

а в качестве квазиправдоподобных оценок — оценки, соответствующие $l = 1, 2, 3$. Далее, применив выражения (10), (7), (2) и (3), можно найти дисперсии $D[\beta_1]$; $D[\beta_2]$; $D[\beta_3]$ и сравнить значения этих дисперсий с дисперсией оценки максимального правдоподобия, определив тем самым асимптотические эффективности линейно-комбинированных оценок относительно оценки максимального правдоподобия при $l = 1, 2, 3$. Полученные результаты приведены в таблице. Анализ результатов показывает, что, во-первых, асимптотическая эффективность линейно-комбинированных оценок значительно возрастает по сравнению с асимптотической эффективностью отдельных квазиправдоподобных оценок, во-вторых, эта асимптотическая эффективность монотонно увеличивается с увеличением числа квазиправдоподобных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента.— М.: Наука, 1971.
2. Jenrich R. I. Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators.— Ann. Math. Stat., 1969, vol. 40, p. 633.
3. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений.— М.: Сов. радио, 1976.
4. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.
5. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
6. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976, вып. 6.
7. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.— М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 11 февраля 1981 г.;
окончательный вариант — 6 июля 1983 г.*

УДК 621.396.1

Е. Л. КУЛЕШОВ

(Владивосток)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ С ВЫСОКИМ РАЗРЕШЕНИЕМ

Одним из важнейших методов исследования случайных процессов и полей является спектральный анализ. В приложениях часто возникает необходимость оценивать спектральную плотность случайного процесса по конечному ансамблю коротких реализаций. Широкий класс таких задач появляется при исследовании случайных полей, если результаты измерений представлены набором одномерных сечений. Например, подобные задачи встречаются в океанологии [1] при изучении турбулентности гидрофизических параметров, в спектральном анализе случайных процессов, если применяется метод Бартлетта [2], в соответствии с которым исходная реализация процесса разбивается на множество коротких реализаций и спектральная оценка получается усреднением по их множеству.

Задачи такого типа имеют особенности, которые не отражены в литературе по спектральному анализу [2, 3]. Во-первых, ковариационные свойства конечного преобразования Фурье и периодограмм исследованы в асимптотике при $\tau_0/T \rightarrow 0$ (τ_0 — интервал корреляции, T — длительность реализации) [3]. Для коротких реализаций могут оказаться существенными величины порядка τ_0/T , поэтому представляется важным нахождение точных корреляционных соотношений. Во-вторых, спектральная оценка, полученная усреднением периодограмм по множеству коротких реализаций, как правило, имеет существенное смещение и, следова-

тельно, плохое разрешение. Это одна из причин применения в последнее время (особенно в прикладных исследованиях [1]) параметрических спектральных оценок на основе процессов авторегрессии. В данной работе предлагается метод, позволяющий снизить смещение непараметрической оценки спектральной плотности, а также, оценить

$$= \int_{\tau_0}^{\infty} |B(\tau)| d\tau, \quad 0 < \gamma \ll 1. \quad \text{В последующем задача оценивания спектральной}$$

плотности рассматривается при условии, что длительность реализаций $T \geq \tau_0$. Если T близко к τ_0 , то реализацию будем называть короткой. Параметр γ выбирается из условия, что ошибки, связанные с отсечением ковариационной функции при больших аргументах $\tau > \tau_0$, существенно меньше других ошибок оценки спектральной плотности. Отметим, что, во-первых, введенное ограничение на T и τ_0 значительно слабее обычно рассматриваемых в спектральном анализе ($T \gg \tau_0$) [2]. Во-вторых, основные результаты, представленные ниже, будут справедливы при $T < \tau_0$, если вместо спектральной плотности исследуемого ССП рассматривать свертку спектральной плотности и функции $\sin v/v$. При этих условиях для ковариационных соотношений конечного преобразования Фурье справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $x(t)$ — ССП с нулевым средним, ковариационной функцией $B(\tau)$, спектральной плотностью $F(\omega)$ и временем корреляции

$$\tau_0 \leq T, \quad \text{тогда } \xi_k(\omega) = \int_{t_k}^{t_k+T} x(t) e^{-i\omega t} dt / \sqrt{T} \quad \text{имеет момент второго порядка}$$

$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = M \xi_k(\omega_1) \xi_l^*(\omega_2)$ (M — операция статистического усреднения), который определяется при $t_k = t_l$, $t_k - t_l = T$, $t_k - t_l \geq 2T$ соответственно:

$$\text{I. } A_{kh}(\omega_1, \omega_2) = e^{-i\omega^-(t_k+T/2)} \left[(F_1 + F_2) \frac{\sin \omega^- T/2}{\omega^- T} + (G_2 - G_1) \frac{\cos \omega^- T/2}{\omega^- T} \right], \quad \omega^- = \omega_1 - \omega_2, \quad (1)$$

$$F_i = F(\omega_i) = \int_{-T}^T B(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad G_i = G(\omega_i) = \int_{-T}^T B(\tau) \sin \omega_i |\tau| d\tau; \quad (2)$$

$$\text{II. } A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = e^{-i\omega^-(t_l+T)} [F_2 - F_1 + i(G_1 - G_2)] / (2i\omega^- T); \quad (3)$$

$$\text{III. } A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Ковариация величины ξ имеет вид

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} dt_1 \int_{t_l}^{t_l+T} dt_2 B(t_1 - t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}. \quad (5)$$

Замена переменных $\tau = t_1 - t_2$ преобразует область интегрирования в параллелограмм, стороны которого в системе координат t_2 , τ совпадают с прямыми $\tau = t_k - t_2$, $\tau = t_k + T - t_2$, $t_2 = t_l$, $t_2 = t_l + T$. После интегрирова-

ния по t_2

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{i\omega^{-T}} \left\{ \int_{t_k-t_l}^{t_k-t_l+T} d\tau B(\tau) \left[e^{-i\omega^-(t_k+T-\tau)} - e^{-i\omega^-t_l} \right] + \right. \\ \left. + \int_{t_k-t_l-T}^{t_k-t_l} d\tau B(\tau) e^{-i\omega_1\tau} \left[e^{-i\omega^-(t_l+T)} - e^{-i\omega^-(t_k-\tau)} \right] \right\}. \quad (6)$$

Рассмотрим первый случай: $t_k - t_l = 0$. Используя определение (?) функции, слагаемое (6) обращается в нуль в соответствии с предположением $B(\tau) = 0$, $\tau \geq T$, и из (6) вытекает (3). В третьем случае $t_k - t_l \geq 2T$, и оба слагаемых (6) равны нулю.

Из (1) получаем соотношение для дисперсии $\text{var } \xi(\omega) = M|\xi(\omega)|^2 = F(\omega) - G'(\omega)/T$, т. е. периодограмма $|\xi|^2$ как спектральная оценка имеет смещение $-G'(T)$. Поэтому при оценивании по коротким реализациям, наряду со свойствами F , важную роль играют свойства функций G, G' . Соотношение (1), как видно из доказательства, остается справедливым и при $T < \tau_0$, если вместо F рассматривать свертку спектральной плотности и функции $\sin v/v$.

Связь функций G, G' и F, B . Непосредственно из определения (2) находим

$$G(\omega) = 2 \int_0^T B(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражение для ковариационной функции, имеем

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega') 2 \int_0^T d\tau \sin \omega \tau \cos \omega' \tau. \quad (9)$$

Вычисление интеграла в (9) приводит к выражению

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega') \left(\frac{1 - \cos(\omega + \omega')T}{\omega + \omega'} + \frac{1 - \cos(\omega - \omega')T}{\omega - \omega'} \right). \quad (10)$$

Преобразование Фурье для (8) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \sin \omega |\tau| d\omega = B(\tau). \quad (11)$$

Теперь, подставляя (11) в соотношение (2), получаем

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega') \left(\frac{1 - \cos(\omega' + \omega)T}{\omega' + \omega} + \frac{1 - \cos(\omega' - \omega)T}{\omega' - \omega} \right) d\omega'. \quad (12)$$

Результаты (8), (11) и (10), (12) являются парами интегральных преобразований, связывающих функции G, B и G, F . Из (8) или (10) несложно вывести соотношение

$$\frac{G'(\omega)}{T} = \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \left[\frac{\sin(\omega - \omega')T}{|(\omega - \omega')T|} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega - \omega')T/2}{(\omega - \omega')T/2} \right)^2 \right] d\omega'. \quad (13)$$

Снижение смещения оценок. Периодограмма $|\xi|^2$ как оценка спектральной плотности имеет смещение, равное $-G'/T$. Если число реализаций N достаточно велико, то оценка $\sum_k |\xi^{(k)}|^2/N$ (k — номер реализации) может иметь малую дисперсию по сравнению с $(G'/T)^2$ — квадратом смещения. Это проявится сильнее в локальных экстремумах спектральной плотности и при более коротких реализациях. В этом случае можно применить метод снижения смещения, основанный на формуле (13).

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — ССП, наблюдаемый на интервале $(t_0, t_0 + T)$, имеет нулевое среднее, ограниченную дисперсию, время корреляции $\tau_0 \leq T$ и ковариационную функцию B с интегрируемыми $B^2(\tau)$ и $|\tau|B^2(\tau)$.

Тогда последовательности спектральных оценок $f_k(\omega) = \sum_{i=0}^k L^i f_0(\omega)$, $k = 0, 1, \dots$ ($f_0 = |\xi|^2$, L — линейный оператор вида

$$L f_0(\omega) = \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega') \left[\frac{\sin(\omega - \omega')T}{(\omega - \omega')T} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega - \omega')T/2}{(\omega - \omega')T/2} \right)^2 \right] d\omega', \quad (14)$$

$L^2 f_0 = L(L f_0), \dots$) соответствует последовательность ковариационных оценок

$$\beta_k(\tau) = \beta_0(\tau) \sum_{i=0}^k (|\tau|/T)^i, \quad |\tau| \leq T$$

$$\left(\beta_0(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) dt/T, \quad |\tau| \leq T; \beta_0(\tau) = 0, \quad |\tau| > T; \right.$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k(\tau) = \beta(\tau) = \beta_0(\tau) T/(T - |\tau|)$; дисперсии предельных оценок β и $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ ограничены, причем $\text{var } \beta(\tau) < \infty$ для любого τ , а $\text{var } f(\omega) < \infty$ для любого конечного T .

Доказательство. Пределом последовательности ковариационных оценок является несмещенная оценка $\beta(\tau)$, следовательно $f(\omega)$ также несмещенная. Рассмотрим оценку f_1 . Как известно [2], оценке f_0 соответствует ковариационная оценка β_0 . Преобразование Фурье (14) определяется произведением $2\pi\beta_0$ на фурье-образ квадратной скобки. Преобразование Фурье функции $\sin \omega T/\omega$ равно 0,5 при $|\tau| < T$ и нулю при $|\tau| > T$ [4]. Аналогично функция $(\sin \omega T/2)/\omega^2$ имеет преобразование Фурье, равное $0,5(T/2 - |\tau|/2)$ при $|\tau| < T$ и нулю при $|\tau| > T$. Таким образом, для f_1 получаем преобразование Фурье $\beta_1(\tau) = \beta_0(\tau)(1 + |\tau|/T)$, $|\tau| < T$. Для оценки f_2 также несложно найти, что фурье-образ функции $L^2 f_0$ определяется выражением $\beta_0(\tau)(|\tau|/T)^2$, $|\tau| < T$ и $\beta_2(\tau) = \beta_0(\tau) \times (1 + |\tau|/T + (|\tau|/T)^2)$, $|\tau| < T$. В общем случае $\beta_k = \beta_0 \sum_{i=0}^k (|\tau|/T)^i$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k(\tau) = \beta_0(\tau) T/(T - |\tau|)$.

Рассмотрим дисперсии ковариационных оценок. Не учитывая кумулянт четвертого порядка,

$$\text{var } \beta_0(\tau) = \frac{1}{T^2} \int_{-(T-|\tau|)}^{T-|\tau|} (T - |\tau| - |t|) [B^2(t) + B(t - |\tau|)B(t + |\tau|)] dt. \quad (15)$$

Для несмещенной оценки $\text{var } \beta(\tau) = [T^2/(T - |\tau|)^2] \text{var } \beta_0(\tau)$. Поскольку B^2 и $|t|B^2(t)$ — интегрируемые функции, то $\text{var } \beta_0$ ограничена, а $\text{var } \beta(\tau)$ ограничена для $|\tau| \neq T$. Из (15) при $|\tau| \rightarrow T$ следует, что $\text{var } \beta_0(\tau) = \int_0^{T-|\tau|} (T - |\tau| - t) dt 2B^2(0)/T^2$, откуда $\text{var } \beta_0(T) = 0$, а также $\text{var } \beta(T) =$

$= B^2(0)$. Таким образом, дисперсия несмещенной ковариационной оценки ограничена. В [2] на одном из примеров неверно утверждается, что $\text{var } \beta(T) = \infty$. В действительности имеется возрастание дисперсии в граничных точках интервала $[-T, T]$, и это возрастание может быть существенным по сравнению, например, с величиной $\text{var } \beta(0) = \text{var } \beta_0(0) = 4B^2(0)\tau_1/T$, $\tau_1 = \int_0^T \left(B(t)/B(0) \right)^2 (1-t/T) dt$, если $T \gg \tau_1$.

Оценка f спектральной плотности является фурье-образом ковариационной оценки β , поэтому $\text{var } f(\omega) = \int_{-T}^T \int_{-T}^T \text{cov}(\beta(\tau_1), \beta(\tau_2)) \exp[-i\omega(\tau_1 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2$. Используя свойство интеграла, а также неравенство $|\text{cov } \beta(\tau_1), \beta(\tau_2)| \leq (\text{var } \beta(\tau_1) \text{var } \beta(\tau_2))^{1/2}$ при $\text{var } \beta < C$, получаем $\text{var } f(\omega) \leq 4T^2 C$, т. е. дисперсия предельной спектральной оценки ограничена при любом конечном T .

Спектральные оценки f_k , $k = 1, 2, \dots$, обладают меньшим смещением, чем периодограмма f_0 . В частности, смещение оценки f_1 обусловлено величиной $-L(G'/T)$, а f_0 — величиной $-G'/T = -LF$. Отсюда следует, что смещение оценки f_1 меньше, чем f_0 . Вообще, оценки f_k с большим индексом имеют меньшее смещение, а предельная оценка f несмещенная.

Дискретные представления. Следующей теоремой задаются дискретные аналоги полученных выше соотношений.

Теорема 3. Пусть $F(\lambda)$ и $\varphi(\omega, \lambda)$ имеют финитные преобразования Фурье по переменной λ на $(-T, T)$. Тогда $W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \varphi(\omega, \lambda)$ представима в виде $W(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta) \varphi(\omega, \Delta n) \Delta$, $\Delta = \pi/T$.

Доказательство этой теоремы приводится в [5]. В данной работе она использована для получения дискретных представлений функций G, G' . Применительно к линейным функционалам (10), (13) условие финитности преобразования Фурье F на интервале $(-T, T)$ согласуется с ограничениями на интервал корреляции и длительность наблюдения. Заметим, что преобразование Фурье для внутреннего интеграла в (9) равно $\sin \omega|\tau|$ при $|\tau| < T$ и нулю при $|\tau| > T$. Поэтому (10) удовлетворяет условию теоремы 3, а последующее ее применение приводит к соотношению

$$G_i = (2/\pi) \sum_l F_l/(i-l), \quad i-l \text{ нечетно.}$$

Здесь $G_i = G(i\Delta)$, $F_l = F(l\Delta)$. Аналогично в (13) выражение в квадратной скобке имеет преобразование Фурье, финитное на $(-T, T)$, и

$$G'_i/T = F_i/2 - (2/\pi^2) \sum_l F_l/(i-l)^2, \quad i-l \text{ нечетно.} \quad (16)$$

Спектральные оценки с высоким разрешением. Из соотношений (14), (16) следует, что оценка f_1 , обладающая повышенным разрешением по сравнению с периодограммой, в дискретном виде задается формулой

$$f_1^i = 1,5f_0^i - (2/\pi^2) \sum_l f_0^l/(i-l)^2, \quad i-l \text{ нечетно,} \quad (17)$$

где $f_1^i = f_1(i\Delta)$, $f_0^l = f_0(l\Delta)$, и имеет смещение

$$b_1^i = - \left[G'_i/2T - (2/\pi^2) \sum_l (G'_l/T)/(i-l)^2 \right]. \quad (18)$$

Заметим, что (16) и (18) представлены линейным оператором Ψ : $G'_i/T = \Psi_i(F)$, $b_1^i = -\Psi_i(G'/T)$. Поскольку смещение периодограммы равно $-G'_i/T$, то $|b_1^i| < |G'_i/T|$.

Из соотношения (17) следует, что

$$\text{var } f_1^i = 2,25 \text{ var } f_0^i - \frac{6}{\pi^2} \sum_l \frac{\text{cov}(f_0^l, f_0^i)}{(i-l)^2} + \frac{4}{\pi^4} \sum_l \sum_k \frac{\text{cov}(f_0^l, f_0^k)}{(i-l)^2 (i-k)^2}. \quad (19)$$

Пусть спектральная оценка находится по N некоррелированным реализациям длительностью T каждая. Тогда оценкам $\sum_k f_0^{(k)}(\omega_i)/N$ и $\sum_k f_1^{(k)}(\omega_i)/N$ соответствуют ошибки $\varepsilon_0^i = \sqrt{\text{var } f_0^i/N + (b_0^i)^2}$ и $\varepsilon_1^i = \sqrt{\text{var } f_1^i + (b_1^i)^2}$, где $b_0^i = G'/\pi$, $b_1^i = G'/\pi$. Из неравенства $\varepsilon_1^i < \varepsilon_0^i$ следует $0,75(F_i - G'_i/T)^2/N < (G'_i/T)^2$ — критерий применимости метода снижения смещения спектральной оценки. Величины, входящие в последнее соотношение, допускают более точное оценивание, чем спектральная плотность.

При вычислении оценок имеются две возможности: сначала определять $f_1^{(k)}$ для k -й реализации, затем усреднять $\sum_k f_1^{(k)}/N$ или (в обратном порядке) сначала вычислять $\sum_k f_0^{(k)}/N$, затем снижать смещение по формуле (17). Несложно показать, что результат не зависит от порядка вычислений. Второй способ связан с меньшим объемом вычислений.

Свойства оценок f_2, f_3, \dots достаточно очевидны, и имеет место аналогия в соотношениях между ними, подобная соотношениям между f_0 и f_1 . Оценки f_2, f_3, \dots уже не дают столь существенного снижения смещения по сравнению с f_1 , как это было на первом шаге. Поэтому далее рассмотрим оценку $\tilde{f}_2^i = 1,5f_1^i - (2/\pi^2) \sum_l f_1^l/(i-l)^2$ ($i-l$ четно), об-

ладающую сверхразрешением, т. е. локальные экстремумы ее среднего $M\tilde{f}_2^i = F_i + G'_i/T - \Psi_i(G'/T) - \Psi_i^2(G'/T)$ выражены сильнее, чем у спектральной плотности. Это следует из того, что в экстремальных точках функции G'_i/T отношение $\theta = \Psi_i(G'/T)/(G'_i/T) \approx 0,5 - 0,4\alpha$, где $\alpha = (G'_{i+1}/T)/(G'_i/T) < 1$. При $0 < \alpha < 1$ параметр $\theta \in (0,1; 0,5)$. Если требуются оценки с минимальным смещением, то можно построить другие оценки; так, смещение полусуммы оценок f_0 и f_2 равно $-\Psi(G'/T)/2 - \Psi^2(G'/T)/2$ и по модулю меньше модуля смещения оценки f_1 . Аналогично полусумма f_1 и \tilde{f}_2 имеет смещение $0,5(G'/T - 2\Psi(G'/T) - \Psi^2(G'/T))$ и является сверхразрешающей. Полусумма двух последних оценок $(f_0 + f_1 + 2\tilde{f}_2)/4$ дает смещение $(G'/T - 3\Psi(G'/T) - 2\Psi^2(G'/T))/4$, наименьшее для приведенных сверхразрешающих ($\theta < 0,36$) оценок.

Рассмотрим результаты моделирования для процесса авторегрессии второго порядка $x(t) = \gamma x(t-1) - \gamma^2 x(t-2) + n(t)$, ($n(t)$ — последовательность псевдослучайных чисел, γ — параметр). Такой же процесс исследовался Вольдом [6], а спектральная оценка определялась традиционным усреднением по ансамблю реализаций. Сравним результаты оценивания разными способами. На рис. 1 ($T=30$; $N=200$, $\gamma=0,9$; отношение длительности реализации и интервала корреляции характеризуется неравенством $|B(\tau > T)| \leq 0,04$) представлены теоретическая спектральная плотность (сплошная линия), традиционная оценка (пунктирная кривая), оценка f_1 (штриховая линия) (проверялось условие $\varepsilon_1^i < \varepsilon_0^i$, которое выполнялось для всех частот) и оценка \tilde{f}_2 с высоким разрешением (штрихпунктирная кривая). На рис. 2 приведены результаты вычислений спектральных оценок процесса авторегрессии — скользящего среднего

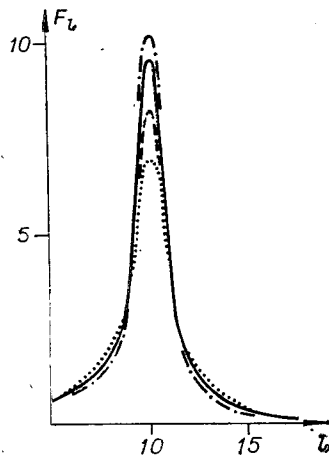


Рис. 1.

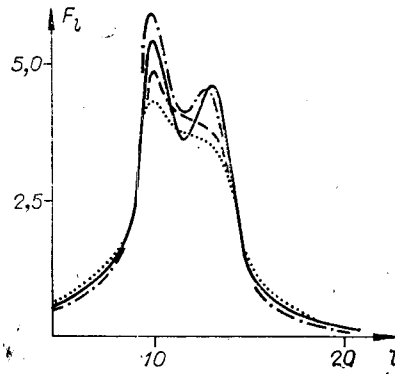


Рис. 2.

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i x(t-i) + \beta_2 n(t-2) + \beta_1 n(t-1) + n(t) \quad (\alpha_1 = 1,65, \alpha_2 = -2,32,$$
 $\alpha_3 = 1,37, \alpha_4 = -0,69, \beta_1 = -0,85, \beta_2 = 0,87; N = 200, T = 30; |B(\tau)| \leq 0,1$
 при $|\tau| > 30$). Аналогично рис. 1 сплошная линия — теоретический спектр, пунктирная — традиционная оценка, штриховая — оценка f_1 и штрихпунктирная — оценка f_2 с высоким разрешением. Этот пример характеризуется малой длиной реализации T и значительными осцилляциями ковариационной функции для $\tau > T$. При этом оценка f_2 уверенно различает два пика, в то время как традиционная f_0 , а также f_1 не позволяют их разрешить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коняев К. В. Спектральный анализ случайных океанологических полей.— Л.: Гидрометеоздат, 1981.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1974, т. 1.
3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.— М.: Наука, 1969, т. 1.
5. Кулешов Е. Л. Итеративное оценивание спектральной плотности стационарного случайного процесса.— Автометрия, 1982, № 6.
6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 8 февраля 1983 г.

УДК 621.391.172

Ю. П. БАЛАНДИН, В. Ф. БИРЮКОВ, Г. И. ЛАБУТИН
(Москва)

АППРОКСИМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ БАЗИСОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Методы решения обратных задач применяются в последнее время и для случая обработки результатов измерений многомерных дискретных сигналов, в обозначении которых присутствуют 2—3 и более индексов (цифровые изображения, данные растровой спектрометрии и т. п.).