

Е. Г. СТОЛОВ  
(Ленинград)

## ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Одной из основных задач в области технической кибернетики является повышение скорости обработки информации. Предложенный в настоящей работе метод кодирования информации позволяет частично решить эту задачу. Идея предлагаемого метода заключается в следующем. При решении нелинейных уравнений каждой точке из области существования неизвестных отводится определенная ячейка памяти. Массив ячеек памяти организуется в форме двумерной матрицы. Численная информация, зависящая от типа решаемой задачи, вводится в массив ячеек памяти сначала по столбцам, а затем по строкам. При построчном введении информации выполняется сложение вводимых чисел с числами, уже имеющимися в ячейках памяти. После этого осуществляется последовательный опрос всех ячеек памяти для выявления из их числа ячеек, представляющих искомые решения нелинейного уравнения. Увеличение быстродействия по сравнению с известными методами решения задач такого типа, например методом последовательного перебора, достигается в данном случае за счет того, что ввод данных в массив ячеек памяти производится по столбцам и строкам, а не поточечно (т. е. одно и то же число вводится в целую строку или столбец). Предлагаемый метод может быть реализован на ЭВМ. Наиболее эффективно использование ЭВМ в сочетании с системами ввода-вывода изображений [1—4].

Принцип кодирования для решения нелинейных уравнений и их систем заключается в следующем. Ячейка памяти вычислительной системы представляет одну из точек области существования неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ :

$$x_1 \in [x_1^{(1)}, x_1^{(2)}]; \quad x_2 \in [x_2^{(1)}, x_2^{(2)}]; \quad \dots; \quad x_{2m} \in [x_{2m}^{(1)}, x_{2m}^{(2)}].$$

Все ячейки памяти нумеруются как элементы двумерной квадратной матрицы: каждой ячейке ставятся в соответствие два целых числа  $i$  и  $k$  ( $1 \leq i, k \leq N$ ). Между значениями  $i$  и  $k$  и значениями  $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$  имеется простая однозначная аналитическая связь, например, вида

$$\begin{aligned} x_l(i, k) &= x_l^{(1)} + (x_l^{(2)} - x_l^{(1)}) \Phi(2^{l-1}k/N), \quad 1 \leq l \leq m; \\ x_q(i, k) &= x_q^{(1)} + (x_q^{(2)} - x_q^{(1)}) \Phi(2^{q-m-1}i/N), \quad m+1 \leq q \leq 2m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $N$  — число строк и столбцов в матрице элементов памяти;  $\Phi(c) = c - [c]$ ;  $[ ]$  — оператор целой части. Таким образом, соотношения (1) проецируют счетное множество точек  $2m$ -мерного пространства на счетное множество точек двумерного пространства.

Для иллюстрации на рис. 1 приведено изображение двумерной площадки с координатными осями, по которым можно считывать значения  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , соответствующие каждой точке площадки. Область существования неизвестных выбрана в пределах  $[0, 1]$ .

Пусть нелинейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_m) + \beta(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}) = A, \quad (2)$$

$\alpha$  и  $\beta$  — однозначные неотрицательные функции своих аргументов. Процесс решения уравнения происходит следующим образом.

1. На ЭВМ просчитываются значения функции

$$\alpha_{ik} = \alpha(x_1(i, k), x_2(i, k), \dots, x_m(i, k)), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

а  $x_i(i, k)$  определяются по формулам (1). Заметим, что  $\alpha_{ik} = \alpha_{2k} = \dots = \alpha_{Nk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

2. Рассчитанные по формуле (3) значения  $\alpha_{ik}$  по столбцам вводят во все элементы памяти:  $\alpha_{11}$  — в первый столбец,  $\alpha_{12}$  — во второй,  $\alpha_{1N}$  — в  $N$ -й столбец.

3. На ЭВМ просчитываются значения функции

$$\beta_{ik} = \beta(x_{m+1}(i, k), x_{m+2}(i, k), \dots, x_{2m}(i, k)), i = 1, 2, \dots, N, (4)$$

где  $x_i(i, k)$  определяются по формулам (1). Заметим, что  $\beta_{i1} = \beta_{i2} = \dots = \beta_{iN}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

4. Рассчитанные по формуле (4) значения  $\beta_{ik}$  вводятся построчно в элементы памяти и складываются с уже имеющимися в этих ячейках числами. В ячейке памяти сохраняется сумма. При этом в первую строку вводятся числа  $\beta_{11}$ , во вторую —  $\beta_{21}$ , в  $N$ -ю строку —  $\beta_{N1}$ . В результате в ячейке памяти с индексом  $i, k$  будет число

$$A_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}, (5)$$

т. е. значение функции, стоящей слева в уравнении (2) в точке  $x_1(i, k)$ ,  $x_2(i, k)$ ,  $\dots$ ,  $x_{2m}(i, k)$ .

5. Проводят опрос всех ячеек памяти и выявляют среди них такие, в которых хранящиеся числа  $A_{ik}$  удовлетворяют соотношению  $A - \varepsilon < A_{ik} < A + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . По найденным номерам ячеек  $(i, k)$  из уравнений (1) находят приближенные с точностью  $\varepsilon$  решения уравнения (2).

При решении системы уравнений, состоящей из нескольких уравнений типа (2), используется второй массив ячеек памяти, идентичный по своей организации первому массиву. В этот массив (постоянную память) сначала заносятся все решения первого уравнения путем введения постоянного числа в соответствующие ячейки постоянной памяти; затем аналогичным образом вводятся решения второго уравнения; вводимые при этом постоянные положительные числа складываются с числами, уже имеющимися в ячейках памяти, и т. д. В результате опроса всех ячеек постоянной памяти выявляются искомые решения. Найденные решения оптимизируются, например, по программе градиентного спуска [5, 6].

Описанная выше схема расчетов была реализована на ЭВМ ЕС-1040 применительно к задаче синтеза интерференционных оптических просветляющих покрытий. Цель расчета — отыскание оптических толщин слоев интерференционного покрытия при фиксированных значениях показателя преломления, обеспечивающих минимальный коэффициент отражения на заданных длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_f$ . Известно, что спектральные характеристики многослойных интерференционных оптических покрытий с хорошей степенью точности описываются формулой

$$\frac{r}{\tau} = Ce^{-i\frac{4\pi}{\lambda} \sum_{p=1}^m l_p} \left[ \sum_{p=1}^m r_{p-1} e^{i\frac{4\pi}{\lambda} (l_p + l_{p+1} + \dots + l_m)} + r_m + \right. \\ \left. + \sum_{q=m+1}^{2m} r_q e^{-i\frac{4\pi}{\lambda} (l_{m+1} + l_{m+2} + \dots + l_q)} \right], C = \prod_{i=0}^{2m} (1 - r_i^2)^{1/2}, l_i = n_i d_i \cos \varphi_i, (6)$$

где  $r$  и  $\tau$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания по-

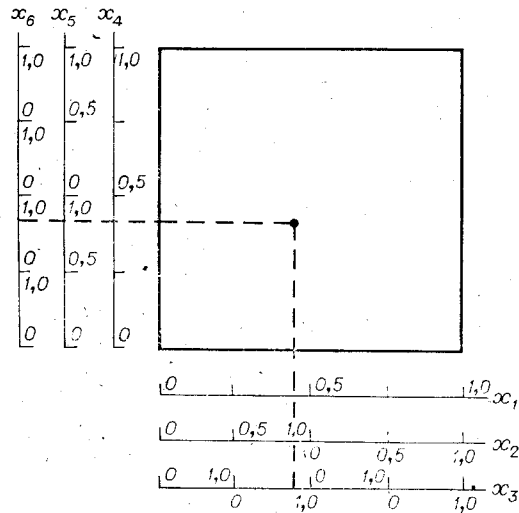


Рис. 1.

крытия;  $r_i$  — амплитудный френелевский коэффициент отражения границы, отделяющей среду с номером  $i$  от среды с номером  $(i+1)$ ;  $n_i$  и  $d_i$  — соответственно показатель преломления и геометрическая толщина  $i$ -го слоя,  $i=1, 2, \dots, 2m$ ;  $n_0$  и  $n_{2m+1}$  — показатели преломления внешних сред;  $\varphi_i$  — угол преломления в среде с номером  $i$ ;  $\lambda$  — длина волны излучения в вакууме;  $2m$  — число слоев в покрытии.

Из формулы (6) видно, что необходимым и достаточным условием устранения френелевского отражения на длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_f$  являются следующие соотношения:

$$\left| \left[ \sum_{i=1}^m r_{i-1} \cos \frac{4\pi}{\lambda_p} \sum_{q=i}^m l_q \right] + \left[ r_{m+1} + \sum_{i=m+1}^{2m} r_i \cos \frac{4\pi}{\lambda_p} \sum_{q=m+1}^i l_q \right] \right| = 0;$$

$$\left| \left[ \sum_{i=1}^m r_{i-1} \sin \frac{4\pi}{\lambda_p} \sum_{q=i}^m l_q \right] - \left[ \sum_{i=m+1}^{2m} r_i \cos \frac{4\pi}{\lambda_p} \sum_{q=m+1}^i l_q \right] \right| = 0,$$

$$p = 1, 2, \dots, f.$$

Неизвестными в системе  $2f$  уравнений (7) являлись величины  $l_1, l_2, \dots, l_{2m}$ . Алгоритм решения был построен в точном соответствии с вышеуказанной схемой. Роль функций  $\alpha$  и  $\beta$  выполняли функции, отделенные в системе уравнений (7) квадратными скобками. После совершения первого цикла проводилось переобозначение неизвестных в системе уравнений (7). Переобозначение выполнялось путем различных перестановок среди первой  $l_1, l_2, \dots, l_m$  и второй  $l_{m+1}, \dots, l_{2m}$  половин неизвестных. Быстродействие предлагаемого метода в 100—400 раз выше, нежели, например, метода последовательного перебора [7]. В качестве иллюстрации, подтверждающей эффективность предлагаемой схемы расчета, приведем конструкцию 9-слойного просветляющего покрытия на три длины волны:  $\lambda_1 = 0,310$ ,  $\lambda_2 = 0,530$ ,  $\lambda_3 = 1,06$  мкм. Найденные параметры покрытия до и после оптимизации приводятся в таблице. Спектральные характеристики рассчитанных просветляющих покрытий показаны на рис. 2 (кривая 1 — до оптимизации, кривая 2 — после оптимизации).

Наиболее эффективно применение описанного метода решения нелинейных уравнений и их систем в случае, когда в качестве оперативной и постоянной памяти используются фотопластинки. Роль отдельной ячейки памяти выполняет участок фотопластинки, разрешаемый оптоэлектронной системой. Такой подход может быть реализован на основе уже существующих устройств ввода-вывода изображений для ЭВМ [1—4]. Процесс вычислений организуется по аналогии с приведенной выше общей схемой решения.

1. На первую фотопластинку, предназначенную для решения первого уравнения системы, записывают одномерное распределение яркости, согласно формуле (3). При этом могут использоваться устройства типа «Карат» [3] или другие из числа описанных в работе [4]. Такие системы позволяют осуществлять быстрый вывод информации из ЭВМ на фотопластинку с помощью электронно-лучевых трубок (ЭЛТ), управляемых от ЭВМ. Строки в матрице значений функции (3) на экране ЭЛТ ориентированы вертикально.

Номер среды	Показатель преломления среды	Оптические толщины слоев до оптимизации в единицах $\lambda_s/4$	Оптические толщины слоев после оптимизации в единицах $\lambda_s/4$	Номер среды	Показатель преломления среды	Оптические толщины слоев до оптимизации в единицах $\lambda_s/4$	Оптические толщины слоев после оптимизации в единицах $\lambda_s/4$
0	1,52	$\infty$	$\infty$	6	2,0	0,280	0,236
1	1,45	0,248	0,258	7	1,45	0,560	0,522
2	2,0	0,498	0,572	8	2,0	1,120	1,141
3	1,45	0,124	0,123	9	1,45	0,560	0,658
4	2,0	0,062	0,003	10	1,0	$\infty$	$\infty$
5	1,45	1,120	1,128				

2. Фотопластинка подвергается вторичной экспозиции: на ней в соответствии с (4) формируется изображение с одномерным распределением яркости и горизонтальной ориентацией строк на экране ЭЛТ. При двойной экспозиции на фотопластинке образуется суперпозиция обоих изображений, описываемая с точностью до постоянного множителя уравнением (5).

3. Аналогичная процедура проводится с каждым из  $Q$  уравнений системы. В результате получается  $Q$  фотографий, каждая из которых представляет одно из уравнений системы.

4. Последовательно по точкам считываются все  $Q$  изображений с помощью системы ввода-вывода изображений для ЭВМ типа «Photomation» [1, 2]. На фотовоспроизводящем барабане системы «Photomation» пространственно совмещаются и записываются все решения первого, второго,  $Q$ -го уравнений сигналом постоянной интенсивности  $I$ . В результате на фотоматериале, закрепленном на фотовоспроизводящем барабане (т. е. в постоянной памяти), максимальная интенсивность сигнала, равная  $QI$ , будет в точках, соответствующих решениям системы уравнений.

5. Фоточувствительный материал с фотовоспроизводящего барабана устанавливается на считывающий барабан, и записанное на нем изображение считывается для выявления точек с максимальной интенсивностью сигнала. По координатам этих точек из соотношений (1) ЭВМ определяет и оптимизирует искомые решения системы уравнений.

Оценка времени, затрачиваемого на расчёт вышеописанным методом просветляющего покрытия, аналогичного представленному в таблице, не превышает 15 мин при числе адресуемых точек, равном  $10^6$ , не считая затрат времени на подготовительные операции.

Описанный метод кодирования может быть использован при создании информационно-поисковых устройств, позволяющих отыскивать адреса объектов, удовлетворяющих поисковому предписанию и зарегистрированных в картотеке. Каждому объекту ставится в соответствие точка на квадратном рабочем поле. Объектам, которые при классификации по  $l$ -му признаку относятся к  $i$ -й группе, ставятся в соответствие точки, в которых

$$\prod_{a/p_1 p_2 \dots p_{l-1}}^{a/p_1 p_2 \dots p_l} \left( x - \frac{(i-1)a}{p_1 p_2 \dots p_l} \right) = 1, \quad 1 \leq l \leq k, \quad i \leq p_l,$$

где  $a$  — линейный размер рабочей площадки;  $p_l$  — число градаций в рамках  $l$ -го признака;  $k = n/2$  при  $n$  четном и  $k = (n+1)/2$  при  $n$  нечетном;  $n$  — полное число признаков при классификации объектов;  $\prod_c^{(d)}(x)$  — периодическая функция с периодом  $c$ , причем

$$\prod_c^{(d)}(x) = 1, \quad x \in [0, d]; \quad \prod_c^{(d)}(x) = 0, \quad x \in [d, c].$$

Объектам, которые при классификации по  $q$ -му признаку ( $k < q \leq n$ ) относятся к  $r$ -й группе, соответствуют точки на рабочей поверхности признака, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\prod_{a/p_{k+1} p_{k+2} \dots p_{q-1}}^{a/p_{k+1} p_{k+2} \dots p_q} \left( y - \frac{(r-1)a}{p_{k+1} p_{k+2} \dots p_q} \right) = 1, \quad r \leq p_r, \quad k < q \leq n.$$

Блок-схема информационно-поискового устройства изображена на рис. 3. Она содержит пространственные модуляторы света 1, 2, 3, ...

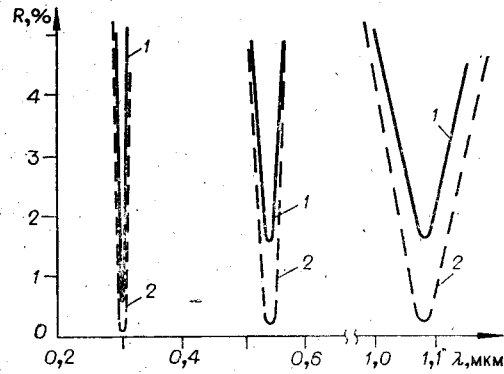


Рис. 2.

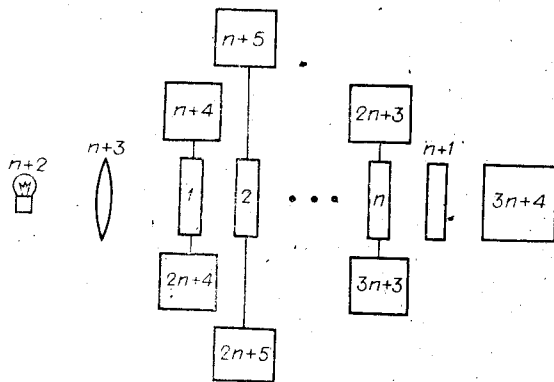


Рис. 3.

...,  $(n+1)$ ; источник света  $(n+2)$ ; коллиматорный объектив  $(n+3)$ ; механизмы перемещения пространственных модуляторов света  $(n+4)$ ,  $(n+5)$ , ...,  $(2n+3)$ ; механизмы фиксации пространственных модуляторов света в дискретных положениях  $(2n+4)$ ,  $(2n+5)$ , ...,  $(3n+3)$ ; устройство измерения координат  $(3n+4)$ . Пространственные модуляторы света представляют собой пластины, содержащие полностью прозрачные и не-

прозрачные зоны, расположенные перпендикулярно оптической оси устройства. Конфигурации прозрачных зон пространственных модуляторов света выбираются следующим образом:  $i$ -й модулятор ( $1 \leq i \leq n$ ) в несмещенном положении прозрачен в точках, представляющих объекты, относящиеся при классификации по  $i$ -му признаку к первой группе. Иначе говоря, прозрачные зоны каждого из первых  $n$  пространственных модуляторов имеют форму прямоугольников, большие границы которых параллельны между собой. Первый пространственный модулятор содержит одну прозрачную зону с линейными размерами  $a$  и  $a/p_1$ , а  $l$ -й пространственный модулятор ( $1 < l \leq k$ ) —  $p_1 p_2 \dots p_{l-1}$  прозрачных зон с линейными размерами  $a$  и  $a/p_1 p_2 \dots p_l$  и расстоянием  $a(p_l - 1)/p_1 p_2 \dots p_l$  между любыми соседними прозрачными зонами;  $(k+1)$ -й модулятор имеет одну прозрачную зону с линейными размерами  $a$  и  $a/p_{k+1}$ ,  $q$ -й модулятор ( $k+1 < q \leq n$ ) —  $p_{k+1} p_{k+2} \dots p_{q-1}$  прозрачных зон с линейными размерами  $a$  и  $a/p_{k+1} p_{k+2} \dots p_q$  и расстоянием  $a(p_q - 1)/p_{k+1} p_{k+2} \dots p_q$  между любыми соседними прозрачными зонами. Большие стороны прямоугольных прозрачных зон первых  $k$  пространственных модуляторов параллельны между собой и перпендикулярны большим сторонам прямоугольных прозрачных зон  $(k+1)$ ,  $(k+2)$ , ...,  $n$ -го модуляторов. Механизмы перемещения позволяют осуществлять независимое перемещение каждого из первых  $n$  пространственных модуляторов в направлении, перпендикулярном оптической оси и большим сторонам прямоугольных прозрачных зон. Каждый  $l$ -й модулятор может фиксироваться в  $(p_l + 1)$  дискретных положениях. Величина смещения из любого положения в соседнее составляет для первых  $p_l$  положений  $a/p_1 p_2 \dots p_l$  при  $1 \leq l \leq k$  и  $a/p_{k+1} p_{k+2} \dots p_l$  при  $(k+1) \leq l \leq n$ . В последнем  $(p_l + 1)$ -м положении  $l$ -й пространственный модулятор полностью выведен из пределов рабочего поля устройства.

В исходном (несмещенном) положении все модуляторы расположены таким образом, что большие стороны первых от края прозрачных зон 1, 2, ...,  $k$ -го модуляторов совмещены с одной границей рабочей площадки устройства (ось  $y$ ), а большие стороны первых от края прозрачных зон  $(k+1)$ ,  $(k+2)$ , ...,  $n$ -го модуляторов — с другой границей (ось  $x$ ). Неподвижный (не связанный с механизмом перемещения)  $(n+1)$ -й пространственный модулятор света прозрачен в тех точках, которые представляют объекты, имеющиеся в картотеке. (В любой реальной картотеке не все ячейки памяти заполнены, т. е. реальный объект может отсутствовать в картотеке, а ячейка памяти под него отведена.)

Из вышеизложенного видно, что каждый из первых  $n$  пространственных модуляторов осуществляет селекцию объектов, представленных светящимися точками, по определенному признаку, т. е.  $l$ -й модулятор в  $i$ -м положении селекционирует точки, представляющие в закодированной форме объекты, относящиеся по  $l$ -му признаку к  $i$ -й группе. В последнем  $(p_l + 1)$ -м положении селекции по  $l$ -му признаку не проводится. Под-

робная информация о каждом объекте хранится в картотеке под соответствующим номером. Цель поиска: по  $n$  или менее признакам отыскать номера карточек объектов, которые, во-первых, удовлетворяют поисковому предписанию и, во-вторых, имеются в картотеке. Пусть ищутся объекты, которые по  $m_1$  признаку относятся к  $C_{m_1}$  группе ( $C_{m_1} \leq p_{m_1}$ ), по  $m_2$  признаку — к  $C_{m_2}$  группе ( $C_{m_2} \leq p_{m_2}$ ), по  $m_f$  признаку — к  $C_{m_f}$  группе ( $C_{m_f} \leq p_{m_f}$ ) и т. д., т. е. поиск проводится по  $f$  признакам ( $m_1 < m_2 < \dots < m_f$ ). В этом случае все пространственные модуляторы, кроме  $m_1, m_2, \dots, m_f$ , выводятся из пределов рабочей площадки устройства ( $(p_i + 1)$ -е положение). Пространственный модулятор  $m_1$  устанавливается в  $C_{m_1}$  положение,  $m_2$  — в  $C_{m_2}$  положение,  $m_f$  — в  $C_{m_f}$  положение и т. д. Затем с помощью устройства измерения координат находят координаты прозрачных точек. По координатам определяются номера карточек искомых объектов с помощью формулы

$$M = W_1 + p_1 p_2 \dots p_k W_2,$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — координаты точки по горизонтальным и вертикальным шкалам в делениях. При записи информации об объектах на неподвижном модуляторе (определение координат точки, представляющей объект с поисковым образом  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ) следует применять формулы

$$W_1 = C_k + (C_{k-1} - 1)p_k + (C_{k-2} - 1)p_k p_{k-1} + \dots + (C_1 - 1)p_k p_{k-1} \dots p_2; \quad (15)$$

$$W_2 = C_n + (C_{n-1} - 1)p_n + (C_{n-2} - 1)p_n p_{n-1} + \dots + (C_{k+1} - 1)p_n p_{n-1} \dots p_{k+2}.$$

Преимущества данной системы по сравнению с устройствами типа «Microcite» [8], использующими похожий принцип кодирования, заключаются в простоте ввода информации и поискового предписания, за счет чего увеличивается скорость поиска. Предлагаемое устройство является универсальным, так как позволяет проводить поиск среди объектов различных классов. Для проведения поиска среди объектов другого класса достаточно заменить неподвижный пространственный модулятор. Объем памяти описанного устройства может составлять до  $(1 \div 3) \cdot 10^5$  без применения высокопрецизионных оптико-механических узлов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сандор Т., Кольцо Д. Система из сканирующего и воспроизводящего устройств для цифровой обработки изображений.— Приборы для научных исследований, 1974, № 4.
2. Зайцев В. М., Чигирев А. А. Устройство ввода-вывода изображения для ЕС ЭВМ на базе сканера аппаратуры Р-1700 «Photomation».— Приборостроение, 1980, т. 13, № 2.
3. Авдеев В. С. и др. «Карт» — устройство вывода графической и буквенно-цифровой информации из ЭВМ на микрофильм.— Автометрия, 1976, № 1.
4. Сканирующие устройства на ЭЛТ высокого разрешения (для ЭВМ)/Под ред. С. Т. Васькова.— Новосибирск: Наука, 1978.
5. Растрингин Л. А. Системы экстремального управления.— М.: Наука, 1974.
6. Ермолаев А. М., Минков И. М., Власов А. Г. Метод расчета многослойных покрытий с заданной отражательной способностью.— Опт. и спектр., 1962, т. 13, с. 259.
7. Эльснер З. Н. Теплозащитные интерференционные покрытия.— Опт. и спектр., 1968, т. 13, № 3.
8. Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики.— М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 8 августа 1980 г.;  
окончательный вариант — 16 декабря 1981 г.