УДК 621.391.2

В. Н. ПРОКОФЬЕВ

(Ленинград)

ОДНОВЫБОРОЧНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПРАВИЛА НЕКОГЕРЕНТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА В ШУМАХ НЕИЗВЕСТНОГО УРОВНЯ

Широко известно решение задачи некогерентного обнаружения нефлуктуирующего сигнала в шумах, уровень которых априорно задан [1]. Для этой же задачи существует инвариантный двухвыборочный алгоритм обнаружения при неизвестной мощности шума [2], предполагающий наличие опорной выборки шума (асимптотическая эффективность алгоритма исследована в [3]).

В данной работе предлагаются инвариантные одновыборочные алгоритмы обнаружения (при наблюдении стационарных и нестационарных процессов), не требующие дополнительной выборки шума. Структура правил, включая их пороги, не зависит от неизвестной мощности шума и коэффициента передачи канала (т. е. инвариантна к масштабным изменениям наблюдений); при этом решения выдерживают заданный уровень ложных тревог, их мощность (вероятность правильного обнаружения) инвариантна к масштабным изменениям данных. Эти полезные свойства алгоритмов делают их пригодными для создания автоматизированных устройств обработки сигналов.

1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — независимая стационарная выборка отсчетов огибающей напряжения с выхода детектора приемника, обобщенное распределение Рэлея которой [1] можно записать в виде

$$p(x) = \sigma^{-2n} \exp(-nq) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \prod_{i=1}^{n} x_i I_0\left(\sqrt{2q}\, x_i/\sigma\right) \tag{1}$$

($I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя). Параметр $q = a^2/2\sigma^2$ (отношение С/Ш, a — амплитуда сигнала, σ^2 — дисперсия шума) характеризует наличие сигнала и является проверяемым (информативным), а масштабный параметр σ оказывается мешающим, так как мощность шума неизвестна. Задача обнаружения состоит в проверке гипотез с мешающим параметром

$$H_0 : q = 0,\ H_1 : q > 0\ (\sigma \text{ неизвестно}) \tag{2}$$

на базе семейства (1).

При мешающем параметре σ решение задачи (2) следует искать среди правил, инвариантных к масштабу наблюдений и обладающих отмеченными выше свойствами устойчивости. Класс таких правил удобно описывается с помощью распределения данных на подполе инвариантных (к масштабу) событий в пространстве значений x ([4], гл. II, §2.2, теоремы А и Б). Имеет место следующее (см. приложение 1)

Предложение 1. Для задачи (2) наиболее мощное (НМ) среди инвариантных правило решения имеет критическую область вида

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} q^{\sum_1^n k_i} \frac{\Gamma\left(n + \sum_1^n k_i\right)}{\prod_1^n (k_i!)^2} \frac{\prod_1^n x_i^{2k_i}}{\left(\sum_1^n x_i^2\right)^{\sum_1^n k_i}} > C \tag{3}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция); существует локально наиболее мощное (ЛНМ) по величине q^2 инвариантное решение с критической областью

$$\sum_{i<j}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} x_i^2 x_j^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 > C \tag{4}$$

либо

$$\sum_{i<j}^{n-1} \sum_{j=2}^{n} x_i^2 x_j^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 > C. \tag{5}$$

Инвариантные правила (4), (5) не содержат неизвестных параметров распределений и удобны для практической реализации в автоматизированных устройствах. Аналитическое определение порогов и мощности этих правил, к сожалению, затруднено, однако возможны численные расчеты.

В частном случае $n = 2$ можно найти плотность распределения (см. соотношение (7)) тестовой статистики и точное значение порога. ЛНМ критическая область и порог определяются здесь условиями

$$t = 2z/(1+z^2) > C, \quad z = x_2/x_1, \quad C = (1-\alpha^2)^{1/2} \tag{6}$$

(α — заданная вероятность ложной тревоги).

Алгоритм (6) имеет самостоятельный интерес, например, как инвариантный способ бинарного квантования информации перед последующим ее накоплением. Мощность алгоритма $\beta = \text{Вер}\,\{t > C/H_1\}$ может быть рассчитана с требуемой точностью по распределению статистики t в (6), имеющему при сигнале ($q > 0$) и в его отсутствие ($q = 0$) следующий вид:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{t\exp(-2q)}{2\sqrt{1-t^2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (qt^2/2)^k \frac{k+1}{k!} \left[\frac{F\left(-k, -k; 1; \left(2-t^2-2\sqrt{1-t^2}\right)/t^2\right)}{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^k} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{F\left(-k, -k; 1; \left(2-t^2+2\sqrt{1-t^2}\right)/t^2\right)}{\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)^k} \right], \\ \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \quad (q=0), \quad 0 < t < 1, \end{cases} \tag{7}$$

где $F(.,.;.;.)$ — гипергеометрическая функция.

2. На практике выборка x может быть нестационарной, так что неизвестные параметры q и σ не остаются постоянными за время наблюдения $i = \overline{1, n}$. Инвариантное решение задачи обнаружения может быть получено и здесь, если предположить локальную стационарность наблюдений.

Пусть стационарными (имеющими одинаковые параметры распределений) являются пары смежных отсчетов (x_{1j}, x_{2j}), $j = \overline{1, m}$ (индексы 1 и 2 — номера отсчетов в j-й паре, m — общее число пар). Распределение каждой пары соответствует (1) при $n = 2$ (для x_{1j}, x_{2j}) с параметрами q_j, σ_j, $j = \overline{1, m}$; произведение этих распределений по $j = \overline{1, m}$ дает общее распределение данных наблюдений в этом случае.

Задача состоит в проверке гипотез

$$H_0: q_j = 0, \quad H_1: q_j > 0 \quad (\sigma_j \text{ неизвестны}, \ j = \overline{1, m}) \tag{8}$$

и содержит m проверяемых и m мешающих параметров.

Ее решение должно быть инвариантным к масштабным изменениям в каждой j-й паре наблюдений (x_{1j}, x_{2j}), распределение которых содержит свой мешающий параметр σ_j, $j = \overline{1, m}$. Переходя к инвариантным правилам и используя затем методику [5] получения максиминного (максимизирующего минимум мощности на некотором естественном классе альтернатив H_1) алгоритма при векторном информативном параметре $q = (q_1, \ldots, q_m)$, можно доказать (см. приложение 2)

Предложение 2. В задаче (8) НМ инвариантная критическая область есть

$$\sum_{j=1}^{m} \ln \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} q_*^k \frac{k+1}{k!} \frac{F\left(-k, -k; 1; z_j^2\right)}{\left(1+z_j^2\right)^k} \right\} > C; \quad z_j = \frac{x_{2j}}{x_{1j}}; \quad q_j = \frac{a_j^2}{2\sigma_j^2}; \tag{9}$$

существует максиминный алгоритм вида

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} q_*^k \frac{k+1}{k!} \frac{F\left(-k, -k; 1; z_j^2\right)}{\left(1+z_j^2\right)^k} > C \tag{10}$$

(q_* — заданное «граничное» значение отношения С/Ш, определяющее естественный класс альтернатив); его локальная форма ($q_* \ll 1$) есть

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{z_j^2}{\left(1+z_0^2\right)^2} > C. \tag{11}$$

Инвариантные правила (9)—(11), использующие отношения $z_j = x_{2j}/x_{1j}$, обладают указанными выше свойствами устойчивости при отмеченной нестационарности данных и благодаря этому могут быть использованы на практике. Удобным для реализации представляется алгоритм (11), не содержащий параметров q_j; его порог и мощность могут быть оценены по нормальной аппроксимации тестовой статистики в (11) с учетом плотности (7), так как слагаемые левой части в (11) имеют форму квадрата статистики t из (6).

Приложение 1 (доказательство предложения 1). Согласно методике получения инвариантных решений ([4], гл. II, § 2.2), в рассматриваемой задаче НМ инвариантная критическая область может быть записана в виде $w(x) = \bar{p}(x)/\bar{p}_0(x) > C$, где функция $\bar{p}(x)$ вычисляется на базе плотности $p(x)$ из (1) по формуле (35) на с. 64 в [4]; аналогично вычисляется функция $\bar{p}_0(x)$ по плотности $p_0(x)$, получаемой из (1) при $q = 0$. Представляя функцию $I_0(\bullet)$ в (1) рядом (относительно соответствующей переменной интегрирования при нахождении $\bar{p}(x)$, ряд сходится равномерно во всей области значений этой переменной) и выполняя указанные вычисления, находим функцию $w(x)$ в виде левой части неравенства (3).

Из определения ЛНМ-критерия и того (обычного) предположения, что его функция мощности дважды дифференцируема по q в точке $q = 0$, можно получить, что здесь ЛНМ инвариантная критическая область имеет вид $\left|\frac{\partial^2 w(x)}{\partial q^2}\right|_{q=0} > C$, т. е. сводится к тому, чтобы в статистике из (3) выделить члены, содержащие степени q не выше 2. При этом слагаемое, отвечающее степени q^1 $\left(\text{при } \sum_1^n k_i = 1\right)$, оказывается константой вида $q\Gamma(n+1)$ и может быть опущено (как и постоянное слагаемое, соответствующее степени q^0). Степень q^2 соответствует условию $\sum_1^n k_i = 2$, которое выполняется в двух случаях: а) либо одно из $k_i = 2$, а прочие $k_j = 0$, $j \neq i$, $i = \overline{1, n}$; б) либо два из значений k_i, $i = \overline{1, n}$, равны каждое 1, а прочие — нулевые. Учет этих случаев дает статистику (коэффициент при q^2) вида

$$\frac{\Gamma(n+2)\left(\sum_1^n x_i^4 + 8\sum_{i<j}\sum x_i^2 x_j^2\right)}{4\left(\sum_1^n x_i^2\right)^2} = \frac{\Gamma(n+2)\left[\left(\sum_1^n x_i^2\right)^2 + 6\sum_{i<j}\sum x_i^2 x_j^2\right]}{4\left(\sum_1^n x_i^2\right)^2};$$

здесь последняя функция монотонна по величине левой части в (4), так что (4) — ЛНМ инвариантная критическая область; так как $\left(\sum_1^n x_i^2\right)^2 = \sum_1^n x_i^4 + 2\sum_{i<j}\sum x_i^2 x_j^2$, то видно, что эквивалентно можно использовать и критическую область (5).

Приложение 2 (доказательство предложения 2). Записывая совместное распределение всех m независимых пар наблюдений $x = \{(x_{1j}, x_{2j}), j = \overline{1, m}\}$ и используя указанную в приложении 1 методологию, получаем тестовую функцию $w(x;\ q = (q_1, \ldots, q_m))$ НМ инвариантного алгоритма; ее логарифмирование (монотонное преобразование) и дает форму (9) НМ инвариантной критической области.

Для проверяемого в данном случае векторного параметра q можно определить естественный класс альтернатив (по отношению к $H_0: q = 0$, 0 — нулевой вектор), характеризующийся тем, что хотя бы одно из значений $q_j \geqslant q_*$, $j \in \{\overline{1, m}\}$ ($q_* > 0$ — заданное число). Ясно, что функция мощности решающего правила на базе отношения $w(x;\ q)/w(x;\ 0)$ не убывает по каждой из компонент q_j (отношения С/Ш), $j = \overline{1, m}$, каков бы ни был вектор q из отмеченного класса альтернатив. В этих условиях, согласно результатам из [5], существует максиминный (для области H_1) решающий алгоритм для задачи обнаружения (8), и его критическая область имеет вид $\sum_{j=1}^m w_j(x) > C$, где $w_j(x)$ — отмеченная выше функция $w(x;\ q)$ при $q_j = q_*$ и $q_i = 0$, $i \neq j$. Это и дает форму (10) максиминной инвариантной критической области.

Можно видеть, что здесь локально максиминный (ЛММ) алгоритм ($q_* \ll 1$) определяется коэффициентом при q_*^2 в левой части (10); разлагая гипергеометрическую функцию в ряд, приходим к форме (11) такого ЛММ-алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1975, т. 2.
2. **Прокофьев В. Н.** Инвариантное правило некогерентного обнаружения сигнала на фоне шумов неизвестного уровня.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 3.
3. **Никитин Я. Ю., Филимонов Р. П., Шубина Е. П.** Расчет асимптотической относительной эффективности некоторых инвариантных правил обнаружения в схеме двухканальной обработки.— Автометрия, 1978, № 2.
4. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев.— М.: Наука, 1971.
5. **Прокофьев В. Н.** Максиминное решение задачи обнаружения с векторным информативным параметром.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1978, № 5.

Поступило в редакцию 26 апреля 1981 г.;
окончательный вариант — 1 февраля 1982 г.