

## ЛИТЕРАТУРА

1. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия.— М.: Мир, 1978.
2. Serra J. Lectures on Image Analysis by Mathematical Morphology.— Fontainebleau, Juillet, 1976, N-475.
3. Serra J. Summer School in Mathematical Morphology.— Fontainebleau, June, 1981, C-91.

Поступило в редакцию 23 февраля 1982 г.

УДК 621.382

А. Г. ЕРМОЛАЕВ  
(Москва)

### ОПТИМИЗАЦИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Под идентификацией изображений будем понимать следующую задачу морфологического анализа: пусть известен набор «идеальных» изображений, определяющих форму [1] эталонов и представляющих собой кусочно-постоянные функции, заданные на поле зрения  $X$ :

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^m c_{in} \chi_{ni}(x) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где  $\{\chi_{ni}(x), i = 1, \dots, m\}$  — набор индикаторных функций подмножеств поля зрения  $X = \bigcup_{i=1}^m A_{ni}$  ( $A_{ni} \cap A_{nj} = \emptyset, i \neq j$ );  $c_{in}$  — некоторые константы, характеризующие «яркость» изображения  $\varphi_n(x)$  на множестве  $A_{ni} \subset X$ . Для идентификации предъявляется изображение  $\psi(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{ki}(x) + v(x)$ . Здесь  $c_i$  — вообще говоря, другие постоянные,  $v(x)$  — некоррелированный гауссов шум с известными моментами  $E v(x) = 0$  и  $D v(x) = \sigma_0^2$ . По наблюдаемому изображению  $\psi(x)$  необходимо определить, каким «идеальным»  $\varphi_n(x)$  оно порождено. Решающее правило, минимизирующее среднее число ошибок идентификации [2], предписывает высказываться в пользу изображения с номером  $k$ , если выполнено условие

$$\|\psi(x) - P_k \psi(x)\| < \|\psi(x) - P_n \psi(x)\|, \quad k \neq n. \quad (2)$$

Морфологический оператор  $P_n$  определяется формулами

$$P_n \psi = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{ni}; \quad c_i = (\psi, \chi_{ni}) / \text{mes } A_{ni}. \quad (3)$$

Предположим, что поле зрения  $X$  состоит из  $N$  дискретных точек, тогда  $\varphi, \psi, \chi_{ni}$  будут векторами в  $N$ -мерном евклидовом пространстве  $R_N$ . Определим скалярное произведение  $(\varphi, \psi) = \sum_{x=1}^N \varphi(x) \psi(x)$  и норму  $\|\psi\|^2 = (\psi, \psi)$ .

Несложно подсчитать, что трудоемкость вычислений по формулам (2), (3) пропорциональна  $N$ . С другой стороны, практика показывает [2], что помехозащищенность морфологических методов очень высока и увеличивается с ростом  $N$ . Поэтому имеет смысл поставить задачу об оптимальном выборе  $N$ , гарантирующем заданное среднее число верных идентификаций в серии испытаний. Будем решать эту задачу для набора из двух эталонных изображений ( $n = 1, 2$  в (1)) с индикаторными функциями  $\{\chi_i(x)\}$  и  $\{\tilde{\chi}_i(x)\}, i = 1, \dots, m$ , которые по формуле (3) определяют операторы  $P$  и  $\tilde{P}$  соответственно. Тогда, если  $\psi(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_i(x) + v(x)$ , то величина  $\xi_1 = \|\psi - P\psi\|^2 / (N - m)$  будет случайной величиной, контролируемой распределением Пирсона с  $N - m$  степенями свободы, математическим ожиданием  $\sigma_0^2$  и дисперсией  $2\sigma_0^4 / (N - m)$ .  $\xi_2 = \|\psi - \tilde{P}\psi\|^2 / (N - m)$  также контролируется распределением Пирсона с тем же числом степеней свободы, но со смещением

$$\delta = \sum_{i=1}^m (c_i^2 \tau_i - \tilde{c}_i^2 \tilde{\tau}_i) / (N - m),$$

где  $\tilde{c}_i = \sum_{k=1}^m c_k (\chi_k, \tilde{\chi}_i) / \tilde{\tau}_i$ ,  $\tilde{\tau}_i = \sum_{k=1}^m (\chi_k, \tilde{\chi}_i)$  и  $\tau_i = \sum_{k=1}^m (\chi_i, \tilde{\chi}_k)$ .

При достаточно большом  $N$  (точнее, при  $N - m \rightarrow \infty$ )  $\xi_1$  и  $\xi_2$  сходятся по распределению к нормальным величинам с математическими ожиданиями  $\mu_1 = \sigma_0^2$ ,  $\mu_2 = \sigma_0^2 + \delta$  и дисперсиями  $\sigma_1^2 = 2\sigma_0^4/(N - m)$ ,  $\sigma_2^2 = 2(\sigma_0^4 + 2\sigma_0^2\delta)/(N - m)$  соответственно.

Предположим, что  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы. Это соответствует ситуации, в которой задача идентификации решается с реальными объектами, т. е. внешней памятью решающего устройства является сам объект или его отображение на экране. Тогда шум  $v$  будет зависеть еще и от времени (от момента обработки), и в предположении стационарности шума  $E v(t, x') v(t + \Delta t, x'') = 0$  при некотором  $\Delta t > t_0$  и для всех  $x', x'' \in X$ .

Вероятность выполнения (2) или эквивалентного ему неравенства  $\xi_1 < \xi_2$  характеризует среднее относительное число верных решений в серии испытаний:

$$P\{\xi_1 < \xi_2\} = \iint_{y_1 < y_2} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (4)$$

где  $p(y_1, y_2)$  — плотность совместного распределения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Используя асимптотическую нормальность  $\xi_1$  и  $\xi_2$  и введя дополнительные переменные  $\theta = \delta/\sigma_0^2$ ,  $e_1 = \mu_1/(\sqrt{2}\sigma_1) = \sqrt{N - m}/2$ ,  $D = \sigma_2/\sigma_1 = \sqrt{1 + 2\theta}$ ,  $e_2 = \mu_2/(\sqrt{2}\sigma_2) = (1 + \theta)\sqrt{N - m}/(2D)$ , при достаточно большом  $N - m$  получим

$$P\{\xi_1 < \xi_2\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-(z - e_2)^2) (\operatorname{erf}(Dz - e_1) + \operatorname{erf} e_1) dz. \quad (5)$$

Таким образом, вероятность (4) является функцией двух параметров  $N - m$  и  $\theta = \delta/\sigma_0^2$ , первый из которых характеризует трудоемкость вычислений по формулам (2), (3), а второй может быть интерпретирован как отношение энергии полезного сигнала к энергии шума, так как  $\delta$  характеризует «непохожесть» двух сравниваемых эталонов,  $P\{\xi_1 < \xi_2\} = P\{\xi_1 > \xi_2\} = 1/2$  при  $\theta = 0$ .

Итак, задача оптимизации состоит в том, чтобы указать минимальное число  $N$ , такое, что при заданном уровне значимости  $\alpha$  и уровне шума  $\theta$  величина относительного количества ошибок  $1 - P\{\xi_1 < \xi_2\}$  была бы меньше  $\alpha$  при известном  $m$ .

Выражение (5) в общем виде поддается лишь численному исследованию. На рисунке показаны графики зависимости разности  $N - m$  от отношения сигнал/шум  $\theta$ , полученные в результате численных расчетов по описанной модели на ЭВМ БЭСМ-6 для различных  $\alpha$ , где  $N$  — оптимальное число точек, считываемых с поля зрения,  $m$  — количество множества постоянной яркости (масштаб полулогарифмический). Прокомментируем результаты. Каков же реальный выигрыш от оптимизации?

Возьмем, например, кривую, соответствующую  $\alpha = 0,05$ . Даже при отношении сигнал/шум 0,2 для правильной идентификации с вероятностью 0,95 достаточно взять 325 точек. Это означает, что если изображение задается матрицей размером  $130 \times 125$ , содержащей 16 250 точек, то трудоемкость вычислений может быть уменьшена в 50 раз, при этом будет наблюдаться не более 5% ошибочных решений. При отношении сигнал/шум  $\theta = 2$  величина  $N - m$  ограничена снизу только рамками модели, предполагающей нормальность  $\xi_1$  и  $\xi_2$  (как правило, это верно уже при  $N - m > 10$ ). В этом случае трудоемкость уменьшается в 1625 раз.

Можно получить и аналитические оценки для оптимального режима идентификации. Для этого зададимся точностью вычислений  $\varepsilon$  и найдем число  $M_0$  такое, что  $1 - \operatorname{erf} M \leq \varepsilon$  при  $M \geq M_0$ . Тогда

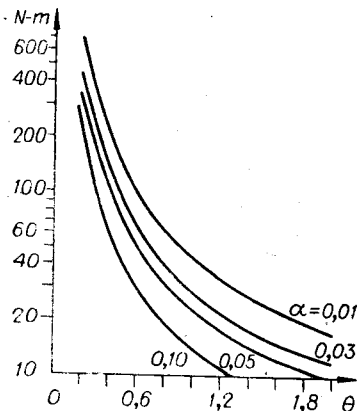
$$N - m \geq 8M_0^2(1 + \theta + \sqrt{1 + 2\theta})/\theta^2, \quad (6)$$

и при этом  $\alpha = O(\varepsilon)$ . Формулой (6) удобно пользоваться, когда заданное значение  $\alpha$  достаточно мало:  $\lg \alpha < -10$ , т. е. требуется практически безошибочная идентификация. Из (6) следует асимптотика:  $N - m \geq 8M_0^2/\theta$  при  $\theta \rightarrow \infty$  и  $N - m \geq 16M_0^2/\theta^2$  при  $\theta \rightarrow 0$ . Следует отметить, что  $M_0 \approx 6$  для значений  $\varepsilon$  и  $\alpha$  порядка машинного нуля.

Для сравнения полученных результатов были проведены контрольные серии из 100 идентификаций реальных изображений с  $N=210$ ,  $m=5$  при различных отношениях сигнал/шум:  $0,2 \leq \theta \leq 0,4$ .

При этом наблюдаемое количество ошибок всегда находилось в предсказанных теоретически пределах. Характерно, что уже при  $\theta \geq 0,28$  алгоритм идентификации работал вообще без ошибок (расчет гарантировал не более 3% ошибок в серии).

Автор глубоко признателен проф. Ю. П. Пытьеву за полезные обсуждения и внимание к работе.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. Морфологический анализ изображений.— ДАН, 1975, т. 224, № 6.
2. Пытьев Ю. П., Текин В. В., Терентьев Е. Н. Сравнительный анализ некоторых решающих алгоритмов на ЦВМ.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 4.

Поступило в редакцию 23 июля 1981 г.

УДК 681.3.06 : 519

Ю. М. КРЕНДЕЛЬ, З. Б. КРУГЛЯК  
(Новосибирск)

### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ДВУХТАКТНОГО РЕЖИМА БУФЕРИЗАЦИИ

При создании автоматизированных систем необходимо решать задачу согласования входных параметров системы (таких, как число абонентов, интенсивность и характер потоков информации от абонентов и т. д.) с ресурсами, выделяемыми в системе для целей сбора и обработки информации. На результаты решения этой задачи определенное влияние оказывает выбор способа буферизации входной информации.

Среди различных способов буферизации в автоматизированных системах наиболее распространенным является способ организации двухтактного режима, который предполагает выделение двоекратного объема для каждого источника информации [1]. Использование в системах в качестве процессора переднего края микро-ЭВМ [2] накладывает дополнительные ограничения на количество и объемы двоекратных буферов для целей буферизации и заставляет искать пути экономного расходования памяти микро-ЭВМ.

В данной работе предлагается метод расчета объемов двоекратных буферов по критерию минимума потерь информации. С этой целью исследуется одна модель массового обслуживания, которая в общем случае может быть описана следующим образом.

На вход одноканальной системы обслуживания поступают потоки требований от  $N$  источников. Для требований  $i$ -го источника в системе предусмотрен двоекратный буфер объемом  $2 \times G_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ;  $0 < G_i < \infty$ ). Требования, поступающие в систему от  $i$ -го источника, размещаются в том буфере  $G_i$  двоекратного буфера  $2 \times G_i$ , в котором имеется хотя бы одно требование. Если в обоих буферах  $G_i$  требования отсутствуют, то поступившее требование размещается в любом из двух буферов  $G_i$ . Когда число требований в двоекратном буфере  $i$ -го источника достигает величины  $G_i$  (т. е. один буфер  $G_i$  оказывается загруженным полностью), выдается запрос на обслуживание этого буфера  $G_i$ . При этом требования, поступающие от  $i$ -го источника, будут размещаться в другом буфере  $G_i$  данного двоекратного буфера, по достижении полной загрузки которого также выдается запрос на его обслуживание.

Таким образом, в системе могут присутствовать один или два запроса от одного источника. Порядок поступления на обслуживание запросов, формируемых указанным образом, а также поведение требований, поступающих от некоторого источника в условиях полной загрузки его двоекратного буфера, могут быть самыми различными, зависящими от принятой дисциплины обслуживания запросов и размещения требований в буферах. Времена обслуживания запросов зависят в общем случае от объемов соответствующих буферов. Для такого рода систем желательно найти соотношения, позволяющие определять объемы двоекратных буферов при заданном уровне потерь требований. Здесь исследуется один частный случай изложенной модели.

Имеется  $N$  статистически независимых источников, каждый из которых посылает в систему простейший поток требований с параметром  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Для каждого источника предусмотрен двоекратный буфер объемом  $2 \times m$  ( $0 < m < \infty$ ). В системе — один обслуживающий прибор. Каждый источник в любой момент времени функционирования системы будем считать принадлежащим к одной из трех групп — 0, 1 или 2. В некоторый момент времени  $t$  источник будет принадлежать группе 0, 1 или 2, если он в этот момент времени не имеет ни одного запроса на обслуживание (группа 0), имеет один запрос на обслуживание (группа 1) или два запроса на обслуживание (группа 2). В системе принята следующая дисциплина обслуживания. Источникам группы 2 присвоен абсолютный приоритет перед источниками группы 1. Внутри каждой группы запросы от источников обслуживаются в порядке поступления. Также в порядке поступления обслуживаются запросы каждого источника. Если в течение обслуживания запроса от некоторого источника группы 1 (в отсутствие источников группы 2) один из оставшихся источников группы 1 перешел в группу 2 (вследствие полной загрузки его второго буфера  $m$ ), обслуживание запроса источника группы 1 прерывается и на обслуживание немедленно поступает запрос от источника группы 2. Запрос, обслуживание которого было прервано, дообслуживается