

5. Grenot M., Pergale I., Donjon I., Marie G. New Electro-Optic Light Valve Device for Image Storage and Processing.— Appl. Phys. Lett., 1972, vol. 21, p. 83.
6. Дун А. З. и др. Фотоэлектрооптический преобразователь на основе охлаждаемого кристалла  $KD_2PO_4$  и селенового фотослоя.— Электрон. техника. Сер. 4. Электронно-вакуумные и газоразрядные приборы, 1978, вып. 7, с. 71.
7. Нежевенко Е. С., Потатуркин О. И., Хоцкий В. И. Распознавание изображений в дифракционных корреляторах интенсивности.— В кн.: Применение методов оптической обработки информации и голографии. Л.: изд. ЛИЯФ, 1980, с. 74.
8. Frieser H. Photographic Information Recording.— L.— N.Y., Focal Press. Ltd., 1975.

Поступила в редакцию 4 октября 1981 г.

УДК 534.2

Л. Д. ГИК  
(Новосибирск)

### ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ И АМПЛИТУДНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА КАЧЕСТВО ИЗОБРАЖЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ

Во всех практических случаях получения неоптических голограмм неизбежны фазовые и амплитудные погрешности. Их причиной являются ошибки расположения точек приема и излучения, влияние контакта датчика со средой, искажающие факторы аппаратуры, дискретность квантования при вводе в ЭВМ и другие факторы. Дать общие оценки действия этих погрешностей на все возможные случаи голографирования едва ли возможно, так как в некоторых частных ситуациях зависимости принимают весьма специфическую форму. Примером может быть случай расположения объекта на малом расстоянии от голограммы в сравнении с ее собственными размерами. Ниже делается попытка, абстрагируясь от влияния второстепенных факторов во имя простоты и наглядности конечного результата, произвести оценку для наиболее типичных случаев практики.

Рассмотрим схему голографирования, показанную на рис. 1. Источник зондирующего сигнала гармонической формы  $I$  и группа из  $N$  приемников расположены в плоскости наблюдения  $\Gamma$ . Примем, что объект  $O$  расположен под источником на расстоянии от  $\Gamma$ , значительно превышающем удаление приемника от источника. Примем также, что удаления различных точек объекта от плоскости  $\Gamma$  имеют один порядок. Тогда результат восстановления голографического изображения можно приближенно представить не в виде интеграла Кирхгофа от зарегистрированного поля\*, а в виде суммы

$$F_i = \sum_i^N U_i^{(i)}. \quad (1)$$

Здесь символом  $U_i^{(i)}$  обозначен сигнал, зарегистрированный  $i$ -м приемником и приведенный по фазе к точке  $A_i$  (введена временная поправка на запаздывание при движении зондирующего сигнала по траектории  $IA_i\Pi_i$ ).

Будем считать, что при отсутствии амплитудных и фазовых ошибок изображение восстанавливается правильно. Под этим подразумеваются два условия. Во-первых, если на объекте имеется отражающий участок  $A_i$ , посылающий на приемники  $\Pi_i$  сигнал, превышающий некоторый порог

\* Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография.— М.: Мир, 1973.

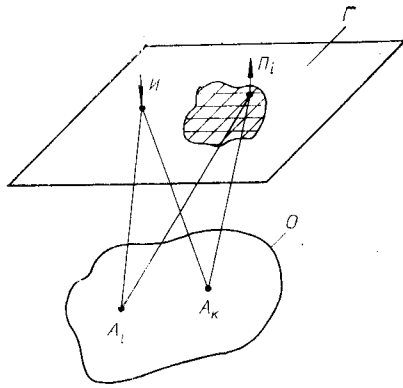


Рис. 1.

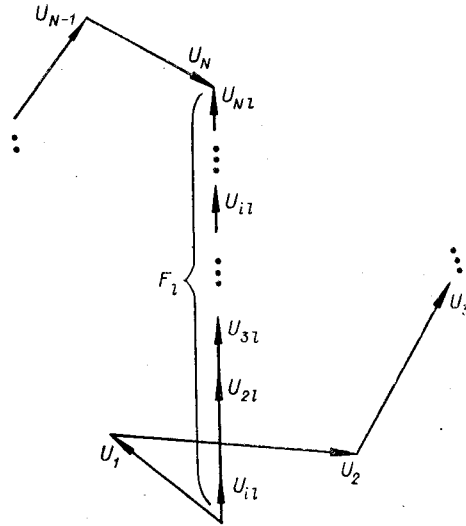


Рис. 2.

чувствительности ( $U_{ii} > U_{\min}$  для всех  $i$ ), то

$$\sum_i^N (U_i^{(l)} - U_{il}^{(l)}) \ll \sum_i^N U_{il}^{(l)}. \quad (2)$$

Это означает, что различные участки отражающей поверхности объекта не должны влиять на изображения соседних участков. Во-вторых, если имеется участок поверхности  $A_k$  размерами не менее некоторых пороговых размеров, отражение от которого отсутствует, то должно выполняться неравенство

$$F_k = \sum_i^N U_{ik} < F_l = \sum_i^N U_{il}. \quad (3)$$

Это фактически есть условие разрешения, позволяющее по восстановленному изображению выяснить наличие или отсутствие отражающего объекта в данной точке пространства. Воспользуемся комплексным представлением гармонической функции в векторном виде  $\mathbf{U} = U \exp(j\psi)$ . Параметр  $\mathbf{U}$  будем представлять в виде вектора длиной  $U$ , повернутого на угол  $\psi$  относительно исходного направления, в качестве которого прием направление вектора сигнала, излучаемого источником. Тогда результат восстановления  $\mathbf{F}_l = \sum_i^N \mathbf{U}_{il}^{(l)}$  изобразится в виде суммы  $N$  коллинеарных векторов, как показано на рис. 2. Коллинеарность достигается автоматически в результате приведения фазы вектора  $\mathbf{U}_i$  к точке пространства  $A_l$ . Следствием коллинеарности является то, что модуль суммы равен сумме модулей  $|\mathbf{F}_l| = \sum_i^N U_{il}^{(l)}$ .

Однако векторы полного сигнала  $\mathbf{U}_i^{(l)}$  для сложного объекта оказываются ориентированными в пространстве так, что вероятность их поворота на любой угол в интервале  $\pm\pi$  примерно равна. Это означает равновероятность любого значения угла  $\psi_i^{(l)}$  для вектора  $\mathbf{U}_i^{(l)}$ . Здесь символ  $\psi_i^{(l)}$  используется для обозначения приведенного угла. Действительно, если условие сложности трактовать как  $U_{ii} \ll U_i$  (доля энергии, отраженной элементом  $A_i$ , мала в сравнении с долей энергии, отраженной всей поверхностью объекта), то из этого обязательно следует  $\sum_i^N |\mathbf{U}_i^{(l)}| \gg \gg \left| \sum_i^N U_i^{(l)} \right|$ , что возможно только в том случае, когда повороты векто-

ров в среднем взаимно противоположны, а это есть условие отсутствия преобладающего направления для вектора  $U_i^{(l)}$ , которое можно выразить так:

$$\sum_i^N U_i \cos \psi_i^{(l)} \ll \sum_i^N U_i, \quad \sum_i^N U_i \sin \psi_i^{(l)} \ll \sum_i^N U_i. \quad (4)$$

Оценивая действие амплитудных  $w$  и фазовых  $\varphi$  погрешностей, примем следующую форму выражения сигнала, зарегистрированного некоторым  $i$ -м приемником на голограмме:

$$U(w, \varphi) = (U + w) \exp [j(\psi + \varphi)]. \quad (5)$$

В этом случае и  $F_l$ , и  $F_k$  становятся случайными величинами. Поэтому условие (3) должно быть изменено:

$$p(F_l > F_k) \ll 1, \quad (6)$$

т. е. вероятность  $p$  того, что сумма  $F_l$  превысит сумму  $F_k$ , должна быть малой.

Сначала рассмотрим действие только фазовых искажений  $\varphi$ , пренебрегая амплитудными  $w$ . Примем для  $\varphi$  равномерную плотность распределения вероятностей в интервале от  $-\varphi_0$  до  $+\varphi_0$ . Такие ошибки возникают, например, из-за конечности диапазона квантования при вводе сигнала в ЭВМ.

Оценку вероятности  $p(F_l > F_k)$  можно сделать, используя математическое ожидание и дисперсию величин  $F_l$  и  $F_k$ , а также закон распределения плотности вероятности этих величин. Определить математическое ожидание некоторого вектора  $U$  можно по математическим ожиданиям его косинусной  $U_c = U \cos \psi$  и синусной  $U_s = U \sin \psi$  компонент. Естественно, что это можно осуществить применительно к любой системе координат (любому началу отсчета для  $\psi$ ). Примем  $\psi = 0$ . Тогда математическое ожидание компонент  $M(U_c)$  и  $M(U_s)$  представим в виде

$$\left. \begin{aligned} M(U_c) &= \frac{1}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi U \cos \varphi = U \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}, \\ M(U_s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из (7) следует, что фазовая ошибка не изменяет направления среднего значения вектора по отношению к исходному (имеющему место при отсутствии фазовой ошибки), но уменьшает модуль среднего значения. Это уменьшение оказывается сравнительно малым, пока  $\varphi_0$  не превышает  $\pi/2$ , и начинает резко возрастать при приближении  $\varphi_0$  к  $\pi$ . График выражения (7) показан на рис. 3.

Если результат восстановления изображения объекта при наличии фазовых ошибок представлять подобно рис. 2 средними значениями случайных векторных величин, то из изложенного выше следует, что изображение будет получаться геометрически подобным тому, которое существует в отсутствие фазовых ошибок, причем коэффициент подобия оказывается равным:  $K = M(U)/U = \sin \varphi_0/\varphi_0$ . Отсюда следует, что

$$M(F_l) = F_l (\sin \varphi_0/\varphi_0), \quad (8)$$

$$M(F_k) = 0. \quad (9)$$

При определении дисперсии интересующей нас суммы (1) фазовые ошибки  $\varphi_i$  в различных каналах будем считать независимыми друг от друга. Этому условию соответствуют погрешности, вызываемые ошибками в расположении приемного датчика, погрешности из-за конечности интервала квантования при отсутствии регулярности сети приемных точек наблюдения. При таком допущении дисперсия суммы  $D(F)$  равна сумме

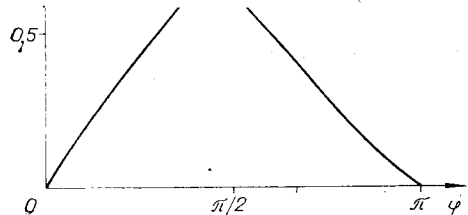


Рис. 3.

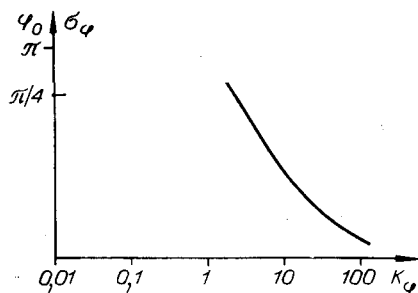


Рис. 4.

дисперсий слагаемых. Поэтому

$$D(F) = \sum_i^N \frac{1}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi [U_i(\varphi) - M(U_i)]^2. \quad (10)$$

Выражая сигнал  $U$  его косинусной и синусной компонентами, получаем

$$D(U) = \frac{1}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \left[ \left( U \cos \varphi - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)^2 + (U \sin \varphi)^2 \right] = U^2 \left( 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right). \quad (11)$$

Значение  $\sigma_0 = \sqrt{D(U)}/U$  представлено графически на рис. 3. Как видно, при изменении  $\varphi_0$  от 0 до  $\pi$  величина  $\sigma_0$  практически линейно растет от нуля до единицы — своего максимального значения. Из (11) и (10) имеем

$$D(F) = \sigma_F^2 = \left( 1 - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \sum_i^N U_i^2. \quad (12)$$

Теперь можем обратиться к соотношению (6). Для его осуществления требуется выполнение условия

$$M(F_l) - M(F_k) > \eta \sigma_F. \quad (13)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент запаса, который в приложениях теории ошибок, где случайные величины обычно распределены по нормальному закону, принимается в пределах от  $\eta = 2$  (вероятность ошибки 5%) до  $\eta = 3$  (вероятность ошибки 0,3%).

При выполнении условия (4) закон распределения  $F_l$  и  $F_k$  при большом  $N$  близок к нормальному. Поэтому в первом приближении можно пользоваться теми же рекомендациями для выбора  $\eta$ .

Подставляя в (13) соответствующие значения  $\sqrt{D(F)}$ ,  $M(F_l)$  и  $M(F_k)$ , получаем условие допустимой фазовой ошибки, при выполнении которого  $l$ -й элемент объекта может быть выделен на фоне всего изображения:

$$\frac{\sin \varphi_0 / \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0 / \varphi_0} = K_\varphi > \frac{\eta^2 \sum_i^N U_i^2}{\left( \sum_i^N U_{il} \right)^2}. \quad (14)$$

Зависимость  $\varphi = \varphi(K_\varphi)$  представлена графически на рис. 4, где допусти-

мый фазовый сдвиг  $\varphi$  выражен в двух масштабах: интервала  $\varphi_0$  и средне-квадратической величины

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \varphi^2}.$$

Как видно, допустимый уровень фазовой ошибки с ростом  $K_\varphi$  плавно уменьшается от предельной величины  $\varphi_0 \rightarrow \pi$  ( $\sigma_\varphi \rightarrow 0,6\pi$ ) при  $K_\varphi < 1/10 \div 1/3$  до  $\varphi_0 \rightarrow 0$  ( $\sigma_\varphi \rightarrow 0$ ) при  $K_\varphi > 3 \div 10$ .

Условие (14) можно также трактовать как функцию, выражающую зависимость максимально необходимого числа приемных элементов на голограмме от двух аргументов: фазовой ошибки и отношения средней мощности сигнала, попадающего на голограмму, к мощности сигнала от того элемента, восстановить который требуется. Покажем это на примере восстановления изображения рассеивающего объекта. Пусть объект представляет собой совокупность из  $n$  дифрагирующих элементов, расположенных в пространстве без видимой закономерности (взаимная корреляция фазы отраженных сигналов близка к нулю). Чтобы не вводить ненужных усложнений, примем, что все отражатели посылают на каждый элемент голограммы равные по уровню сигналы  $U_i = U_0$ , а фазовые соотношения имеют некоррелируемые между собой сдвиги (типичный случай, когда рассеивающий объект расположен под источником на расстоянии, значительно превышающем размеры голограммы и ее удаление от источника). В этом случае  $U_i^2 = nU_0^2$  и, следовательно,

$$\sum_i^N U_i^2 = nNU_0^2, \quad (15)$$

$$\sum_i^N U_{ii}^{(1)} = NU_0. \quad (16)$$

Подставляя эти соотношения в (14), получаем

$$N > \eta^2 n / K_\varphi. \quad (17)$$

Из (17) видно, что при одном и том же значении фазовой ошибки число приемных элементов устройства голографирования  $N$  должно увеличиваться пропорционально числу  $n$ , характеризующему сложность объекта. Поэтому для характеристики голографирующего устройства удобно ввести параметр минимально необходимого числа приемных элементов  $N_0 = N/n = \eta^2 / K_\varphi$ , показывающий, во сколько раз число приемников на голограмме должно превышать число элементов на объекте, подлежащих разрешению. Практически это число может изменяться от  $N_0 = 200$  (при  $\eta = 3$  и  $K_\varphi = 1/10$ ) до  $N_0 = 1 \div 2$  (при  $\eta = 2$  и  $K_\varphi = 4 \div 8$ ). Уменьшение  $K_\varphi$  менее  $\sim 1/10$  ничего не дает в увеличении допустимой погрешности  $\varphi_0$ , ибо последняя уже приближается к своему пределу  $\varphi_0 = \pi$ . Увеличение  $K_\varphi$  более  $4 \div 8$  едва ли реально, так как обеспечение точных фазовых измерений (с погрешностью менее  $\varphi_0 = \pi/10$ ) связано с неоправданными аппаратными усложнениями.

Для того чтобы нагляднее проследить закономерности, выражаемые соотношением (17), целесообразно использовать приближенную аналитическую зависимость  $\varphi = \varphi(K_\varphi)$ , что позволит не обращаться к графику рис. 4. Это можно сделать, используя разложение  $K_\varphi = K_\varphi(\varphi)$  в степенной ряд в окрестности трех характерных значений параметра  $K_0 = \eta^2(n/N)$  ( $K_0 \ll 1$ ,  $K_0 \sim 1$  и  $K_0 > 1$ ):

$$\sqrt{K_\varphi} = \begin{cases} \pi/\varphi - 1 & \text{при } K_0 \ll 1 \text{ (или } n \ll N), \\ \pi/2 & \text{при } K_0 \sim 1 \text{ (или } n \sim N), \\ \sqrt{6}/\varphi & \text{при } K_0 > 1 \text{ (или } n \sim N). \end{cases}$$

Используя это приближение, можно аналитически выразить допустимый уровень фазовых искажений как функцию надежности выделения объекта ( $\eta$ ), сложности объекта ( $n$ ) и информативности голограммы ( $N$ ):

$$\varphi < \begin{cases} \pi/(1 + \eta \sqrt{N/n}) & \text{при } K_0 \ll 1, \\ \pi/2 & \text{при } K_0 \sim 1, \\ (\sqrt{\delta}/\eta) \sqrt{n/N} & \text{при } K_0 > 1. \end{cases}$$

Важное практическое значение может иметь взаимосвязь допустимой фазовой ошибки  $\varphi_0$  и числа приемных элементов на голограмме  $N$ . Действительно, из изложенного выше следует, что увеличение  $N$  может в определенных пределах компенсировать наличие  $\varphi_0$ . На это следует ориентироваться, если снижение  $\varphi_0$  принципиально невозможно. Такая ситуация имеет место, например, тогда, когда фазовая ошибка связана с изменением скорости звука в среде, вмещающей объект.

Анализируя действие амплитудных погрешностей  $w$ , фазовыми  $\varphi$  в выражении (5) будем пренебрегать. Будем считать амплитудные погрешности в различных каналах не коррелированными друг с другом, как это обычно и имеет место. Тогда и здесь дисперсия суммы сигналов  $N$  каналов будет равна сумме дисперсий отдельных каналов  $D(U_i)$ . Поскольку математическое ожидание суммы всегда равно сумме математических ожиданий слагаемых, то условие возможности выделения интересующего нас объекта, определяемое выражением (13), в данном случае может быть выражено

$$\sum_i^N M(U_{ii}) > \eta \sqrt{\sum_i^N D(U_i)}. \quad (18)$$

Из выражения (18) можно заключить, что (как и в случае фазовых ошибок) надлежащим выбором числа точек наблюдения на голограмме  $N$  можно компенсировать действие и амплитудных погрешностей  $w$ . Покажем это на примере рассмотренной ранее модели удаленного рассеивающего объекта. Здесь значение полезного сигнала (левая часть неравенства (18)) совпадает с выражением (16), а уровень помех (правая часть) можно выразить в виде

$$\eta \sqrt{\sum_i^N D(U_i)} = \eta \sqrt{\sum_i^N w_i^2} = \eta \delta \sqrt{\sum_i^N U_i^2},$$

где  $\delta = \sqrt{\sum_i^N D(U_i) / \sum_i^N U_i^2}$  — отношение среднеквадратической ошибки сигнала к его истинной величине. Тогда выражению (18) можно придать вид  $N > \eta^2 \delta^2 n$ .

Последнее выражение позволяет сделать такие выводы. Если в трактах прохождения голографического сигнала приняты даже самые элементарные меры обеспечения линейности и стабильности, то действием амплитудных погрешностей можно пренебречь. Действительно, в датчиках, усилителях и других элементах аппаратуры суммарные погрешности практически не бывают более  $\delta = 1/\eta = 1/3 \div 1/2$ , а  $N$ , как указано выше, в голографии приходится брать более  $n$ .

Если же имеет место  $N \gg n$ , что иногда выполняется в реальных голографических системах, то пропорционально  $\eta \sqrt{N/n}$  можно увеличивать погрешность  $\delta$ . Это фактически означает, что при  $N \gg n$  информацией об амплитуде принятого сигнала можно пренебречь, используя во всех каналах ее среднеквадратическое значение. Если при этом еще допускается условие  $\varphi_0 > \pi/2$ , то можно применять знаковое (двоичное) кодирование принятой информации. Такой способ кодирования позволяет существенно упростить голографическую аппаратуру.

Поступила в редакцию 6 марта 1981 г.