

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.2 : 621.391

В. С. КИРИЧУК, В. П. КОСЫХ, А. И. ПУСТОВСКИЙ
(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЛАБОКОНТРАСТНЫХ ЭЛЕКТРОННО-МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Электронные микрофотографии биологических объектов, полученные при слабых электронных дозах в присутствии контрастирующего вещества, обладают сильными шумами, скрывающими истинную структуру изучаемых объектов, в связи с чем невозможна непосредственная интерпретация этих фотографий. Восстановление структуры может быть достигнуто при накоплении большого количества изображений одинаковых объектов, что оказывается возможным благодаря наличию на фотографии множества таких изображений. Одним из способов накопления является цифровой способ, когда изображение дискретизируется по координатам и оптической плотности и подвергается обработке на ЭВМ. В силу того, что фрагменты микрофотографии, содержащие изображения одинаковых объектов, расположены случайным образом, их точное совмещение, необходимое для осуществления накопления, является наиболее сложным этапом восстановления. Совмещение может быть выполнено с помощью метода максимального правдоподобия, который при весьма слабых ограничениях обеспечивает оценки с минимальной дисперсией.

Выберем одно из имеющихся изображений в качестве опорного и представим его в дискретизованном виде:

$$G_0 = (g_{ij}^{(0)}) = (f_{ij} + \xi_{ij}^{(0)}), \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Здесь f_{ij} — элемент истинного восстанавливаемого изображения F объекта, а $\xi_{ij}^{(0)}$ — шум регистрации.

Предположим, что имеются N изображений, которые необходимо совместить с опорным. Представим их в виде

$$G_s = (g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)}) = (f_{ij} + \xi_{i+h_s, j+t_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, N}.$$

При таком способе представления s -е изображение предполагается смещенным относительно опорного на k_s, t_s шагов вдоль направлений дискретизации. Параметры k_s и t_s неизвестны и должны быть определены в процессе совмещения.

Предположим, что шумы регистрации не коррелированы и подчиняются нормальному распределению с нулевым средним и, возможно, с различными на разных фрагментах дисперсиями

$$\xi^{(s)} \in N(0, \sigma_s^2); \quad s = \overline{0, N}.$$

Тогда логарифм совместной функции правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} l(G_0, G_1, \dots, G_N/F, k_1, \dots, k_N, t_1, \dots, t_N) &= l(G/F, k, t) = \\ &= -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (g_{ij}^{(0)} - f_{ij})^2 - \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\sigma_s^2} (g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} - f_{ij})^2. \end{aligned} \quad (1)$$

(В выражении (1) опущен член, не зависящий от F, k_s, t_s и не влияющий на положение максимума логарифма функции правдоподобия). Оценками максимального правдоподобия восстанавливаемого изображения и параметров смещения являются такие значения $\hat{f}_{ij}, \hat{k}_s, \hat{t}_s$, при которых $l(G/F, k, t)$ достигает максимума, а следовательно, частные производные $l(G/F, k, t)$ по искомым параметрам обращаются в 0. Это условие задает систему уравнений, решением которой являются искомые параметры \hat{f}_{ij}, k_s, t_s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(G/F, k, t)}{\partial f_{ij}} &= 0, \quad m \times n \text{ уравнений;} \\ \frac{\partial l(G/F, k, t)}{\partial k_s} &= 0, \quad N \text{ уравнений;} \\ \frac{\partial l(G/F, k, t)}{\partial t_s} &= 0, \quad N \text{ уравнений} \end{aligned} \quad (2)$$

$$(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; s = \overline{1, N}).$$

Из первых $m \times n$ уравнений (2) следует, что при известных оценках \hat{k}_s и \hat{t}_s оценки \hat{f}_{ij} имеют вид

$$\hat{f}_{ij} = \left(\sum_{s=0}^N \frac{1}{\sigma_s^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} g_{ij}^{(0)} + \sum_{s=1}^N \frac{1}{\sigma_s^2} g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} \right). \quad (3)$$

Поскольку вид функции f неизвестен, аналитическое решение системы (2) невозможно, но \hat{f}_{ij} могут быть получены с помощью процедуры численной максимизации выражения (1).

Рассмотрим теперь ковариационную матрицу K оценок $\hat{f}_{ij}, \hat{k}_s, \hat{t}_s$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; s = \overline{1, N}$), определяющую точность совмещения и восстановления изображения:

$$K = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s^2} \right\rangle & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s \partial t_s} \right\rangle & \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s \partial f_{ij}} \right\rangle & \dots \\ \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial t_s \partial k_s} \right\rangle & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial t_s^2} \right\rangle & \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial t_s \partial f_{ij}} \right\rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij} \partial k_s} \right\rangle & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij} \partial t_s} \right\rangle & \dots & \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij}^2} \right\rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1}.$$

Здесь знак $\langle \cdot \rangle$ обозначает операцию вычисления математического ожидания. Элементы матрицы K могут быть выражены через значения восстанавливаемого изображения. Вычислим, например, $\left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s^2} \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial k_s^2} &= -\frac{1}{2\sigma_s^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 l}{\partial k_s^2} (g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} - f_{ij})^2 = \frac{1}{\sigma_s^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial k_s} g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} - f_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial k_s^2} g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} \right]. \end{aligned}$$

Заменяя производные разностями и учитывая, что

$$g_{i+h_s, j+t_s}^{(s)} = f_{ij} + \xi_{i+h_s, j+t_s},$$

для некоррелированных измерений получим

$$\left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s^2} \right\rangle = \sigma_s^{-2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \right)^2. \quad (4)$$

(Индексы i, j при f означают, что производная берется в точке i, j .)
Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial t_s^2} \right\rangle &= \sigma_s^{-2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right)^2; \\ \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s \partial t_s} \right\rangle &= \sigma_s^{-2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right); \\ \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s \partial t_p} \right\rangle &= \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial k_s \partial k_p} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial t_s \partial t_p} \right\rangle = 0, \quad s \neq p; \\ \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij}^2} \right\rangle &= \sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}; \\ \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij} \partial k_s} \right\rangle &= -\sigma_s^{-2} \frac{\partial f_{ij}}{\partial k}; \\ \left\langle -\frac{\partial^2 l}{\partial f_{ij} \partial t_s} \right\rangle &= -\sigma_s^{-2} \frac{\partial f_{ij}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4')$$

Тогда матрицу K можно представить в виде

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5)$$

Матрица A квадратная с размерностью $2N \times 2N$ и блочной структурой

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} P & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^{-2} P \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$P = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \right)^2 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right) & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (6')$$

Матрица B имеет размерность $2N \times mn$ и тоже может быть представлена в виде блоков

$$B = - \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} F \\ \sigma_2^{-2} F \\ \dots \\ \sigma_N^{-2} F \end{bmatrix}, \quad (7)$$

причем

$$F = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial k} & \dots \\ \dots & \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} & \dots \end{bmatrix}. \quad (7')$$

Матрица D , как следует из (4'), имеет вид

$$D = \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right) I$$

(здесь I — единичная матрица размерностью $mn \times mn$).

Воспользовавшись известным результатом *, получим

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BE^{-1}B^TA^{-1} & -A^{-1}B^TE^{-1} \\ -A^{-1}BE^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix},$$

где $E = D - B^TA^{-1}B$, а $E^{-1} = D^{-1} - D^{-1}B^T(BD^{-1}B^T - A)^{-1}BD^{-1}$. Диагональные элементы матрицы E^{-1} определяют дисперсию элементов восстановленного изображения. Учитывая вид матрицы D , можно показать, что E^{-1} приводится к виду

$$E^{-1} = \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right)^{-1} I + \frac{\sigma_0^2 \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}} F^T P^{-1} F.$$

Дисперсия восстановленного изображения в точке (i, j) соответствует элементу матрицы $E_{ij,ij}^{-1}$ (здесь двойные индексы означают, что из матриц F и F^T выбираются столбцы и строки, содержащие производные в соответствующей точке):

$$\sigma_{f_{ij}}^2 = \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right)^{-1} + \frac{\sigma_0^2 \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}} (F^T P^{-1} F)_{ij,ij}.$$

Предположим, что матрица P диагональна и

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \right)^2 = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} Q.$$

(Это условие выполняется, например, в случае симметрии изображения относительно направлений дифференцирования.) Тогда

$$\sigma_{f_{ij}}^2 = \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right)^{-1} + \frac{\sigma_0^2 \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2}} \frac{q_{ij}}{Q}, \quad (8)$$

где

$$q_{ij} = \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial k} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \right)^2.$$

Видно, что ошибка восстановления распадается на две аддитивные компоненты: первая зависит от количества исходных фрагментов и с увеличением N стремится к нулю, а вторая при увеличении N асимптотически стремится к величине

$$\gamma_{ij}^2 = \sigma_0^2 \frac{q_{ij}}{Q}. \quad (9)$$

Легко видеть, что первая компонента равна ошибке восстановления при накоплении фрагментов изображения в случае точно известного их взаимного расположения. Вторая компонента определяет вклад в ошибку за счет неточного совмещения фрагментов. Числитель (9) есть не что иное, как квадрат модуля градиента в точке (i, j) истинного изображения, а знаменатель — сумма квадратов модулей градиента по всему изображению. Из этого следует, в частности, что ошибка восстановления больше в тех точках изображения, где градиент велик по абсолютной величине. Это естественно, поскольку в этих точках даже малые смещения приводят к значительному «смазыванию» восстановленного изображения.

* Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.

Определим среднюю ошибку восстановления как след матрицы E^{-1} , отнесенной к количеству элементов восстанавливаемого изображения:

$$\overline{\sigma_f^2} = \frac{1}{mn} \text{Sp}(E^{-1}) = \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right)^{-1} + \frac{1}{mn} \sigma_0^2 \left(\sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right) \left(\sigma_0^{-2} + \sum_{s=1}^N \sigma_s^{-2} \right)^{-1}.$$

Представляет интерес зависимость ошибки восстановления от дисперсий шума в опорном и совмещаемых фрагментах. Для простоты предположим, что все совмещаемые с опорным фрагменты обладают одинаковой дисперсией шума, т. е. $\sigma_s^2 = \sigma^2$ для всех $s \neq 0$. Тогда

$$\overline{\sigma_f^2} = \frac{\sigma_0^2 \sigma^2}{\sigma^2 + N\sigma_0^2} + \frac{1}{mn} \frac{N\sigma_0^4}{\sigma^2 + N\sigma_0^2}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что ошибка восстановления несимметрична относительно исходных объектов: если в опорном фрагменте нет шума ($\sigma_0^2 = 0$), ошибка восстановления нулевая, тогда как при отсутствии шума в совмещаемых фрагментах ошибка восстановления остается. Этот факт становится понятным, если учесть, что в соответствии с методом максимального правдоподобия вес каждого фрагмента в восстановленном изображении обратно пропорционален дисперсии шума на этом фрагменте. При $\sigma_0^2 = 0$ для восстановления используется лишь опорный фрагмент, при этом задача совмещения фактически теряет смысл. При $\sigma^2 = 0$ в восстановленном изображении остаются лишь совмещаемые фрагменты,

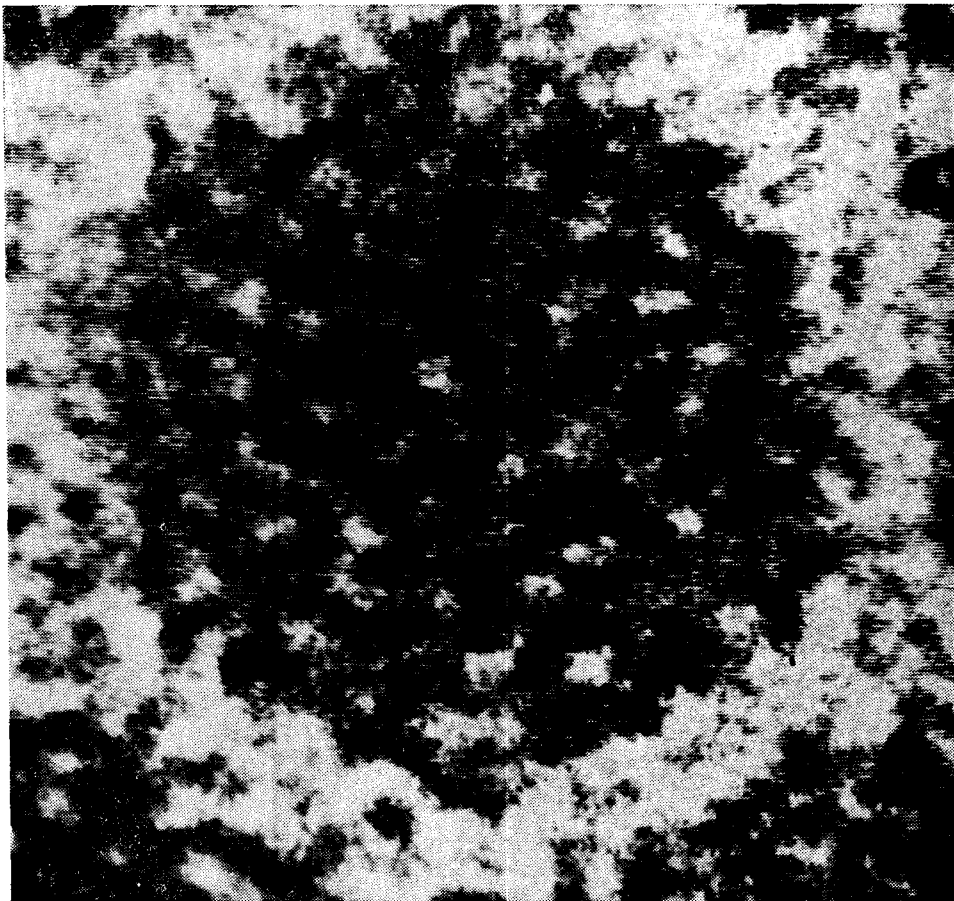


Рис. 1.

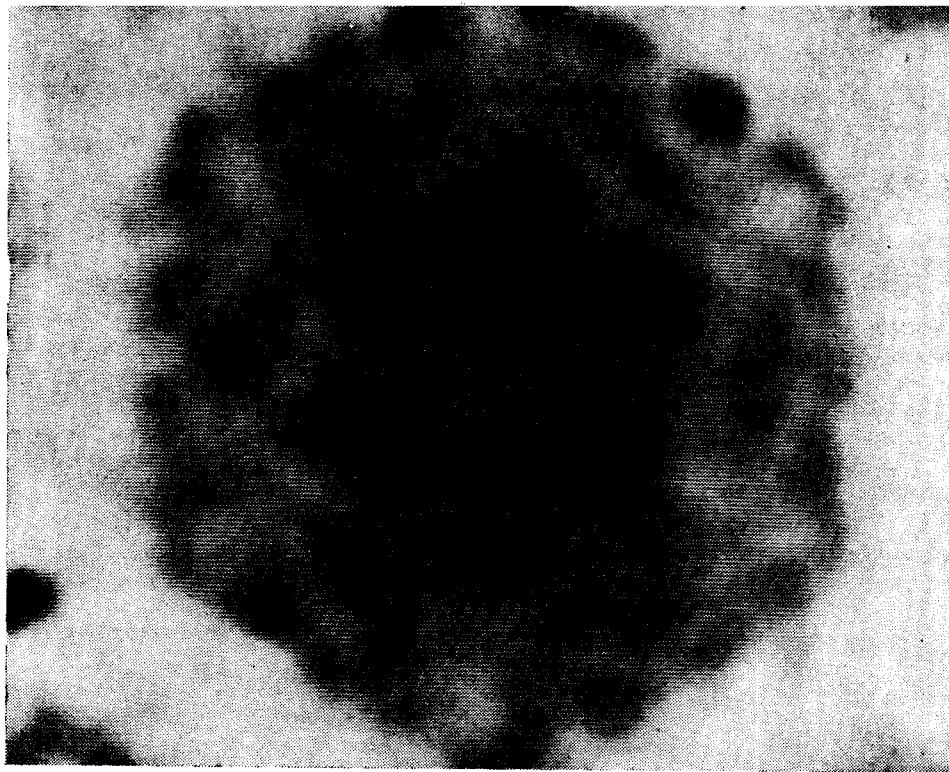


Рис. 2.

но поскольку совмещение осуществляется через опорный фрагмент, в котором есть шум, есть и ошибка совмещения, а следовательно, и ошибка восстановления. Из этого следует, что наилучшее восстановление достигается в том случае, когда в качестве опорного выбирается фрагмент с минимальной дисперсией шума. В случае если априорные сведения о величине шума отсутствуют, можно предварительно усреднить фрагменты, предполагая, что шумы в них одинаковы. Затем за оценку дисперсии шума s -го фрагмента может быть принята величина

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{r=0}^N \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (g_{i+k_r, j+t_r}^{(r)} - \hat{f}_{ij})^2, \quad s = \overline{0, N},$$

после чего можно выполнить еще один шаг восстановления, используя в (3) вместо дисперсий σ_s^2 их оценки $\hat{\sigma}_s^2$.

Рассматриваемый подход применен для восстановления изображения ячейки кристаллического монослоя вируса пятнистой мозаики (исходная электронная микрофотография предоставлена ИК АН СССР). На исходном снимке видна достаточно регулярная упаковка отдельных ячеек, однако внутренняя структура ячейки полностью подавлена шумами регистрации (рис. 1). Регулярность размещения ячеек упрощает задачу совмещения, обеспечивая при максимизации функционала (1) хорошие начальные приближения. На рис. 2 приведено восстановленное изображение, полученное накоплением 64 фрагментов, содержащих отдельные ячейки. Априорно известно, что структура ячейки симметрична относительно поворота на 120° . Поэтому можно выполнить еще один этап на-

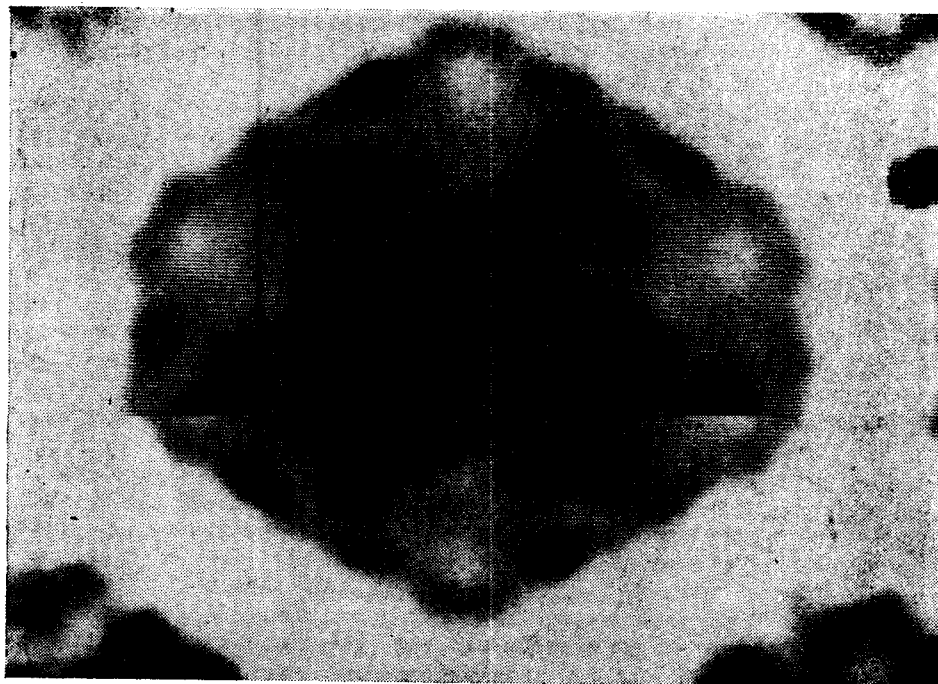


Рис. 3.

копления, симметризуя и усредняя изображение по трем исходным, повернутым друг относительно друга на 120° . Результат этой процедуры представлен на рис. 3.

Поступила в редакцию 21 апреля 1983 г.

УДК 681.3.06

Б. Х. ЗИНГЕР, Э. А. ТАЛНЫКИН
(Новосибирск)

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ
СОТИРОВКА — ОСНОВА АЛГОРИТМА УДАЛЕНИЯ
НЕВИДИМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ДЛЯ СИСТЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОГО ТИПА**

Введение. При отображении трехмерных сцен в системах машинной графики удаление невидимых частей изображения (закрываемых другими элементами сцены) является одним из важнейших факторов достижения реальности изображений и требует, как правило, значительных вычислительных ресурсов. В работе [1] приведена классификация алгоритмов удаления невидимых частей изображения. Некоторые из этих