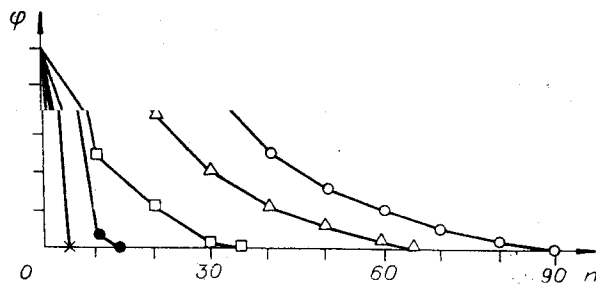


Таким образом, учет информации на S предыдущих шагах аналогичен процессу идентификации стационарного и нестационарного объектов. Вектор параметров c^* выбирался равным: $c^* = (0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35)^T$. В качестве компонент входных векторов принимались последовательности нормально распределенных случайных величин (типа дискретного белого шума) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Начальные значения параметров во всех случаях единичные. Проводилось усреднение результатов по 20 реализациям.



На рисунке приведена зависимость величины $\varphi = \|v_n\|^2 / \|v_0\|^2$ от n в случае идентификации стационарного объекта. На этом рисунке линия с кружками соответствует алгоритму с $S=1$, с треугольниками — $S=2$, с квадратами — $S=3$, с точками — $S=4$, с крестиками — $S=5$. Как следует из рисунка, с увеличением памяти алгоритма (S) скорость сходимости алгоритма (4) увеличивается и существенно превосходит скорость сходимости алгоритма Качмажа ($S=1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
2. Поляк Б. Т. Сравнение скорости сходимости одношаговых и многошаговых алгоритмов оптимизации при наличии помех.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1977, № 1.
3. Аведьян Э. Д. Модификационные алгоритмы Качмажа для оценки параметров линейных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 5.
4. Шильман С. В., Ястребов А. И. О свойствах одного класса многошаговых алгоритмов адаптации и обучения градиентного и псевдоградиентного типа.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 4.
5. Руденко О. Г., Салыга В. И., Штонда А. Н. Многошаговый адаптивный алгоритм идентификации.— В кн.: Управление металлургическими процессами и производствами и их моделирование.— М.: Металлургия, 1980.
6. Ланкастер П. Теория матриц.— М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.

УДК 62-50

А. И. БУРДО, В. Е. ПЯТЕЦКИЙ

(Темиртау Карагандинской)

РАЗРАБОТКА КЛАССА АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В задачах адаптивного управления важное место занимает идентификация моделей управляемых процессов, которые уточняются по мере накопления данных об объекте. Известные адаптивные одношаговые алгоритмы оценки неизвестных параметров процесса основаны на мини-

мизации выпуклого функционала, который соизмеряет с помощью функции рассогласования F выходные величины процесса (y_n) и модели (y_m), и отличаются способом выбора матрицы усиления $\Gamma[n]$ и функции рассогласования F [1—6]. Большинство из них являются алгоритмами типа Качмажа и его модификациями и пригодны при наличии малых помех. В случае, когда с малой вероятностью могут появляться очень большие значения помех (выбросы), увеличивается скорость сходимости алгоритма и оценки коэффициентов смещены и неэффективны [7]. Предлагаемые способы преодоления этого недостатка сводятся в основном к построению многошаговых процедур, в которых возрастает количество вычислений и повышается чувствительность оценок к ошибкам измерений [3].

В настоящей работе ставится задача получения класса одношаговых алгоритмов, пригодного при наличии «выбросов» у входных сигналов (x) и помех ξ и медленном дрейфе векторов параметров, когда модель и процесс с аддитивной помехой, приведенной к выходу, описываются уравнениями

$$y_m[n] = c^T[n-1]x[n], \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$$y_n[n] = \Phi(x[n], c^*) + \xi_y[n], \quad (2)$$

где $y_m \in R^1$, $y_n \in R^1$, $c \in R^p$, $c^* \in R^p$, $\xi_y \in R^1$, τ — знак транспонирования, n — дискретное время.

Рассмотрим квадратичный функционал качества:

$$J(c) = M \{ (y_n[n] - y_{m_0}[n])^2 \}. \quad (3)$$

Здесь $y_{m_0}[n]$ — выход модели с уточненными коэффициентами на n -м шаге; M — операция математического ожидания.

Введем в рассмотрение выражения

$$\Delta y_n[n] = y_n[n] - y_m[n] = y_n[n] - c^T[n-1]x[n];$$

$$\Delta y_{m_0}[n] = y_{m_0}[n] - y_m[n] = c^T[n]x[n] - c^T[n-1]x[n],$$

с учетом которых критерий (3) примет вид

$$J(c) = M \{ (\Delta y_n[n] - \Delta y_{m_0}[n])^2 \} = M \{ (\Delta y_n[n] - \Delta c^T[n]x[n])^2 \}. \quad (4)$$

Величина поправки $\Delta c[n]$ определяет качество алгоритма обучения и в классе одношаговых процедур зависит от $\Delta y_n[n]$, $x[n]$ и $c[n-1]$. Поэтому для повышения качества алгоритма обучения необходимы меры, связанные с выбором структуры поправки и с дополнительной информацией о входных сигналах и параметрах процесса.

Предлагается выбирать величину поправки

$$\Delta c[n] = Z\beta[n] \quad (5)$$

мультипликативно зависящей от параметров Z и $\beta[n]$, причем симметричный самосопряженный оператор Z содержит информацию о $c[n-1]$ и $x[n]$, а оптимизационный параметр $\beta[n]$ позволяет найти оптимальные свойства алгоритма и определяется из условия

$$J(\beta) = \|\Delta y_n[n] - \alpha(Zx[n])^T\beta[n]\|^2 \rightarrow \min_{\beta[n]}, \quad (6)$$

α — коэффициент, обеспечивающий сходимость алгоритма, о выборе которого будет сообщено ниже.

Относительно переменных x делается предположение об ограниченности их изменения в диапазоне от -1 до $+1$, полученное в результате несложного преобразования:

$$x = (2X - X^{\max} - X^{\min}) / (X^{\max} - X^{\min}),$$

где X , X^{\max} , X^{\min} — соответственно текущее, наибольшее и наименьшее значения наблюдаемого вектора входа.

Таким образом, задача может быть сформулирована следующим образом: найти $\Delta c[n]$ из условия минимума выражения (6). Решение по-

ставленной задачи возможно в рамках псевдообращения по Муру — Пенроузу [8]. Обозначим:

$$H = Zx[n]. \quad (7)$$

По теореме из [8, с. 41] вектор $\beta[n]$, минимизирующий (6), является единственным, когда

$$\beta[n] = \alpha H^+ \Delta y_n[n], \quad (8)$$

где H^+ — псевдообратная матрица.

Псевдообратная матрица H^+ определяется через H (строки матрицы H линейно-независимы):

$$H^+ = H^r / H^r H.$$

Тогда с учетом (7) выражение для оптимизационного параметра $\beta[n]$ запишется следующим образом:

$$\beta[n] = \alpha (\Delta y_n[n] / (Zx[n])^r (Zx[n])) Zx[n], \quad (9)$$

а рекуррентная форма алгоритма адаптации, свойства которого определяются уровнем помех в каналах наблюдения (с учетом Z), примет вид

$$c[n] = c[n-1] + \alpha (\Delta y_n[n] / (Zx[n])^r (Zx[n])) Z^2 x[n]. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

Теорема 1. Если процесс описывается (2) без помех, модель — соотношением (1) и выполнены ограничения

$$x^r Z^2 x \leq A \|x\|^2; \quad (11)$$

$$|\Delta c^r Z^2 x| \leq A |\Delta y|, \quad (12)$$

то при $0 < \alpha < 2$ алгоритм (10) сходится.

Теорема 2. Если процесс описывается (2) с помехой, центрированной и ограниченной, модель — соотношением (1) и выполнены ограничения

$$x^r Z^2 x \leq B \|x\|^2; \quad (13)$$

$$|\Delta c^r Z^2 x| \leq B (|\Delta y| + |\xi_v|), \quad (14)$$

то при $0 < \alpha < \frac{2M \{ \Delta y / \|x\|^2 \}}{M \{ (\Delta y)^2 / \|x\|^2 \}}$ алгоритм (10) сходится.

Лемма 1. Если норма матрицы Z^2 ограничена и верно

$$\|Z^2\| \leq A (\sqrt{\lambda} / \sqrt{p}) |\Delta y|,$$

то выполнены ограничения (11), (12), где A, λ — некоторые числа; p — размерность вектора x .

Доказательство. Известно, что $\|Z^2\| = \|ZZ\| \leq \|Z\| \|Z\|$. В нашем случае Z — диагональная матрица, поэтому $\|Z\| = \max Z_{ii}$. Если $\|Z\| = \max Z_{ii} \leq A_1$, то, применяя неравенство Коши — Шварца, будем иметь

$$x^r Z^2 x \leq \|Z^2\| \|x\|^2 \leq \|Z\| \|Z\| \|x\|^2 \leq A_1^2 \|x\|^2 \leq A \|x\|^2.$$

Таким образом, неравенство (11) выполнено.

Для доказательства неравенства (12) введем новые переменные f и t .

Сделаем подстановку: $x_i = f_i \sqrt{p}$, $\Delta c_i = t_i / \sqrt{\lambda}$, чтобы $\|f\| \leq 1$ и $\|t\| \leq 1$, причем

$$\lambda \leq 1 / \|\Delta c\|. \quad (15)$$

Тогда левая часть неравенства (12) будет равна

$$\left| \frac{t^r}{\sqrt{\lambda}} Z^2 f \sqrt{p} \right| = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} |t^r Z^2 f|.$$

Оператор Z^2 ограниченный и самосопряженный, поэтому для него применима теорема [9]

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} |(Af_1g)| = \sup_{\|f\|=1} |(Af_1f)|$$

или в наших обозначениях:

$$\sup_{\|f\|=1} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} |t^T Z^2 f| = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} \sup_{\|f\|=1} |Z^2 f^2|.$$

По теореме [10] квадратичная форма достигает своего минимума на собственном векторе и этот минимум равен собственному числу:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} \sup_{\|f\|=1} |Z^2 f^2| = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} \sup_{\|f\|=1} Z^2 f^2 = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}} \max Z_{ii}^2,$$

где $\max Z_{ii}^2$ — максимальный элемент матрицы Z^2 . Чтобы точная граница левой части неравенства (12) все же превосходила правую часть, т. е. $(\sqrt{p}/\sqrt{\lambda}) \max Z_{ii} \leq A|\Delta y|$, необходимо, чтобы

$$\max Z_{ii}^2 \leq (\sqrt{\lambda}/\sqrt{p}) A|\Delta y|. \quad (16)$$

Следовательно,

$$(\sqrt{p}/\sqrt{\lambda}) |t^T Z^2 f| \leq A|\Delta y|.$$

Таким образом, элементы матрицы Z^2 определяются соотношением (16), причем λ определяется соотношением (15).

Доказательство теоремы 1. С учетом обозначения $\Delta c[n] = c^* - c[n]$ алгоритм (10) переписывается как

$$\Delta c[n] = \Delta c[n-1] - \alpha(\Delta y_n[n]/x^T[n]Z^2x[n])Z^2x[n]. \quad (17)$$

Оценим (17) по норме:

$$\begin{aligned} \|\Delta c[n]\|^2 &= \|\Delta c[n-1]\|^2 - 2\alpha \frac{\Delta y_n[n]}{x^T[n]Z^2x[n]} \Delta c^T[n-1]Z^2x[n] + \\ &+ \alpha^2 \frac{\Delta y_n^2[n]}{(x^T[n]Z^2x[n])^2} x^T[n]Z^4x[n]. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно лемме 1 выполнимы условия (11) и (12). Тогда (18) примет вид

$$\|\Delta c[n]\|^2 \leq \|\Delta c[n-1]\|^2 - 2\alpha \frac{\Delta y_n^2[n]}{\|x[n]\|^2} + \alpha \frac{\Delta y_n^2[n]}{\|x[n]\|^2}.$$

Алгоритм (18) сходится, если на каждом шаге для функций Ляпунова

$$\Delta V[n] = \|\Delta c[n]\|^2 - \|\Delta c[n-1]\|^2$$

выполняется условие

$$\Delta V[n] = -2\alpha \frac{\Delta y_n^2[n]}{\|x[n]\|^2} + \alpha^2 \frac{\Delta y_n^2[n]}{\|x[n]\|^2} \leq 0.$$

Преобразуем полученное неравенство к виду

$$\Delta V[n] = \frac{\Delta y_n^2[n]}{\|x[n]\|^2} (\alpha^2 - 2\alpha) \leq 0.$$

Оно удовлетворяется при $0 < \alpha < 2$. Теорема доказана.

Лемма 2. Если норма матрицы Z^2 ограничена и верно соотношение

$$\|Z^2\| \leq B(\sqrt{\lambda}/\sqrt{p})|\Delta \tilde{y}|, \quad (19)$$

то выполняются ограничения (13), (14), где B , λ — некоторые числа; p — размерность вектора x ; λ удовлетворяет соотношению (15).

Доказательство. Доказательство первой части леммы аналогично доказательству первой части леммы 1.

Для доказательства второй части заметим, что $|\Delta\tilde{y}| \leq |\Delta y| + |\xi_v|$. Поэтому при выполнении (19) неравенство (14) будет выполнено. Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Используя обозначения $\Delta c[n] = c^* - c[n]$, алгоритм (10) при измерениях с помехой запишем как

$$\Delta c[n] = \Delta c[n-1] - \alpha(\Delta\tilde{y}[n]/x^T[n]Z^2x[n])Z^2x[n].$$

Оценим это выражение по норме:

$$\begin{aligned} \|\Delta c[n]\|^2 &= \|\Delta c[n-1]\|^2 - 2\alpha(\Delta\tilde{y}[n]/x^T[n]Z^2x[n])\Delta c^T[n-1]Z^2x[n] + \\ &+ \alpha^2((\Delta\tilde{y}[n])^2/(x^T[n]Z^2x[n])^2)x^T[n]Z^4x[n]. \end{aligned}$$

При выполненных условиях (13) и (14) для математического ожидания обеих частей будем иметь

$$\begin{aligned} M\{\|\Delta c[n]\|^2\} &\leq M\{\|\Delta c[n-1]\|^2\} - M\{2\alpha(|\Delta y[n]| + |\xi_v[n]|)B/B\|x[n]\|^2\} + \\ &+ M\{\alpha^2((\Delta\tilde{y}[n])^2/(B^2\|x[n]\|^2)^2)B^4\|x[n]\|^2\}. \end{aligned}$$

Алгоритм сходится, если

$$M\{\Delta V[n]\} = M\{\|\Delta c[n]\|^2 - \|\Delta c[n-1]\|^2\} \leq 0,$$

т. е.

$$-2\alpha M\{\Delta y[n]/\|x[n]\|^2\} + \alpha^2 M\{(\Delta\tilde{y}[n])^2/\|x[n]\|^2\} \leq 0$$

при

$$0 < \alpha < \frac{2M\{\Delta y[n]/\|x[n]\|^2\}}{M\{(\Delta\tilde{y}[n])^2/\|x[n]\|^2\}}.$$

Теорема доказана.

РЕКОМЕНДАЦИИ И СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Оператор Z в алгоритме (10) предлагается задавать мультипликативной функцией вида

$$Z = |c[n-1]|^m |x[n]|^k. \quad (20)$$

Выбирая различные m, k , можно получить ряд известных алгоритмов. Например, при $m=k=0$ находим алгоритм из [1], при $m=0$ и $k=-1/2$ — алгоритмы из [2, 6]. Если процесс не имеет выбросов и помех, то при $Z=1$ ($m=0, k=0$) условия (11) и (13) теоремы аналогичны условию (4) из [7], и в этом случае, согласно [1], очевидно выполнение условия (12). Если процесс имеет выбросы, условие (14) теоремы 2 может не выполняться и для сходимости алгоритма свойства оператора Z должны быть такими, чтобы при значительных отклонениях c от c^* выбирать $m=1/2$ и $k=0$, а в случае приближения к $c^* - m=1/2$ и $k=-1/2$.

Для оценки предложенных и известных алгоритмов была разработана имитационная модель [11], состоящая из шести основных блоков. В блоках процессов и моделей осуществляется расчет $y_n[n]$ и $y_m[n]$ для различных вариантов модели (1) и процесса (2). В блоке адаптации производится корректировка коэффициентов модели для различных алгоритмов адаптации. Расчет оценок качества алгоритмов по близости коэффициентов модели ($c[n]$) к эталонным (c^*) и выходных величин модели ($y_m[n]$) и процесса ($y_n[n]$) проводится в блоке критериев в соответствии с известными показателями [4] (таблица). В блоке формирования случайных процессов моделируются входные воздействия и помехи как случайные процессы [12] в виде дискретных реализаций с заданным законом распределения и любой типовой корреляционной функцией. Задача синтеза дискретных случайных процессов решена путем отыскания удобных для реализации на ЦВМ линейных и нелинейных преобразований

АЛГОРИТМЫ	2	3	4	5	6
1 $c[n] = \hat{c}[n-1] + \frac{y_{\Pi}[n] - \hat{c}^T[n-1]x[n]}{x^T[n]x[n]}$ $\hat{c}[n] = \hat{c}[n-1] + \alpha[n](\hat{c}[n-2] - c[n-1])$ $\alpha[n] = \begin{cases} 1, \rho^2(\hat{c}[n-2]; \tilde{c}[n]) > \rho^2(\hat{c}[n-2]; \hat{c}[n-1]); \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$	$J_1[u] = \sum_{c=0}^{I-1} ([1-u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c}) \times 10^z - \sum_{c=0}^{I-1} ([1-u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c})$	$J_2[u] = \sum_{c=0}^{I-1} ([u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c}) \times 10^z$	$J_3[u] = \sum_{c=0}^{I-1} ([u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c}) \times 10^z$	$J_4[u] = \sum_{c=0}^{I-1} ([1-u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c}) \times 10^z$	$J_5[u] = \sum_{c=0}^{I-1} ([u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c}) \times 10^z - \sum_{c=0}^{I-1} ([u]^{2c} - \frac{c}{\Pi} [u]^{2c})$
$c[n] = c[n-1] + \frac{\Delta y_{\Pi}[n]}{\gamma + x^T[n]x[n]} x[n]$	9,6 31,4	2,6 9,8	414,5 450,3	296 350	356,2 739,2
$c[n] = c[n-1] + \frac{\Delta y_{\Pi}[n]}{x^T[n] \text{sign } x[n]} \text{sign } x[n]$	0,2 8,2	0,7 9,3	2,4 6	0,6 15,7	0,8 60,2
$c[n] = c[n-1] + \frac{\Delta y_{\Pi}[n]}{x^T[n]x[n]} x[n]$	1,2 12,3	0,4 1,7	1,6 35,2	2,3 25,4	1,8 43,5

1	2	3	4	5	6
$c[n] = c[n-1] + \alpha_1 \Delta y_n[n] \operatorname{sign} x[n]$	0,4 1,7	3,5 12,2	7,8 38,6	2,6 3,6	19,2 231,3
$c[n] = c[n-1] + \alpha \frac{\Delta y_n[n]}{ c^\tau[n-1] x[n] \operatorname{sign} x[n] } c[n-1] \operatorname{sign} x[n] $	0,2 0,4	0,2 0,6	3,6 12,4	0,6 1,6	5,3 10,9
$c[n] = c[n-1] + \alpha \frac{\Delta y_n[n]}{(c^\tau[n-1])^2 x^2[n]} c^2[n-1] x[n]$	0,3 3,6	1,7 4,4	4,7 13,1	0,3 1,3	0,5 31,6
$c[n] = c[n-1] + \alpha \frac{\Delta y_n[n]}{ c^\tau[n-1] x^2[n] } c[n-1] x[n] $	0,4 0,2	0,1 1,1	0,6 5,7	0,3 0,9	0,9 10,2

Примечание: α, γ — параметры, выбираемые, согласно рекомендациям [1]; c^1 — значение коэффициента модели на последнем (N_{II}) шаге обучения; N_{II} — последний шаг обучения; N — длина интервала сглаживания.

равномерно или нормально распределенных псевдослучайных чисел в случайные последовательности с требуемыми статистическими свойствами. Имитационная модель позволяет моделировать нормально и равномерно распределенные случайные процессы с выбросами.

Сравнивалась работа известных алгоритмов (см. таблицу) с предлагаемыми, когда $m=0$ и $k=-1/2$; $m=0$ и $k=0$; $m=1/2$ и $k=-1/2$; $m=1$ и $k=0$; $m=1/2$ и $k=0$. Результаты моделирования без помехи ξ_y^τ и выбросов и для случая $\xi_y^\tau \neq 0$ и вероятности появления выбросов, равной 0,1, приведены в таблице, где указаны значения критериев для рассматриваемых случаев.

Рассматривалась модельная задача, в которой искомым 5-мерный вектор параметров процессов равнялся $c^* = (100; -10; 15; 40; 60)$. Статистически независимые компоненты вектора $x[n]$ в первом случае представляли собой реализации гауссовых стационарных случайных процессов с нулевым средним, а во втором — случайные процессы с нормальным законом распределения и выбросами, имеющими нормальный закон распределения для первой, третьей, пятой координат и равномерный закон распределения для второй и четвертой координат вектора входов. Помеха ξ_y^τ моделировалась по нормальному закону. Корреляционные функции для моделирования имели вид $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau}$, где дисперсии для входов $\sigma_x^2 = (5; 400; 10; 8; 8)$, для выбросов $\sigma_{\text{выб}}^2 = (100; 880; 220; 176; 176)$, для помехи $\sigma_y^2 = (35)$. Данные таблицы показывают более удовлетворительные результаты работы в условиях помех с выбросами алгоритмов (1), (3), (6), (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей процессов производства.— М.: Энергия, 1975.
2. Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розовоэр Л. И. Метод потенциальных функций.— М.: Наука, 1970.
3. Аведьян Э. Ц. Модифицированные алгоритмы Качмажа для оценки параметров линейных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 5.
4. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
9. Ахисезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
10. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1971.
11. Пятецкий В. Е., Бурдо А. И. Имитационное моделирование процесса создания обучающихся систем.— В кн.: Имитационное моделирование производственных процессов. Новосибирск: ИЭиОПГ СО АН СССР, 1979.
12. Дьячко А. Г., Пятецкий В. Е., Бурдо А. И. Статистическое моделирование случайных процессов в задачах идентификации адаптивных систем.— В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. совещ. по статистическим методам в процессах управления. Алма-Ата, сентябрь 1981. М.: Ин-т проблем управления, 1981.

Поступила в редакцию 16 декабря 1982 г.
