

Отсюда получим

$$|S_1(-\beta_j - m\eta)| \leq |S_1(-\beta_j - m\eta) - b_0| + |b_0| < r. \quad (\text{П1})$$

Зная число  $N_j$ , положим

$$A_j = \max_{1 \leq n \leq N_j} \left( r^{-n} \prod_{p=1}^n |S_1(-\beta_j - p\eta)| \right). \quad (\text{П2})$$

Из выражений (П1) и (П2) видно, что справедливы оценки

$$\prod_{p=1}^m |S_1(-\beta_j - p\eta)| \leq A_j r^m, \quad m = 1, 2, \dots, N_j, N_{j+1}, \dots \quad (\text{П3})$$

Выберем теперь произвольно малое число  $\delta > 0$  и обозначим через  $Q_{mj}$   $\delta$ -окрестность точки  $(-\beta_j - m\eta)$ :  $Q_{mj} = \{s : |s + m\eta + \beta_j| < \delta\}$ . Пусть  $R_j(\delta)$  есть комплексная плоскость с удаленными областями  $Q_{1j}, Q_{2j}$ . Тогда на  $R_j(\delta)$

$$|s + \beta_j + m\eta| \geq \delta \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (\text{П4})$$

Учитывая неравенства (П3) и (П4), на  $R_j(\delta)$  имеем

$$|f_j(s)| \leq \frac{1}{|\lambda| \delta} \left( 1 + A_j \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|\lambda|} \right)^m \right). \quad (\text{П5})$$

Неравенство (П5) показывает, что в области  $R_j(\delta)$  ряд (9), определяющий функцию  $f_j(s)$ , сходится равномерно. Поэтому по теореме Вейерштрасса функции  $f_j(s)$  аналитичны в  $R_j(\delta)$ . Но так как  $\delta > 0$  — произвольно малое число, то из полученного утверждения следует, что функции  $f_j(s)$  аналитичны на всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов  $-\beta_j - m\eta$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Совершенно аналогично доказывается, что функции  $g_l(s)$  и  $h_k(s)$  аналитичны на всей комплексной плоскости, кроме точек  $-\gamma_l - m\eta$  и  $\nu_k - m\eta$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). В результате получаем, что решение  $W(s)$ , определенное выражением (8), — аналитическая функция на всей комплексной плоскости, за исключением точек (3), которые являются простыми полюсами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цирлин А. М. Учет ограничений на расположение корней характеристического уравнения при расчете систем на минимум среднеквадратичной ошибки. — Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1963, № 1.
2. Цейтлин Я. М. Проектирование оптимальных линейных систем. — М.: Машиностроение, 1973.
3. Зотов М. Г. Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом. — Автометрия, 1972, № 1.
4. Зотов М. Г. Об одном способе определения неизвестных параметров при решении интегральных уравнений операционным методом. — Автометрия, 1975, № 4.

Поступило в редакцию 17 апреля 1981 г.

УДК 681.3.01

Ю. Г. МОРОЗОВ  
(Ленинград)

#### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ХОЛЛОВСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ АВТОМАТИЗАЦИИ

Обработку данных холловских измерений в полупроводниковых материалах можно разделить на два этапа. На первом этапе путем несложных расчетов получают зависимость концентрации носителей заряда от температуры  $n(T)$  или чаще  $\ln n$  ( $1000/T$ ), на втором — по характеру этой зависимости определяют основные параметры, характеризующие структуру запрещенной зоны полупроводника.

Второй этап часто выполняют графически, что, с одной стороны, не всегда обеспечивает необходимую точность, а с другой — неприемлемо в условиях автоматизации. В работе [1] для обработки данных холловских измерений был применен метод наименьших квадратов с использованием в качестве теоретического описания

явления уравнения баланса носителей заряда:

$$F(n, T) \equiv n + N_A - \sum_k \frac{N_{dk}}{1 + nK_k} = 0, \quad (1)$$

где

$$K_k = \sum_l K_k^{(l)}, \text{ а } K_k^{(l)} = g_k^{(l)} h^{3/2} / (2v (2\pi m^* kT)^{3/2}) \exp(E_{dk}^{(l)} / kT).$$

По методу наименьших квадратов определялись параметры  $N_{dk}$ ,  $N_A$ ,  $E_{dk}^{(l)}$ ,  $g_k^{(l)}$ ,  $m^*$ . Обозначения, использованные в формуле (1), полностью совпадают с обозначениями в указанной выше статье.

Однако метод, применяемый в этой работе, имеет ряд существенных недостатков, в частности: неоднозначность определения совокупности искомых параметров, необходимость в достаточно хорошем начальном приближении, большая трудоемкость. Эти недостатки являются следствием неявного вида и неоднозначности соотношения (1) относительно концентрации  $n$ .

Отметим одно важное обстоятельство: в условиях автоматизации, как правило, имеется возможность снимать гораздо больше температурных точек, чем при ручных измерениях. Это обстоятельство дает возможность, используя методы математического сглаживания и численного дифференцирования, по экспериментальной зависимости  $n(T)$  построить зависимость  $n'(T)$ .

С другой стороны, дифференцируя по температуре выражение (1), получим

$$n'(T) = \sum_k \frac{N_{dk} n K_k'}{(1 + nK_k)^2} \bigg/ \left( 1 + \sum_k \frac{N_{dk} K_k}{(1 + nK_k)^2} \right), \quad (2)$$

где  $K_k' = dK_k/dT$ .

Если подставить в (2) вместо  $n$  экспериментальную зависимость  $n(T)$  и применить метод наименьших квадратов, то получается система уравнений относительно искомых параметров, кроме  $N_A$ . Эта система уравнений может быть решена численно с помощью метода Ньютона. В силу того что выражение (1) линейно относительно  $N_A$ , после определения всех остальных параметров оценку для  $N_A$  можно получить, используя соотношение

$$N_A \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_k \frac{N_{dk}}{(1 + n_i K_k)} - n_i \right). \quad (3)$$

Здесь  $N$  — число экспериментальных точек, а  $n_i$  — измеренные значения концентрации.

При реализации метода на ЭВМ необходимо учесть ряд обстоятельств. Во-первых, по аналогии со статьей [1] следует работать не с самими искомыми параметрами, а с их логарифмами, применяя логарифм концентрации. Во-вторых, при использовании метода Ньютона необходимо демифировать добавки к параметрам, причем это приходится делать несколько более жестко, чем в работе [1]; в частности, есть смысл ограничивать добавки сверху по абсолютной величине.

Метод, предложенный выше, был проверен на модельных задачах, а также при обработке реальных данных.

Численное исследование показало, что предложенный метод обладает рядом достоинств по сравнению с методом наименьших квадратов: существенно снизилась трудоемкость, так как отпала необходимость при решении системы минимизирующих уравнений на каждом шаге итерационного процесса разрешать соотношение (1) относительно  $n$ . Использование выражения (2) вместо (1) привело к возможности однозначного определения всех искомых параметров. В отличие от метода, изложенного в статье [1], в качестве начального приближения можно выбирать любые значения параметров, и в частности брать их равными нулю.

В работе [1] и других работах, реализующих тот же самый подход, проводились расчеты только для материалов с 1-2 энергетическими уровнями, так как обработка данных для более сложных структур требует больших затрат машинного времени. Предлагаемый метод позволяет вести обработку экспериментальных данных для материалов, по крайней мере, с 6-8 энергетическими уровнями на ЭВМ типа ЕС-1030, ЕС-1040.

Имеется программа, реализующая описанный метод.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Toyama M., Unno K., Naito M. Least Squares Analysis of Hall Data and Donor Levels in Gallium Phosphide.— Japan. J. Appl. Phys., 1969, vol. 8, N 9, p. 1118.

Поступило в редакцию 11 июня 1979 г.