} \rightarrow \lambda_{\max} \quad (\text{П3})$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Принимая во внимание (П1), перепишем выражения (П2), (П3) в таком виде:

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \gamma_n \left[ X_n (X_n^T, \Psi_n) - \frac{(X_n, \Psi_n)^2}{\Psi_n^2} \Psi_n \right], \quad (\text{П4})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i, \Psi_i)^2}{\Psi_i^2} \rightarrow \lambda_{\max} \quad (\text{П5})$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Соотношение (П4) дает возможность рекуррентно определять последовательность случайных векторов, сходящихся к собственному вектору матрицы  $K$ , соответствующему собственному значению  $\lambda_{\max}$ , не вычисляя самой матрицы. При этом  $\lambda_{\max}$  рассчитывается по формуле (П5).

В [3] показано, что, используя процесс ортогонализации, т. е. применяя описанную процедуру к вектору

$$Z = X - (X, \Psi_{\max}) \Psi_{\max},$$

с вероятностью единица можно получить последовательность уменьшающихся по величине собственных значений с соответствующими им собственными векторами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Babu С. С. On Feature Extraction in Pattern Recognition.— In: Proc. 5-th Hawaii Internat. Conf. on System Science. Honolulu. Holliwood. Calif, 1972. p. 20—23.
2. Красулина Т. П. Метод стохастической аппроксимации для определения наибольшего собственного числа математического ожидания случайных матриц.— Автоматика и телемеханика, 1970. № 2.
3. Benzecri J. P. Approximation Stochastique dans une Algebre Normée non Commutative — Bull. Soc. Math. France, 1969—1970, vol. 97, N 3, p. 225—241.

Поступило в редакцию 28 мая 1979 г.;  
окончательный вариант — 13 декабря 1980 г.