

Калмана для системы (2)–(6), (20), в котором $P(\tau)$ — ковариационная матрица ошибок оценивания, а $\Psi(\tau)$ — ковариационная матрица вектора случайных помех $\xi(\tau) = [\xi(\tau)\eta(\tau)]^T$. В теории оптимального оценивания известно [4], что минимальная дисперсия оценок $P(\tau)$ будет достигаться в том случае, когда погрешность аппроксимации $\eta(\tau)$ (как и другие погрешности $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$) будет случайным гауссовым процессом. Если при этом для начальных значений $\hat{x}(0)$ и $\hat{z}(0)$ известны их оценки \hat{x}_0 и \hat{z}_0 и ковариационная матрица ошибок их задания $P(0) = P_0$, то можно использовать эту дополнительную информацию при получении оценок $\hat{X}(\tau)$. В этом случае оптимальные оценки получают минимизацией функционала

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_v^2(\tau)} \|y(\tau) - H\mathbf{X}\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi^T(\tau) \Psi^{-1}(\tau) \xi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} [\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_0]^T P_0^{-1} [\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_0], \quad (24)$$

совпадающего с функционалом оптимального оценивания состояния динамической системы (2)–(6), (20) по методу максимума апостериорной вероятности (МАН) [4]. При этом алгоритм решения (21) полностью совпадает с алгоритмом фильтра Калмана.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что:

- 1) оптимальное оценивание стохастических динамических систем по методу МАН (в том числе и алгоритм фильтра Калмана) включается в число регуляризованных по Тихонову методов решения этой задачи;
- 2) регуляризованное оптимальное решение ОЗ динамической системы (1)–(5) может быть найдено путем решения эквивалентной задачи оптимального оценивания состояния системы (2)–(6), (20) по методу МАН (если погрешности измерений $\xi(\tau)$, $v(\tau)$ и аппроксимации $\eta(\tau)$ суть случайные процессы типа белого шума);
- 3) оптимальное решение полностью определяется стохастическими характеристиками случайных процессов шумов измерений $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$ и погрешностей аппроксимации $\eta(\tau)$ искомого решения $z(\tau)$ выражением (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. П. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.
3. Симбирский Д. Ф. Температурная диагностика двигателей.— Киев: Техника, 1976.
4. Сейдж Э., Мейлс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976.

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.

УДК 621.391.244 : 517.587

А. А. КОЧЕТКОВ, В. В. КРЫЛОВ
(Горький)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛОВ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНОМУ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ БАЗИСУ

Введение. При решении целого ряда прикладных задач возникает необходимость определять вклад в сигнал экспонент с различными постоянными времени. Эту процедуру в дальнейшем будем называть релаксационным анализом сигналов. Например, в электрогеологоразведке, про-

изводя релаксационный анализ отклика породы на зондирующий электромагнитный импульс, можно судить о составе породы: железная руда, медная руда, пустая порода и т. п. [1]. Изучая постоянные времени затухания прецессионного колебания вектора намагниченности вещества после импульсного возбуждения, определяют химический состав вещества. В этом состоит сущность импульсной спектроскопии ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [2]. Подобных примеров можно привести много.

Математической основой релаксационного анализа является представление сигнала в виде суперпозиции дискретного

$$f(t) = \sum_k B_k e^{-\alpha_k t}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

или непрерывного

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\alpha) e^{-\alpha t} d\alpha, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

множества экспонент с действительными показателями. Функции B_k и $B(\alpha)$ будем называть соответственно коэффициентами релаксационного спектра и релаксационной спектральной плотностью (релаксационным спектром) сигнала $f(t)$.

Определение релаксационного спектра $B(\alpha)$ по заданному сигналу $f(t)$ наталкивается на серьезные трудности, вытекающие из особенностей базиса $\{e^{-\alpha t}\}$.

Во-первых, базисные функции являются неортогональными и не существует метода разложения сигнала по произвольной системе неортогональных функций, кроме метода взаимного базиса. Построить же взаимный базис в достаточно компактной форме пока не удается.

Во-вторых, несмотря на то, что функции $\{e^{-\alpha_k t}\}$ линейно-независимые на полуоси $t \geq 0$, они весьма близки к линейной зависимости, т. е. можно аппроксимировать одну базисную функцию другими с малой погрешностью ε :

$$e^{-\alpha_i t} = \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \lambda_k e^{-\alpha_k t} + \gamma(t), \quad \max_t |\gamma(t)| < \varepsilon,$$

и наоборот — несколько компонент одной. Это приводит к тому, что в условиях действия шумов на входе релаксационного анализатора он имеет конечную потенциальную разрешающую способность.

В-третьих, задача определения релаксационного спектра сигнала $f(t)$ является некорректной по Адамару, т. е. малые изменения в $f(t)$ могут приводить к большим изменениям в спектре. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N B'_k e^{-\alpha_k t}, \quad \text{где } \alpha_{k-1} < \alpha_k; \quad B'_k = (-1)^{k-1} b, \text{ имеющую релаксационный спектр в виде чередующихся компонент разного знака. Очевидно, что, уменьшая расстояние } \Delta\alpha \text{ между соседними спектральными линиями, можно сделать норму } \|\varphi(t)\| = \max_t |\varphi(t)| \text{ сколь угодно малой, сохраняя}$$

при этом неизменной норму спектра $\|B'_k\| = \max_k |B'_k| = b$. Следовательно,

если добавить к некоторому сигналу $f(t)$ сигнал $\varphi(t)$ с малой нормой (им может быть, например, шум), то релаксационный спектр претерпит существенные изменения. В нем появятся большие по абсолютной величине и противоположные по знаку линии, соответствующие близким значениям α_k , которые могут намного превышать величину исходного спектра сигнала $f(t)$. Все изложенное иллюстрируется рис. 1, где изображены релаксационные спектры сигналов $f(t) = 1e^{-0,115t}$ и $\varphi(t) = f(t) + \varepsilon(t)$ ($\varepsilon(t)$ — шум со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10^{-3}$).

Таким образом, при построении методов определения релаксационного спектра сигналов, ориентированных на практическую реализацию средствами цифровой вычислительной техники, необходимо применять

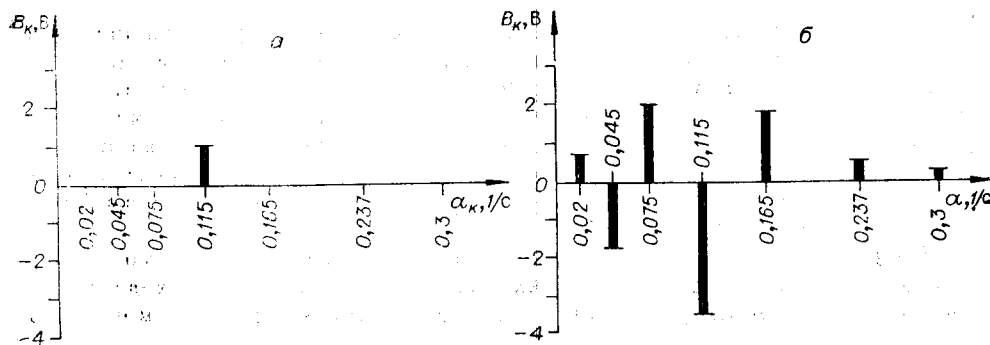


Рис. 1. Релаксационные спектры сигналов:

$$a - f(t) = e^{-0,115t}, \quad б - \varphi(t) = f(t) + \varepsilon(t), \quad \sigma_\varepsilon = 10^{-3} \text{В.}$$

специальные регуляризующие операторы для повышения устойчивости решений уравнений (1) и (2). Эти регуляризующие операторы могут быть построены на основе, например, ограничений на энергию спектра, количества его компонент или близости постоянных релаксации α_k .

Существующие в настоящее время аналитические методы определения релаксационного спектра непригодны для практической реализации, так как требуют использования нелинейной дискретизации сигналов [3] или реализации сложных интегральных преобразований [4] и, кроме того, не учитывают перечисленных особенностей релаксационного базиса.

В [5] нами был предложен практический метод релаксационного анализа, который, однако, в силу особенностей регуляризующего оператора применим лишь в узком диапазоне постоянных релаксации α .

В настоящей работе предлагаются два метода релаксационного анализа сигналов, использующие равномерную дискретизацию входных сигналов и учитывающие перечисленные особенности базисных функций. Рассматриваются также выбор интервала дискретизации Δt и разрешающая способность релаксационного анализатора.

Выбор интервала дискретизации сигнала. Рассмотрим множество \mathfrak{F} сигналов $f(t)$ с финитным релаксационным спектром, т. е. $B_r(\alpha) = 0$ при $\alpha > \alpha_{\max}$. Установим связь между интервалом дискретизации Δt и шириной релаксационного спектра α_{\max} при заданной погрешности восстановления непрерывного сигнала рядом Котельникова. В качестве меры погрешности воспользуемся отношением $\varepsilon = \|f(t) - f_a(t)\| / \|f(t)\|$, где $f(t)$ — исходный сигнал; $f_a(t)$ — восстановленный по выборкам сигнал; $\|f(t)\| = \int_0^\infty f^2(t) dt$.

Согласно [6], необходимо выбирать Δt из условия $\Delta t \leq 1/2F_{\max}$, где F_{\max} — ширина фурье-спектра, в пределах которой сосредоточена $1 - \varepsilon$ часть энергии сигнала. Можно показать, что достаточно выполнить это условие лишь для сигнала $\varphi(t) = A \exp(-\alpha_{\max} t)$, чтобы оно применялось для всех сигналов из множества \mathfrak{F} .

Для сигнала $\varphi(t)$ ширина спектра $F_{\max} = (\alpha_{\max}/2\pi) \operatorname{tg}(\pi/2)(1 - \varepsilon)$. Следовательно, Δt и α_{\max} связаны между собой соотношением

$$\Delta t \alpha_{\max} \leq \pi \operatorname{tg}(\pi\varepsilon/2). \quad (3)$$

Для часто встречающегося случая $\varepsilon = 0,05$ имеет место соотношение $\Delta t \alpha_{\max} \leq 0,25$. Это соотношение позволяет оценить как необходимый (Δt), если известно α_{\max} , так и возможный интервал релаксационного анализа $0 \div \alpha_{\max}$, если сигнал дискретизирован с шагом Δt .

Потенциальная разрешающая способность релаксационного анализатора. Как уже отмечалось во введении, из-за особенностей базисных функций $\{e^{-\alpha_k t}\}$, а именно близости их к линейно-зависимым, возможна аппроксимация одного набора функций другим с малой погрешностью.

В частности, сигнал, представляющий собой сумму двух экспонент с близкими показателями α_1 и α_2 , мало отличается от экспоненты с показателем $\alpha_3 = (1/2)(\alpha_1 + \alpha_2)$. Отсюда видно, что если на входе анализатора присутствуют сигнал и шум в аддитивной смеси, то эти различия могут оказаться меньше уровня шумов, и тогда такие два сигнала станут неотличимыми. Все это свидетельствует о том, что в условиях шумов релаксационный анализатор не может обеспечить сколь угодно высокую разрешающую способность.

О п р е д е л е н и е. Потенциальной разрешающей способностью релаксационного анализатора в условиях действия шума на его входе назовем такую минимальную величину β , при которой средняя мощность отклонения сигнала

$$f_1(t) = (A/2)e^{-\alpha t} + (A/2)e^{-(\alpha+\beta)t}$$

от сигнала

$$f_2(t) = Ae^{-(\alpha+\beta/2)t}$$

больше или равна средней мощности шума σ^2 , т. е. если σ^2 — мощность шума на входе, то β — разрешающая способность при

$$\forall \delta\alpha \geq \beta \Rightarrow \|f_1(t) - f_2(t)\| \geq \sigma^2,$$

где

$$\|f(t)\| = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt;$$

T — длительность анализируемого отрезка сигнала.

В соответствии с этим определением можно получить следующую оценку для потенциальной разрешающей способности:

$$\beta \geq 4\alpha \sqrt{\alpha T (\sigma^2/A^2) / (3 - e^{-2\alpha T} (2T^4\alpha^4 + 4T^3\alpha^3 + 6T^2\alpha^2 + 6T\alpha + 3))}. \quad (4)$$

Здесь σ^2/A^2 имеет смысл отношения шум/сигнал по мощности на входе анализатора.

Анализ этого выражения показывает, что при $T = (40 \div 80)\Delta t$ и отношении $\sigma^2/A^2 = 10^{-5}$ число компонент, постоянные релаксации которых отличаются друг от друга на β , не превышает 12—15. Все это свидетельствует о необходимости тщательной фильтрации сигналов перед релаксационным анализом, например с помощью процедуры с обратным ходом времени [3].

Определение релаксационного спектра сигнала вариационным методом. Пусть заданы N выборок f_0, f_1, \dots, f_{N-1} из исходного сигнала $f(t)$ через интервал времени Δt . Требуется определить непрерывную функцию $B(\alpha)$, являющуюся релаксационным спектром сигнала $f(t)$, т. е. такую, чтобы выполнялось N условий:

$$\int_0^{\alpha_{\max}} B(\alpha) e^{-\alpha_k \Delta t} d\alpha = f_k, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (5)$$

Как известно, полученная задача восстановления функции $B(\alpha)$ по N моментным уравнениям (5) имеет не единственное решение. Для обеспечения единственности потребуем, кроме того, чтобы функция $B(\alpha)$ обладала минимальной энергией, т. е. доставляла минимум функционалу

$$J = \int_0^{\alpha_{\max}} B^2(\alpha) d\alpha. \quad (6)$$

Это условие, как было показано во введении, приводит к регуляризирующему оператору.

Соотношения (5) и (6) определяют задачу на условный экстремум функционала с изопериметрическими ограничениями. Воспользовавшись

методом неопределенных множителей Лагранжа, получим решение этой задачи [7]:

$$B(\alpha) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i e^{-\alpha i \Delta t}. \quad (7)$$

Коэффициенты λ_i определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A\lambda = f, \quad (8)$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — $(N \times N)$ -матрица коэффициентов:

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{\max}, & i = j = 1, \\ \frac{1 - \exp(-\alpha_{\max}(i+j-2)\Delta t)}{(i+j-2)\Delta t}, & i = \overline{2, N}; \quad j = \overline{2, N}; \end{cases}$$

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})^T$ — вектор неизвестных коэффициентов и $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$ — вектор выборок из исходного сигнала.

Основной трудностью при реализации изложенного метода является решение матричного уравнения (8), так как вследствие некорректности исходной задачи оно является плохо обусловленным. Однако, используя подробно описанный в [8] метод уменьшения числа обусловленности задачи путем усечения спектра собственных значений симметричной матрицы A в зависимости от точности исходных данных f , удается получить устойчивое приближенное решение уравнения (8). Этот метод сводится к следующему. Если $A = U \Sigma V^T$ — сингулярное разложение матрицы A , где U и V — ортогональные $(N \times N)$ -матрицы и $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$, то устойчивое приближенное решение уравнения (8) имеет вид

$$\lambda = V \Sigma^+ U^T f.$$

Здесь $\Sigma^+ = \text{diag}(\sigma_1^+, \sigma_2^+, \dots, \sigma_N^+)$. Элементы σ_i^+ определяются из условия

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} 1/\sigma_i, & \sigma_i \geq \varepsilon \sigma_{\max}; \\ 0, & \sigma_i < \varepsilon \sigma_{\max}. \end{cases}$$

Уровень отбрасывания ε равен относительной точности задания правой части уравнения (8) или отношению шум/сигнал исходного сигнала $f(t)$. Алгоритм сингулярного разложения имеет эффективную реализацию в виде процедуры SVD [8].

На рис. 2, а приведен результат расчета релаксационного спектра сигнала $f(t) = e^{-0,1t} - e^{-0,2t}$ описанным выше методом. Интервал дискретизации $\Delta t = 1$. Из рисунка видно, что полученный спектр является близким к теоретическому релаксационному спектру $B(\alpha) = \delta(\alpha - 0,1) - \delta(\alpha - 0,2)$. Конечная ширина максимумов обусловлена, во-первых, шумом округления ЭВМ, снижающего потенциальную разрешающую способность, а во-вторых, тем, что описанный метод отыскивает приближение в виде непрерывной функции к теоретическому спектру, являющемуся обобщенной функцией. Это подтверждается рис. 2, б, где приведен ре-

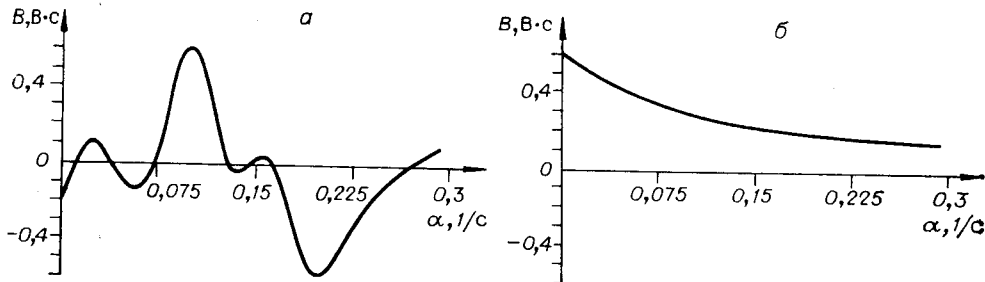


Рис. 2. Результаты определения релаксационного спектра вариационным методом для сигналов:

$$a - f(t) = e^{-0,1t} - e^{-0,2t}, \quad б - f(t) = 0,6/(5+t).$$

зультат определения $B(\alpha)$ для сигнала $f(t) = 0,6/(5+t)$, теоретический релаксационный спектр которого $B(\alpha) = 0,6e^{-5\alpha}$ является непрерывной функцией. Погрешность результата в этом случае равна $\approx 10^{-3}$.

Релаксационный анализ дискретных сигналов с помощью ассоциативного фильтра. Как было показано выше, при наличии шума на входе релаксационного анализатора удается разрешить лишь около 15 компонент. Поэтому естественным является желание построить метод, определяющий лишь эти 15 коэффициентов релаксационного спектра вместо непрерывной функции $B(\alpha)$, выиграв при этом в простоте алгоритма и времени анализа.

Таким образом, необходимо построить метод, определяющий коэффициенты B_k , $k = 1, N$, из системы уравнений

$$f_i = \sum_{k=1}^N B_k e^{-\alpha_k i \Delta t}, \quad i = \overline{0, M-1},$$

где $f_i = f(i\Delta t)$ — выборки из исходного сигнала $f(t)$; $\{\alpha_k\}$ — набор постоянных релаксации, отличающихся друг от друга на величину потенциальной разрешающей способности, зависящей от T , Δt и σ^2/A^2 .

Для построения метода воспользуемся теорией ассоциативной фильтрации. Термин «ассоциативный фильтр» предполагает некоторое преобразование входных сигналов в выходные, называемые ассоциациями, так как они могут иметь самую различную природу [9]. В данном случае в качестве ассоциации будет выступать вектор $B = (B_1, B_2, \dots, B_N)^T$ коэффициентов релаксационного спектра для входного вектора $f = (f_0, f_1, \dots, f_{M-1})^T$. Функционирование линейного ассоциативного фильтра описывается матричным уравнением

$$Af = B.$$

Здесь A — $(N \times M)$ -матрица фильтра. Поэтому с математической точки зрения построение фильтра сводится к определению матрицы A .

Для определения матрицы A построим матричное уравнение

$$\underbrace{A(f_1 : f_2 : \dots : f_L)}_F = \underbrace{(B_1 : B_2 : \dots : B_L)}_Y, \quad (9)$$

где f_k — k -вектор из обучающей последовательности векторов входных сигналов; B_k — вектор коэффициентов спектра, соответствующий f_k . В качестве обучающих последовательностей удобно взять выборки из элементарных релаксационных сигналов

$$f_k = \{e^{-\alpha_k i \Delta t}\}, \quad i = \overline{0, M-1}; \quad B_k = \overbrace{(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)}^{1 \ 2 \ \dots \ k \ \dots \ N}{}^T.$$

Тогда из (9) матрица A определяется так [9]:

$$A = YF^+,$$

где Y и F имеют смысл, указанный выше, «+» — знак псевдообращения по Муру — Пенроузу. Так как матрица F также имеет большое число обусловленности, то для псевдообращения необходимо пользоваться алгоритмом, описанным при решении уравнения (8).

Построенный таким образом ассоциативный фильтр осуществляет, как показано в [9], проецирование входного вектора f на обучающие векторы f_k . При этом если входной сигнал представляет собой линейную комбинацию обучающих векторов f_k , то выходной вектор совпадает с соответствующей линейной комбинацией обучающих векторов релаксационного спектра B_k . Если же входной сигнал не является линейной комбинацией f_k , т. е. он имеет компоненты с показателями α , равными промежуточным значениям между α_k , то выходной сигнал представляет собой такую линейную комбинацию B_k , что соответствующая линейная комбинация f_k наилучшим в смысле критерия минимальных квадратов образом аппроксимирует исходный сигнал. При этом погрешность в соответствии с соотношением (4) не превышает уровня шумов.



Рис. 3. Дискретные релаксационные спектры, полученные с помощью ассоциативного анализатора для сигналов:

$$a - f(t) = 1,5e^{-0,04t} - e^{-0,12t}, \quad б - f(t) = e^{-0,13t}.$$

На рис. 3 представлены результаты моделирования ассоциативного релаксационного анализатора на ЭВМ в случае $M = 20$; $N = 12$; $\Delta t = 1$; $\sigma^2/A^2 = 10^{-5}$. Появление дополнительных компонент в спектре объясняется тем, что на самом деле разрешающая способность анализатора хуже, чем определяется из соотношения (4), так как она получена лишь при учете аппроксимации одной экспоненты двумя, в то время как возможны и другие виды аппроксимации: две экспоненты — тремя; три — четырьмя и т. д.

ВЫВОДЫ

1. Получена оценка для интервала дискретизации по ширине релаксационного спектра сигнала.
2. Показано, что в условиях действия шумов на входе анализатора он имеет конечную потенциальную разрешающую способность, приведена оценка разрешающей способности.
3. Предложены устойчивые методы анализа дискретных сигналов по экспонентам с действительными показателями, которые имеют характеристики, близкие к потенциально возможным, и легко алгоритмируются для реализации средствами цифровой техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваксман М. Ю. Оптимальная оценка скорости спада переходного процесса. — В кн.: Научное приборостроение и автоматизация научного эксперимента. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1978.
2. Фаррар Т., Беккер Э. Импульсная и фурье-спектрометрия ЯМР. — М.: Мир, 1973.
3. Кон-Сфетку, Смит, Никольс, Генри. Цифровой метод анализа одного класса многокомпонентных сигналов. — ТИИЭР, 1975, т. 63, № 10.
4. Prost R., Goutte R. Performances of the method of linear systems identification by Mellin deconvolution. — Int. J. Control, 1977, vol. 25, N 1, p. 39—51.
5. Кочетков А. А., Крылов В. В., Пономарев Д. М. Анализ сигналов по действительным экспонентам. — АВТ, 1981, № 4.
6. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971.
7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
8. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
9. Кохонен Т. Ассоциативная память. — М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 30 ноября 1982 г.