

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 517.518.8

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, Н. Г. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ

(Новосибирск)

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ШУМА ИЗМЕРЕНИЯ

1. Введение. Задачи интерпретации результатов измерений, как правило, являются обратными, причем при обычных предположениях о линейности и стационарности измерительной системы (или преобразователя) связь между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами описывается интегральным уравнением 1-го рода с разностным ядром. Для определенности будем далее рассматривать уравнение Вольтерра

$$\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in [0, \tau_y], \quad (1)$$

где $h(t-\tau)$ — аппаратная функция, характеризующая инерционность преобразователя. В этом случае обратная измерительная задача формулируется следующим образом: по зарегистрированному на интервале $[0, \tau_y]$ сигналу $\tilde{y}(t) = y(t) + \xi(t)$ определить значение функции $x(t)$, т. е. решить интегральное уравнение (1) относительно $x(t)$. Функция $\xi(t)$ отражает погрешность измерения и регистрации и в дальнейшем называется шумом измерения.

Известно, что решение интегрального уравнения (1) есть некорректно поставленная задача [1]. Развитые в последние два десятилетия методы решения таких задач (см., например, [1, 2]) позволяют строить устойчивые регуляризованные решения уравнения (1). Однако интерпретация данных на основе (1) имеет некоторые особенности, обусловленные разностным характером ядра $h(t)$, финитностью функций $x(t)$, $h(t)$ (они отличны от нуля на интервалах $[0, \tau_x]$, $[0, \tau_y]$ соответственно), а также тем, что шум измерения $\xi(t)$ считается стационарным случайным процессом с нулевым средним.

Учет этих особенностей позволил построить эффективный алгоритм [3, 4] нахождения статистически регуляризованного решения на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Алгоритм существенно (на 2—3 порядка) снижает затраты счетного времени и экономичен по требуемой оперативной памяти ЭВМ.

Основная сложность, возникающая при практическом использовании регуляризующих алгоритмов, заключается в выборе так называемого параметра регуляризации α [1]. Кроме обычного требования сходимости регуляризованного решения, предъявляемого к алгоритму выбора параметра α , желательно найти значение α_{opt} , минимизирующее некоторую норму ошибки решения уравнения (1). В [3, 4] приводится статистическая процедура оценивания оптимального (с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки решения) значения α_{opt} . Однако эта процедура требует задания корреляционной функции (или спектральной

плотности) шума измерения. При неточном задании этих характеристик (например, при ошибке в задании дисперсии шума в меньшую сторону более чем на 20%) найденное значение α может существенно (на порядок и более) отличаться от оптимального. Заметим, что аналогичный недостаток присущ и алгоритму выбора α на основе принципа невязки [5].

Некоторые методы выбора параметра регуляризации (метод отношений [1], метод квазиоптимального параметра [1] и близкий к нему метод минимума функции чувствительности [6]) не требуют непосредственного задания уровня шума измерения. Но эти методы применимы только в некотором интервале значений уровня шума измерения, и, кроме того, алгоритмы, реализующие их, требуют дополнительного контроля найденных значений параметра [7], не позволяя полностью автоматизировать процедуру построения регуляризованного решения.

В работе [8] для выбора параметра регуляризации при решении интегрального уравнения с ядром общего вида описан метод перекрестной значимости (cross-validation method). Однако процедура непосредственного вычисления α на основе этого метода требует значительных затрат машинного времени. Данная работа преследует две цели: построить эффективный алгоритм вычисления α , учитывающий разностный вид ядра уравнения (1), и исследовать выбор α методом перекрестной значимости при различной степени корреляции шума измерения. Заметим, что последнему обстоятельству ранее совершенно не уделялось внимания в литературе (см., например, [8, 9]).

2. Алгоритм построения регуляризованного решения. При решении (1) численными методами обычно вводят конечномерное приближение

$$Hx = y, \quad (2)$$

заменяя функции $x(t)$, $y(t)$ на векторы x , y и аппроксимируя интегральный оператор квадратурной формулой. Примем, что:

а) y — вектор размерностью $N_y = \text{ent}[\tau_y/\Delta_t]$ с проекциями $\{y\}_j = y(j\Delta_t)$, $j = 0, \dots, N_y - 1$; x — вектор размерностью $N_x = \text{ent}[\tau_x/\Delta_t]$, где $\tau_x = \tau_y - \tau_h$, Δ_t — шаг дискретизации; $\text{ent}[\tau_x]$ — целая часть числа τ_x ;

б) элементы матрицы H размерностью $(N_y \times N_x)$ определяются соотношением $\{H\}_{k,j} = h((k-j)\Delta_t)\Delta_t$, что соответствует применению квадратурной формулы прямоугольников;

в) погрешность аппроксимации интегрального оператора пренебрежимо мала (за счет выбора шага дискретизации Δ_t) по сравнению с шумом измерения.

В этом случае проекции вектора x можно принять в качестве искоемых значений $x(j\Delta_t)$, $j = 0, \dots, N_x - 1$, входного сигнала. Из-за некорректности исходного уравнения (1) система (2) плохо обусловлена. Поэтому строится статистически регуляризованное решение x_α , определяемое из системы

$$(\alpha\Gamma^{-1} + H^T R^{-1} H)x_\alpha = H^T R^{-1} \tilde{y}, \quad (3)$$

состоящей из N_x уравнений. В этой системе \tilde{y} — вектор измеренных значений $\{\tilde{y}\}_j = \tilde{y}(j\Delta_t)$, R — корреляционная матрица вектора шума измерения с элементами $\{R\}_{k,j} = R_\xi(|k-j|\Delta_t)$, где $R_\xi(t)$ — корреляционная функция шума измерения. Матрица Γ^{-1} входит в регуляризирующий функционал $(x, \Gamma^{-1}x)$, характеризующий гладкость искомого решения (подробнее см. [1, 2, 10]).

Регуляризованное по Тихонову решение находится из системы [1]

$$(\alpha\Omega + H^T H)x_\alpha = H^T \tilde{y}, \quad (3')$$

где матрица Ω определяется принятым порядком регуляризации p . Если $p = 0$, то $\Omega = I$ — единичная матрица. Решение системы (3) или (3') при большой размерности регуляризованного решения ($N_x > 100$) прямыми методами алгебры — трудоемкая задача, требующая значительных ресурсов ЭВМ. В [3, 4] предложен эффективный алгоритм нахождения x_α . Здесь приведем только конечные выражения.

Согласно этому алгоритму, регуляризованное решение x_α определяется через периодическую (с периодом $N > N_x$) последовательность $\tilde{x}_\alpha = \{x_\alpha(j)\}$, $j = 0, \dots, N-1$, соотношением

$$\{x_\alpha\}_j = \tilde{x}_\alpha(j-1), \quad j = 1, \dots, N_x, \quad (4)$$

которое справедливо при условии

$$N \geq N_y + N_h + N_R - 2, \quad (5)$$

где $N_R = \text{ent}[\tau_R/\Delta_t]$, τ_R — интервал корреляции процесса $\xi(t)$. Процедура нахождения x_α записывается в виде

$$\tilde{x}_\alpha = W^{-1} \Psi_\alpha W \tilde{y}. \quad (6)$$

Здесь W , W^{-1} — матричные операторы прямого и обратного ДПФ [3, 4], а Ψ_α — диагональная матрица с элементами

$$\{\Psi_\alpha\}_{j+1, j+1} = \lambda_H(j) / (|\lambda_H(j)|^2 + \alpha \lambda_\alpha(j)), \quad (7)$$

где α — параметр регуляризации. Последовательности λ_H , \tilde{y} определяются соотношениями

$$\lambda_H(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(k) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} kj\right), \quad j = 0, \dots, N-1;$$

$$\tilde{h}(k) = \begin{cases} h(k\Delta_t)\Delta_t, & k = 0, \dots, N_h - 1; \\ 0, & k = N_h, \dots, N-1; \end{cases} \quad \tilde{y}(j) = \begin{cases} \tilde{y}(j\Delta_t), & j = 0, \dots, N_y - 1; \\ 0, & j = N_y, \dots, N-1. \end{cases}$$

Последовательность λ_α симметрична относительно $j = N/2$, т. е. $\lambda_\alpha(j) = \lambda_\alpha(N-j)$, $j = N/2 + 1, \dots, N-1$. При построении статистически регуляризованного решения элементы $\lambda_\alpha(j)$ находятся из соотношения $\lambda_\alpha(j) = \lambda_R(j)/\lambda_\Gamma(j)$, причем $\lambda_R(j)$, $\lambda_\Gamma(j)$ выражаются через матрицы R , Γ [3, 4]. Если статистические свойства шума измерения неизвестны, что характерно для рассматриваемой задачи, то $\lambda_\alpha(j)$ можно представить как $\lambda_\alpha(j) = \Omega(j\Delta_\omega)$, $j = 0, \dots, N/2$, где $\Omega(\omega)$ — некоторая положительная функция, причем $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Omega(\omega) = \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$, $\Delta_\omega = 2\pi(N\Delta_t)$ — шаг дискретизации по частоте. Приняв $\Omega(\omega) = \sum_{k=0}^p a_k \omega^{2k}$, $a_k \geq 0$, $k = 0, \dots, p-1$; $a_p > 0$, получаем регуляризованное по Тихонову решение с порядком регуляризации p .

Перейдем к определению параметра регуляризации α , обуславливающего точность регуляризованного решения.

3. Алгоритм выбора параметра регуляризации. На практике при решении обратных задач желательно выбрать значение $\alpha_{\text{опт}}$ (в дальнейшем называемое оптимальным), минимизирующее некоторый функционал от ошибки решения. В качестве такого функционала примем $\Delta^2(\alpha) = \|Hx - Hx_\alpha\|^2/N_y$, косвенно связанный с квадратом ошибки решения $\epsilon^2(\alpha) = \|x - x_\alpha\|^2/N_x$. Из-за незнания искомого вектора x выбор α путем непосредственной минимизации $\Delta^2(\alpha)$ невозможен.

Кратко изложим сущность метода перекрестной значимости (подробнее см. [8, 9], а также [11]), позволяющего получить при определенных условиях оценку для оптимального параметра регуляризации.

Введем вектор $\tilde{y}^{(k)}$ размерностью $N_y - 1$, получаемый удалением k -й проекции вектора \tilde{y} , матрицу $H^{(k)}$ размером $(N_y - 1) \times N_x$, сформированную из матрицы H удалением k -й строки, и вектор $x_\alpha^{(k)}$ размерностью N_x , являющийся регуляризованным решением для правой части $\tilde{y}^{(k)}$. Рассмотрим функционал

$$V_0(\alpha) = \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} [\{Hx_\alpha^{(k)}\}_k - \{\tilde{y}\}_k]^2,$$

где $\{Hx_\alpha^{(k)}\}_k$, $\{\tilde{y}\}_k$ — k -е проекции N_y -мерных векторов Hx_α , \tilde{y} соответ-

ственно. Этот функционал характеризует ошибку предсказания проекции вектора \tilde{y} , которая была удалена при построении соответствующего решения $x_\alpha^{(h)}$. В качестве параметра регуляризации по методу перекрестной значимости принимается величина α_v , доставляющая минимум функционалу $V_0(\alpha)$. Можно показать, что

$$V_0(\alpha) = \frac{1}{N_y} \sum_{k=1}^{N_y} \{ |Hx_\alpha\}_k - \{\tilde{y}\}_k \|^2 / (1 - t_{kk}(\alpha))^2,$$

где $t_{kk}(\alpha)$ — диагональные элементы матрицы $T(\alpha) = H(H^*R^{-1}H + \alpha\Gamma^{-1})^{-1}H^*R^{-1}$, и в этом случае $V_0(\alpha)$ интерпретируется как взвешенная сумма квадратов проекций вектора невязки $e_\alpha = \tilde{y} - Hx_\alpha$. В обобщенном методе перекрестной значимости [9] параметр α находится из минимума функционала

$$V(\alpha) = \frac{1}{N_y} \|\tilde{y} - Hx_\alpha\|^2 / \left[\frac{1}{N_y} \text{Sp}(I - T(\alpha)) \right]^2, \quad (8)$$

где $\text{Sp}(I - T(\alpha))$ — след матрицы $I - T(\alpha)$. Очевидно, что если матрица $T(\alpha)$ имеет одинаковые диагональные элементы, то функционалы $V_0(\alpha)$, $V(\alpha)$ совпадают.

Если шум измерения является «белым» шумом с дисперсией σ^2 , то для достаточно больших N_y в области минимума $\Delta^2(\alpha)$ справедливо соотношение

$$V(\alpha) \approx \Delta^2(\alpha) + \sigma^2 \quad (9)$$

— основа метода перекрестной значимости. Так как σ^2 не зависит от α , то значение α_v , доставляющее минимум $V(\alpha)$, может быть принято в качестве оценки оптимального параметра регуляризации. Однако непосредственное вычисление α_v из (8) затруднительно из-за необходимости определять диагональные элементы матрицы $T(\alpha)$, что при больших значениях N_y весьма трудоемкая задача.

Для интегрального уравнения (1) с разностным ядром вычисление существенно упрощается применением ДПФ. Используя те же неособенные преобразования матриц, что и в работе [4], $V(\alpha)$ удастся представить в виде

$$V(\alpha) = \rho(\alpha)/s(\alpha), \quad (10)$$

где

$$\rho(\alpha) = \sum_{j=0}^{N-1} [\alpha\lambda_\Omega(j) / (|\lambda_H(j)|^2 + \alpha\lambda_\Omega(j))]^2 |\tilde{Y}(j)|^2,$$

$$s(\alpha) = \left[\frac{1}{N_y} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha\lambda_\Omega(j) / (|\lambda_H(j)|^2 + \alpha\lambda_\Omega(j)) \right]^2,$$

$\tilde{Y}(j)$ — коэффициенты ДПФ вектора правой части:

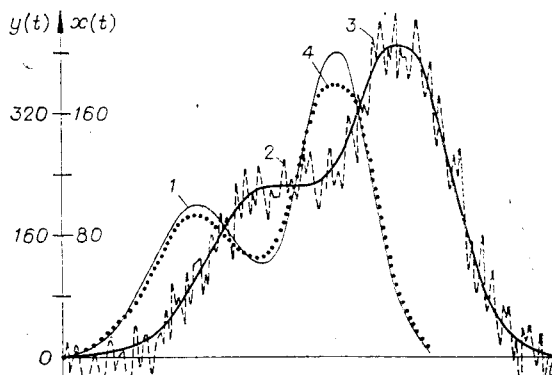
$$\tilde{Y}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}(k) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} kj\right).$$

Соотношение (10) свободно от матричных операций и позволяет вычислить α_v , используя известные методы минимизации функции одной переменной (см., например, [12]). Затем в соответствии с алгоритмом п. 2 строится регуляризованное решение x_α при $\alpha = \alpha_v$.

4. Результаты вычислительного эксперимента. Алгоритм построения регуляризованного решения с параметром регуляризации α_v был реализован в виде подпрограммы на языке ФОРТРАН-IV, вошедшей в пакет программ для решения задач интерпретации результатов физического эксперимента ИТПМ СО АН СССР. Алгоритм был проверен на ряде вычислительных экспериментов, результаты которых дали ответы

Рис. 1. Исходные данные вычислительного эксперимента:

1 — входной сигнал $x(t)$; 2 — точная правая часть $y(t)$ интегрального уравнения; 3 — измеренная правая часть; 4 — регуляризованное решение ($\alpha = \alpha_\gamma$).



на некоторые вопросы, возникающие при построении регуляризованного решения с $\alpha = \alpha_\gamma$.

Остановимся на вычислениях с основаниями $3,0$; $4,0$. шаг дискретизации Δ_t равен $0,1$. шум измерения имитировался стационарным случайным процессом с корреляционной функцией $R_\xi(t) = \sigma^2 \exp(-\gamma|t|)$. Дисперсия σ^2 определялась по формуле $\sigma^2 = (\delta \max_j |y(j\Delta_t)|/2,5)^2$, где δ — относительный уровень шума. Величина γ характеризует длину интервала корреляции τ_R и величину

коэффициента корреляции $r_\xi = R_\xi(\Delta_t)/R_\xi(0)$. Так, при $\gamma = 10$ $\tau_R = 0,4$, $r_\xi = 0,3$; при $\gamma = 30$ $\tau_R = 0,1$, $r_\xi = 0,05$ и при $\gamma = 50$ $\tau_R \approx 0$, $r_\xi = 0,006$. На рис. 1 приведены функции $x(t)$, $y(t)$ и правая часть $\tilde{y}(t)$, соответствующая $\delta = 0,10$, $\gamma = 10$. Точность регуляризованного решения x_α определялась величинами

$$L_1(\alpha) = \frac{1}{N_{\text{выб}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{выб}}} \max_j |\{x\}_j - \{x_{\alpha_k}\}_j|,$$

Таблица 1

Параметры	Уровень шума δ			
	0,01	0,05	0,10	0,25
$\gamma = 10$				
$\alpha_{\text{опт}}$	$0,38 \cdot 10^{-6}$	$0,99 \cdot 10^{-7}$	$0,98 \cdot 10^{-7}$	$0,97 \cdot 10^{-7}$
L_1	4,23	7,95	11,97	19,35
L_2	21,14	40,91	60,89	106,83
$\gamma = 30$				
$\alpha_{\text{опт}}$	$0,39 \cdot 10^{-6}$	$0,21 \cdot 10^{-6}$	$0,15 \cdot 10^{-6}$	$0,16 \cdot 10^{-6}$
L_1	4,16	6,9	9,80	17,18
L_2	19,24	34,05	50,29	86,92
$\gamma = 50$				
$\alpha_{\text{опт}}$	$0,98 \cdot 10^{-6}$	$0,39 \cdot 10^{-6}$	$0,24 \cdot 10^{-6}$	$0,24 \cdot 10^{-6}$
L_1	4,04	6,74	9,52	16,74
L_2	18,84	33,38	49,08	84,57

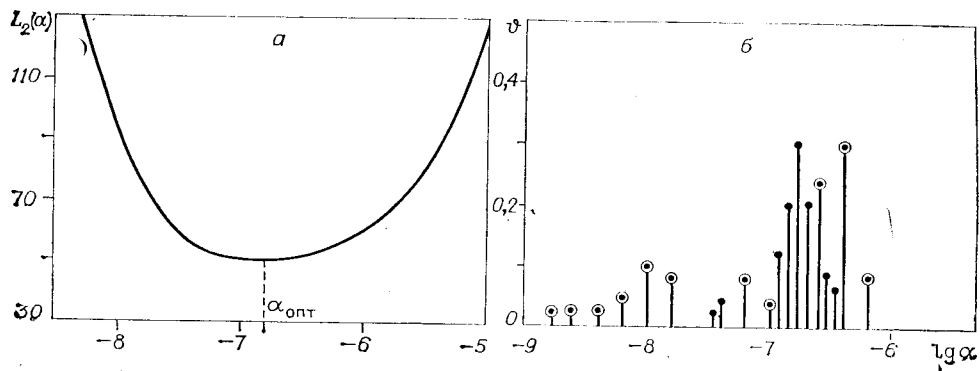


Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента:
 а — зависимость $L_2(\alpha)$; б — гистограммы относительной частоты для параметров α_T (точка) и α_γ (точка в кружке).

Таблица 2

Параметры	Уровень шума δ			
	0,01	0,05	0,10	0,25
$\gamma = 10$				
$\bar{\alpha}$	$0,39 \cdot 10^{-6}$	$0,21 \cdot 10^{-6}$	$0,20 \cdot 10^{-6}$	$0,19 \cdot 10^{-6}$
α_{\min}	$0,69 \cdot 10^{-7}$	$0,71 \cdot 10^{-7}$	$0,62 \cdot 10^{-7}$	$0,57 \cdot 10^{-7}$
α_{\max}	$0,55 \cdot 10^{-6}$	$0,49 \cdot 10^{-6}$	$0,51 \cdot 10^{-6}$	$0,52 \cdot 10^{-6}$
L_1	4,65	8,56	13,13	23,11
L_2	22,41	42,97	64,81	123,18
$\varepsilon_1; \varepsilon_2$	0,023; 0,021	0,047; 0,042	0,065; 0,063	0,116; 0,110
$\gamma = 30$				
$\bar{\alpha}$	$0,34 \cdot 10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-6}$	$0,18 \cdot 10^{-6}$	$0,17 \cdot 10^{-6}$
α_{\min}	$0,71 \cdot 10^{-7}$	$0,40 \cdot 10^{-7}$	$0,51 \cdot 10^{-7}$	$0,46 \cdot 10^{-7}$
α_{\max}	$0,52 \cdot 10^{-6}$	$0,41 \cdot 10^{-6}$	$0,43 \cdot 10^{-6}$	$0,48 \cdot 10^{-6}$
L_1	4,45	7,42	10,64	19,72
L_2	20,02	35,41	52,11	97,52
$\varepsilon_1; \varepsilon_2$	0,022; 0,020	0,037; 0,035	0,053; 0,051	0,098; 0,095
$\gamma = 50$				
$\bar{\alpha}$	$0,71 \cdot 10^{-6}$	$0,41 \cdot 10^{-6}$	$0,38 \cdot 10^{-6}$	$0,37 \cdot 10^{-6}$
α_{\min}	$0,11 \cdot 10^{-6}$	$0,98 \cdot 10^{-7}$	$0,81 \cdot 10^{-7}$	$0,86 \cdot 10^{-7}$
α_{\max}	$0,99 \cdot 10^{-6}$	$0,72 \cdot 10^{-6}$	$0,68 \cdot 10^{-6}$	$0,61 \cdot 10^{-6}$
L_1	4,31	7,30	10,31	19,62
L_2	19,81	34,65	51,09	96,43
$\varepsilon_1; \varepsilon_2$	0,022; 0,019	0,036; 0,034	0,051; 0,050	0,096; 0,094

Т а б л и ц а 3

Параметры	Уровень шума δ			
	0,01	0,05	0,10	0,25
$\gamma = 10$				
$\bar{\alpha}$	$0,21 \cdot 10^{-7}$	$0,10 \cdot 10^{-8}$	$0,15 \cdot 10^{-8}$	$0,41 \cdot 10^{-8}$
α_{\min}	$0,25 \cdot 10^{-10}$	$0,11 \cdot 10^{-12}$	$0,18 \cdot 10^{-12}$	$0,57 \cdot 10^{-13}$
α_{\max}	$0,61 \cdot 10^{-6}$	$0,25 \cdot 10^{-7}$	$0,63 \cdot 10^{-7}$	$0,32 \cdot 10^{-7}$
$L_1(\alpha_V)/L_1(\alpha_T)$	8,21	23,46	35,71	45,57
$L_2(\alpha_V)/L_2(\alpha_T)$	7,34	18,17	28,39	39,14
$\gamma = 30$				
$\bar{\alpha}$	$0,18 \cdot 10^{-6}$	$0,98 \cdot 10^{-7}$	$0,23 \cdot 10^{-6}$	$0,99 \cdot 10^{-7}$
α_{\min}	$0,15 \cdot 10^{-8}$	$0,10 \cdot 10^{-8}$	$0,15 \cdot 10^{-8}$	$0,81 \cdot 10^{-9}$
α_{\max}	$0,15 \cdot 10^{-5}$	$0,61 \cdot 10^{-6}$	$0,63 \cdot 10^{-6}$	$0,21 \cdot 10^{-6}$
$L_1(\alpha_V)/L_1(\alpha_T)$	1,07	1,21	1,32	1,38
$L_2(\alpha_V)/L_2(\alpha_T)$	1,05	1,15	1,26	1,31
$\gamma = 50$				
$\bar{\alpha}$	$0,97 \cdot 10^{-6}$	$0,18 \cdot 10^{-6}$	$0,28 \cdot 10^{-6}$	$0,29 \cdot 10^{-6}$
α_{\min}	$0,25 \cdot 10^{-7}$	$0,63 \cdot 10^{-8}$	$0,81 \cdot 10^{-8}$	$0,80 \cdot 10^{-8}$
α_{\max}	$0,39 \cdot 10^{-5}$	$0,15 \cdot 10^{-5}$	$0,11 \cdot 10^{-5}$	$0,26 \cdot 10^{-5}$
$L_1(\alpha_V)/L_1(\alpha_T)$	1,03	1,10	1,17	1,23
$L_2(\alpha_V)/L_2(\alpha_T)$	1,03	1,08	1,13	1,18

$$L_2(\alpha) = \frac{1}{N_{\text{выб}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{выб}}} \left(\sum_{j=1}^{N_x} (\{x\}_j - \{x_{\alpha_k}\}_j)^2 \right)^{1/2},$$

где x_{α_k} — регуляризованное решение, построенное по k -й реализации правой части. Эти величины представляют собой усредненные значения равномерной и евклидовой норм ошибки решения. Объем выборки $N_{\text{выб}} = 50$. Методом статистического моделирования определялись значения оптимального параметра регуляризации $\alpha_{\text{опт}}$, минимизирующие $L_2(\alpha)$. Величины $\alpha_{\text{опт}}$, $L_1(\alpha_{\text{опт}})$, $L_2(\alpha_{\text{опт}})$ приведены в табл. 1 для различных уровней и коррелированности шума измерения.

Затем строились регуляризованные решения при следующих параметрах регуляризации: α_T , являющемся оценкой оптимального параметра регуляризации и определяемом по известной спектральной плотности шума измерения [3, 4]; α_V , определенном на основе метода перекрестной значимости (соотношение (10)).

Так как α_T , α_V — случайные величины, то для каждого параметра определялись такие характеристики: среднее значение $\bar{\alpha}$; граничные точки α_{\min} , α_{\max} ; $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$, а также строились гистограммы. Для параметра α_T эти характеристики приведены в табл. 2, для параметра α_V — в табл. 3. Для удобства в табл. 2 даны значения $\varepsilon_1 = L_1(\alpha_T)/\max_j \{x\}_j$, $\varepsilon_2 = L_2(\alpha_T)/\|x\|$, представляющие собой относительные величины ошибки

решения, а в табл. 3 — отношения $L_1(\alpha_v)/L_1(\alpha_r)$, $L_2(\alpha_v)/L_2(\alpha_r)$, показывающие относительное увеличение ошибки решения с параметром регуляризации α_v по сравнению с $\alpha = \alpha_r$. На рис. 2 приведена зависимость $L_2(\alpha)$, вычисленная при $\delta = 0,1$ и $\gamma = 30$. Здесь же нанесены гистограммы относительной частоты ν_i , $i = 1, \dots, N_v$, вычисленные для параметров α_r , α_v . Величина $\nu_i = n_i/N_{\text{выб}}$, где n_i — число значений α , попавших в интервал $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

Анализ результатов рассматриваемого вычислительного эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

1. Регуляризованные решения, построенные при $\alpha = \alpha_v$, имеют меньшую точность по сравнению с решениями, при построении которых учитывалась спектральная плотность шума измерения (параметр α_r). Это объясняется тем, что значения α_v в большей степени, чем α_r , отклоняются от оптимального значения параметра регуляризации (см. рис. 2). Меньшая точность решения при $\alpha = \alpha_v$ является своеобразной «платой» за отсутствие априорной информации о статистических характеристиках шума измерения.

2. В случае некоррелированного ($\gamma = 50$) и слабо коррелированного ($\gamma = 30$) шумов измерения проигрыш в точности решения, построенного при $\alpha = \alpha_v$, относительно мал по сравнению с $\alpha = \alpha_r$ (см. табл. 3). Если шум сильно коррелирован ($\gamma = 10$), то проигрыш в точности становится существенным.

Следовательно, выбор параметра регуляризации на основе метода перекрестной значимости можно рекомендовать, если коэффициент корреляции шума измерения в соседних узлах не превосходит 0,05, а это, в свою очередь, накладывает определенные ограничения на выбор шага дискретизации правой части интегрального уравнения (1).

Приведенные выводы в качественном отношении остаются справедливыми для других форм функций $x(t)$, $h(t)$ и при решении обратных задач, формулируемых на основе уравнения Фредгольма 1-го рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы.— Новосибирск: Наука, 1982.
3. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. Выбор параметра регуляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации.— Автоматика, 1975, № 4.
4. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. Алгоритм численного решения интегрального уравнения I рода типа свертки.— В кн.: Алгоритмы обработки теплофизического эксперимента. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1975.
5. Морозов В. А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1968, т. 8, № 2.
6. Баглай Р. Д. О критерии выбора параметра регуляризации, основанном на вычислении функции чувствительности.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1975, т. 15, № 2.
7. Заикин П. Н., Меченов А. С. Некоторые вопросы численной реализации регуляризирующего алгоритма для линейных интегральных уравнений.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1973, вып. 21.
8. Wahba G. A. A practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy.— SIAM J. on Numer. Anal., 1977, vol. 14, N 3, p. 651—667.
9. Golub G. H., Heath M., Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter.— Technometrics, 1979, vol. 21, N 2, p. 215—225.
10. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Мелкевич В. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.— УФН, 1970, т. 102, вып. 3.
11. Кочетов И. И. О новом способе выбора параметра регуляризации.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1976, т. 16, № 2.
12. Васильев В. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 6 июня 1983 г.