

реализация обработки изображений по методу ортогональной фильтрации [9]. Применение функций вида (4) позволяет достаточно просто синтезировать соответствующие оптические фильтры, которые могут быть использованы в когерентно-оптических системах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
2. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978.
3. Ваганабе С. Разложение Карунена — Лозва и факторный анализ. Теория и приложения. — В кн: Автоматический анализ сложных изображений. Сб. переводов. М.: Мир, 1969.
4. Duvernoy J. Optical Pattern Recognition and Clustering: Karhunen — Loeve Analysis. — Appl. Optics, 1976, vol. 15, N 6, p. 1584—1590.
5. Эндрус Г. Применение вычислительных машин для обработки изображений. М.: Энергия, 1977.
6. Кловский Д. Д., Соيفер В. А. Обработка пространственно-временных сигналов. М.: Связь, 1976.
7. Игнатъев Н. К. Энергетический спектр телевизионного сигнала. М.: Электросвязь, 1959, № 1.
8. Воробьев Ю. В. Метод собственных функций в обратных оптических задачах. — Опт. и спектр., 1978, т. 44, вып. 3.
9. Василенко Г. И. Голографическое опознавание образов. М.: Сов. радио, 1977.

Поступило в редакцию 4 ноября 1981 г.;  
окончательный вариант — 10 марта 1982 г.

УДК 517.942.82 : 624.317.757

С. С. СЛИВА, В. К. ФОМЕНКО  
(Таганрог)

#### К ВОПРОСУ О МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

При использовании дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для анализа периодических сигналов по их отрезкам ограниченной длительности возникают эффекты растекания спектральных составляющих и паразитная амплитудная модуляция спектра. Для наглядного объяснения этих эффектов приведена в [1] и подробно обоснована в [2] модель ДПФ в виде набора полосовых фильтров. Однако общепринятая трактовка этой модели, как будет показано ниже на простом примере, приводит к ошибочным заключениям. В статье анализируются причины, приводящие к ошибкам, и пути их устранения.

Как известно, периодическая с периодом  $T'$  функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0' t}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

где  $\omega_0' = 2\pi/T'$ ;  $\alpha_k = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} x'(t) e^{-jk\omega_0' t} dt$  — спектр сигнала  $x'(t)$ . На практике определяют спектр сигнала:

$$x(t) = x'(t)h(t), \quad (2)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \geq T, \end{cases} \quad (3)$$

причем очень часто  $T \neq lT'$  ( $l$  — целое число).

Рассмотрим непрерывное преобразование Фурье сигнала  $x(t)$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

Подставим (1) в (4):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0' t} \right] h(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} \left[ h(t) e^{jk\omega_0' t} \right] e^{-j\omega t} dt. \quad (5)$$

Из теории преобразования Фурье известно, что

$$h(t) e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow H(\omega - k\omega_0), \quad (6)$$

С учетом (6) и (7)

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \left( \left( \sin \frac{(\omega - k\omega_0) T}{2} \right) / \frac{\omega - k\omega_0}{2} \right) e^{-j \frac{(\omega - k\omega_0) T}{2}}. \quad (8)$$

При  $\omega = n\omega_0$  ( $\omega_0 = 2\pi/T$ ) выражение (8) может быть использовано для вычисления спектра  $\alpha_n$  сигнала  $x(t)$ :

$$F(n\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \left( \left( \sin \frac{(k\omega_0' - n\omega_0) T}{2} \right) / \frac{k\omega_0' - n\omega_0}{2} \right) e^{j \frac{(k\omega_0' - n\omega_0) T}{2}} = \alpha_n T. \quad (9)$$

Как известно, при правильно выбранной частоте квантования результаты ДПФ ограниченного интервалом  $T$  отрезка сигнала совпадают с коэффициентами ряда Фурье этого сигнала. Это обстоятельство на основе выражения (9) позволяет интерпретировать ДПФ как прохождение исследуемого сигнала  $x'(t)$ , заданного спектром  $\alpha_k$ , через набор фильтров с частотными характеристиками

$$H(j\omega) = \left( \left( \sin \frac{(\omega - n\omega_0) T}{2} \right) / \frac{\omega - n\omega_0}{2} \right) e^{j \frac{(\omega - n\omega_0) T}{2}} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10)$$

центральные частоты которых отстоят друг от друга на интервал, кратный  $\omega_0$ , а коэффициенты  $\alpha_n$  — как выходные сигналы этих фильтров в момент времени  $t = T$ .

Следует отметить, что полученные выражения (8) — (10) аналогичны приведенным в [2]. Различие состоит в методике вывода этих выражений: в [2] использован интеграл наложения, в настоящей работе — преобразование Фурье ограниченного интервалом  $T$  отрезка сигнала, что позволило сократить промежуточные этапы.

Для иллюстрации свойств рассмотренной выше модели ДПФ рассмотрим сигнал

$$x(t) = \begin{cases} a \cos((2n+1)\pi/T) & \text{при } 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \geq T, \end{cases} \quad (11)$$

где  $n = \overline{0, N-1}$ ,  $N$  — число частотных отсчетов ДПФ.

Из (11) видно, что для этого сигнала мгновенная [5] угловая частота

$$\omega_0' = 2\pi/T' = n\omega_0 + 0,5\omega_0, \quad (12)$$

где  $T' = T/(n+0,5)$  — период сигнала  $x'(t) = a \cos((2n+1)\pi/T)t$ .

В [1—3] утверждается, что для сигнала (11) справедливо следующее соотношение:

$$2|\alpha_n| = 2|\alpha_{n+1}| = (2/\pi)a \approx 0,637 a. \quad (13)$$

Однако, используя известную из теории рядов Фурье формулу

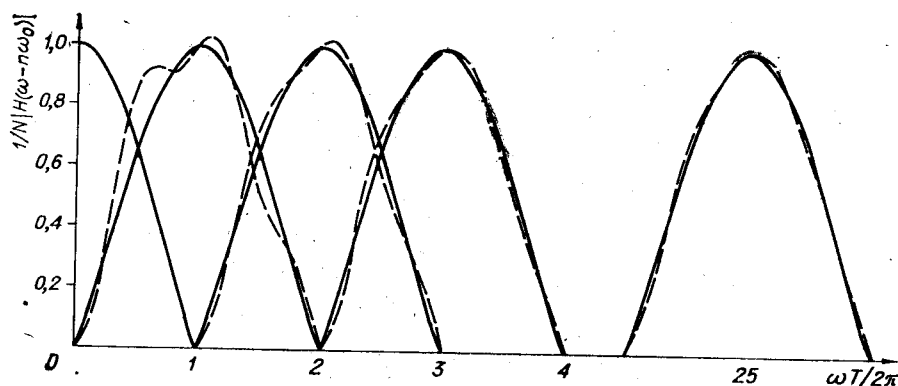
$$F(n\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \alpha_n T, \quad (14)$$

для сигнала (11) получим

$$\alpha_n = -a/\pi + a/(\pi(4n+1)), \quad \alpha_{n+1} = a/\pi + a/(\pi(4n+3)), \quad (15)$$

т. е. непосредственное вычисление по формуле (14) дает результаты, не совпадающие с приведенными в [1—3] данными. Это несоответствие (имеющее место, естественно, и для любого другого сигнала, отличного от рассмотренного выше) связано с неправильной трактовкой математических результатов исследованной выше модели ДПФ, а точнее, с неправомерностью рассмотрения частотных характеристик (10) только для положительных значений  $\omega$ . Действительно, подадим на вход фильтра с характеристикой (10) сигнал

$$x_{\text{вх}}(t) = a \cos \omega t = (a/2)e^{j\omega t} + (a/2)e^{-j\omega t}. \quad (16)$$



Выходной сигнал фильтра может быть представлен в виде [6, с. 196—198]

$$x_{\text{вых}}(t) = (a/2)e^{j\omega t}H(j\omega) + (a/2)e^{-j\omega t}H(-j\omega) = (a/2)H(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} + (a/2)H(-\omega)e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}. \quad (17)$$

Если бы выполнялось условие

$$H(\omega) = H(-\omega), \quad (18)$$

то

$$x_{\text{вых}}(t) = aH(\omega) \cos \omega t. \quad (19)$$

Упомянутый выше для сигнала (14) неправильный результат (13) получен в [1—3] при молчаливо подразумеваемом соотношении (19), которое справедливо только при выполнении условия (18). Однако для частотной характеристики (10), положенной в основу модели ДПФ [1—4], соотношение (18) не выполняется. Как следует из (17), из-за несимметричности в частотной области характеристики (10) моделирующего ДПФ фильтра при подаче на этот фильтр сигнала (16) (или любого другого, являющегося вещественной функцией времени) на выходе получим не вещественную, а комплексную функцию времени. При этом ДПФ также можно интерпретировать как прохождение исследуемого сигнала  $x'(t)$  (заданного спектром  $\alpha_n$ ) через набор фильтров с амплитудно-частотными характеристиками

$$H_1(\omega) = \sqrt{H^2(\omega) + H^2(-\omega) + 2H(\omega)H(-\omega) \cos \omega T}, \quad (20)$$

центральные частоты которых, как и в [1—4], отстоят друг от друга на интервал, кратный  $\omega_0$ ; а коэффициенты  $\alpha_n$  — как выходные сигналы этих фильтров в момент времени  $t = T$ . На рисунке штриховыми линиями изображены полученные в соответствии с (20) характеристики фильтров без боковых лепестков, сплошными — частотные характеристики фильтров, построенные по выражению (10). При  $n \gg 1$ , как нетрудно показать, можно с достаточной для инженерной практики точностью принять  $H_1(\omega) \approx H(\omega)$ .

Таким образом, при использовании модели ДПФ в виде набора полосовых фильтров необходимо иметь в виду несимметрию частотных характеристик фильтров (10) для положительных и отрицательных частот или зависимость формы результирующей характеристики (20) от номера частотного отсчета. Указанная зависимость, как видно из рисунка, наиболее существенно сказывается в начале частотной сетки.

Полученные в работе результаты необходимо учитывать, например, при экспериментальной проверке одного из основных параметров анализатора спектра — разрешающей способности  $\Delta f$  (полосы пропускания на заданном уровне по ГОСТу 4.15—69). Из [1—4] можно сделать неправильный вывод о независимости данной характеристики для анализатора спектра на основе алгоритма ДПФ от номера отсчета, что в общем случае не соответствует действительности. Для наиболее распространенного уровня 0,7 отношение  $\Delta f_1/\Delta f_{25}$  равно, например, 1,1 (индекс означает номер отсчета).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бергланд Г. Руководство к БПФ.— Зарубеж. радиоэлектроника, 1971, № 3.
2. Ефанов В. М. и др. О повышении точности спектрального анализа периодических сигналов при дискретном преобразовании Фурье.— Автометрия, 1973, № 3.
3. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов. М.: Энергия, 1974.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
5. Финк Л. М. Соотношения между спектром и мгновенной частотой сигнала.— ППИ, 1966, т. 2, вып. 4.
6. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1/Под ред. В. В. Солодовникова, М.: Машиностроение, 1967.

Поступило в редакцию 8 мая 1979 г.