

На рис. 5 представлена зависимость невязки от изменения параметра регуляризации α при $\Delta h_{\text{нор}} = 0$, $SN = 0,1$.

На рис. 6 показана чувствительность соответствующих алгоритмов к вариации аппаратной функции при $\alpha = 0,01$, $SN = 0,1$.

Рис. 7 отражает зависимость невязки от уровня аддитивной шумовой составляющей при $\alpha = 0,01$, $\Delta h_{\text{нор}} = 0,03$. Выбранное значение ошибки $\Delta h_{\text{нор}} = 3\%$ находится в пределах 5%-ной погрешности, характерной для идентификации аппаратных функций.

ВЫВОДЫ

Показано, что при построении РА решения многомерных обратных задач для широкого класса пространственно-инвариантных измерительных систем более эффективно применять вместо дискретного преобразования Фурье модифицированное дискретное синусное преобразование, аппроксимирующее собственные элементы линейных операторов искажения. Доказана сепарабельность аппроксимирующего базиса в многомерном случае.

Результаты экспериментального исследования спектральных алгоритмов восстановления подтверждают меньшую чувствительность предложенного базиса к параметру регуляризации, аддитивной помехе измерения и вариации аппаратной функции, чем базис Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Бирюков В. Ф., Тумаркин В. И. Принцип сложности в теории управления (о проектировании технически оптимальных систем и проблеме корректности).— М.: Наука, 1977.
2. Милов Л. Т. Многомерно-матричные производные и анализ чувствительности систем автоматического управления.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 9.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
5. Форсайт Ж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
6. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. Выбор параметра регуляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации.— Автоматика, 1975, № 4.
7. Бакушинский А. Б. К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1973, № 1.
8. Yip P., Rao K. R. On the computation and the effectiveness of discrete sine transform.— Comput. and Electron. Eng., 1980, vol. 7, p. 45—55.
9. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.— М.: Связь, 1980.

*Поступила в редакцию 25 января 1983 г.;
окончательный вариант — 17 августа 1983 г.*

УДК 681.518

В. В. СЕРГЕЕВ

(Куйбышев)

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗВЕРТКИ ГИЛЬБЕРТА — ПЕАНО

Во многих приложениях вычислительной техники, например при автоматизации научных исследований, важную роль играет цифровая обработка изображений. Круг вопросов, возникающих при обработке изображений, чрезвычайно широк: фильтрация и улучшение качества, эффективное кодирование, выделение признаков и т. д. [1—3]. Для решения

этих задач иногда используются известные методы обработки одномерных данных (при этом изображение построчно развертывается в одномерный видеосигнал). Однако такие методы оказываются недостаточно эффективными, так как не всегда учитывают характерные особенности изображений как объектов обработки: двумерный характер статистических связей, наличие однородных областей, контуров и т. п. Учет указанной специфики позволяет повысить качество обработки, но приводит к усложнению соответствующих алгоритмов. Развитие алгоритмов обработки изображений в основном и идет по пути совершенствования способов использования «двумерности» обрабатываемых данных, не сопровождающихся чрезмерным ростом реализационной сложности.

Между тем имеется возможность учесть особенности изображений не на этапе обработки данных, а раньше — на этапе их формирования. Этот подход основан на отказе от строчной развертки изображения и замене ее разверткой более сложного вида. В частности, здесь может быть применена развертка Гильберта — Пеано (РГП), обладающая рядом полезных свойств [4—7]. В полученном при ее использовании одномерном видеосигнале двумерность статистических связей элементов изображения проявляется главным образом в виде увеличения интервала корреляции (по сравнению со случаем строчной развертки), что, в свою очередь, позволяет более эффективно применять в дальнейшем простые алгоритмы обработки одномерных данных.

Развертка Гильберта — Пеано. Траектория РГП является некоторым приближением одного вида заполняющих многомерное пространство кривых, достаточно полное описание которых дано в [4]. Ниже кратко рассматривается наиболее важный для обработки изображений случай (и одновременно наиболее простой), когда кривая заполняет двумерное пространство.

Пусть вводимое в ЭВМ дискретизованное изображение задано квадратной сеткой своих отсчетов $S(i, j)$, где i — номер отсчета в строке; j — номер строки; $i, j = 1, N$, N — число отсчетов по вертикали и горизонтали. В результате развертки все отсчеты выстраиваются в одномерную последовательность $S(k)$, $k = 1, N^2$. Очевидно, для задания вида развертки необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между номером отсчета в последовательности k и его координатами (i, j) на изображении. Для РГП это соответствие устанавливается так, что траектория развертки принимает вид, показанный для $N = 2, 4$ и 8 на рис. 1.

Важнейшие свойства РГП — непрерывность и блочная структура. Непрерывность развертки выражается в том, что соседние отсчеты в последовательности всегда являются соседними и на изображении. Блочная структура позволяет рассматривать развертку для изображения, состоящего из $2N \times 2N$ отсчетов, как объединение разверток для блоков из $N \times N$ отсчетов (рис. 2). Из этих свойств вытекают два полезных следствия. Во-первых, траектория развертки довольно долго «удерживается» в каждой локальной области изображения, что обеспечивает получение сильнокоррелированной последовательности отсчетов. Во-вторых, блочная структура дает возможность осуществить рекурсивную алгоритмизацию развертки [4].

Алгоритмы развертки. К настоящему времени предложено довольно много алгоритмов построения разверток, базирующихся на понятии заполняющих пространство кривых [4, 5, 7]. Однако в своем большинстве они не ориентированы специально на использование при обработке изображений и являются для данного применения функционально избыточными (и, следовательно, неоправданно сложными). Эти алгоритмы, обладая достаточной универсальностью, позволяют строить развертки для пространств любой размерности, что не требуется для изображений (всегда двумерных). Кроме того, обычно в них устанавливается связь между любым номером k отсчета в последовательности и соответствующей точкой многомерного пространства, хотя для собственно развертки достаточно упорядоченный перебор номеров в направлении возрастания k , на-

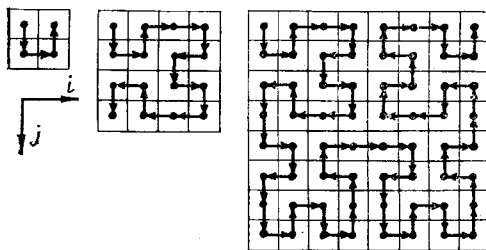


Рис. 1. Траектории РГП для фрагментов изображения размером 2×2 , 4×4 и 8×8 отсчетов.

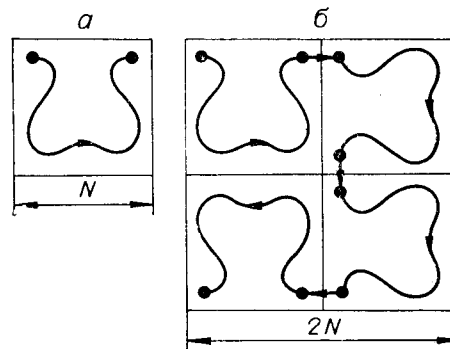


Рис. 2. Развертка для блока размером $N \times N$ (а) и построенная на ее основе развертка для блока $2N \times 2N$ (б).

чая с минимального $k = 1$. Последнее является серьезным недостатком известных алгоритмов, поскольку, как отмечено в [4], реализация упорядоченного перечисления отсчетов могла бы резко сократить объем вычислений.

Построим алгоритм последовательного вычисления координат отсчетов изображения при РГП.

В соответствии с идеей рекурсивной алгоритмизации развертку квадратного изображения размером $2^m \times 2^m$ отсчетов можно рассматривать на M уровнях. На уровне m ($m = 2, M$) осуществляется развертка блоков размером $2^m \times 2^m$. Каждый из таких блоков может быть представлен как объединение четырех блоков $(m-1)$ -го уровня (для $m = 2$ — как объединение самих отсчетов изображения).

Пусть развертка начинается с левого верхнего угла изображения, как изображено на рис. 1. Анализ траектории такой развертки показывает, что в ней используются всего четыре способа объединения для формирования блока следующего, более старшего уровня. Эти способы представлены на рис. 3, там же введена их условная нумерация. На данном рисунке кружки с цифрами — объединяемые блоки (для младшего уровня — отсчеты) и их порядковые номера по развертке в блоке старшего уровня, стрелки — направления движения развертки в плоскости изображения при переходах между блоками. Пронумеруем и эти направления: 1 — вправо, 2 — вниз, 3 — влево, 4 — вверх. Последовательность направлений движения развертки при переходах между блоками для каждого из способов объединения представлена в табл. 1.

Способ объединения четырех блоков $(m-1)$ -го уровня в один блок уровня m однозначно определяет и способы объединения блоков $(m-2)$ -го уровня в каждый из блоков $(m-1)$ -го уровня (для $m = 3, M$). Связь способов объединения блоков на соседних уровнях задается табл. 2.

Таблица 1

Направления развертки при переходах между блоками

Переходы между блоками	От			
	1 к 2	2 к 3	3 к 4	4 к 1
Способы объединения блоков	1	2	1	4
	2	4	3	2
	3	1	2	3
	4	3	4	1

Таблица 2

Способы объединения блоков $(m-2)$ -го в блоки $(m-1)$ -го уровня

Порядковый номер блока $(m-1)$ -го уровня в блоке уровня m	Способы объединения			
	1	2	3	4
Способы объединения блоков $(m-1)$ -го уровня в блок уровня m	1	3	1	4
	2	4	2	3
	3	1	3	2
	4	2	4	1

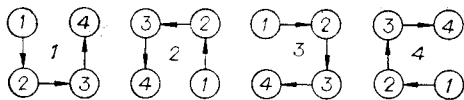


Рис. 3. Способы объединения блоков.

Данных, представленных в таблицах, достаточно для построения алгоритма РГП, который заключается в следующем. Перед началом развертки порядковые номера блоков для всех уровней устанавливаются равными 1, а способы объединения — 1 и 3 для нечетных и четных уровней соответственно. После этого в соответствии с табл. 1 начинают выполняться шаги развертки. Делаются три шага на первом (младшем) уровне, после чего оказывается исчерпанным первый блок второго уровня. Совершается шаг на втором уровне, с помощью табл. 2 устанавливается новый способ объединения для первого уровня, опять выполняются три шага на первом уровне и т. д. Всякий раз, когда исчерпывается очередной блок m -го уровня ($m = 2, M - 1$), делается шаг по развертке на уровне m , для уровней от первого до $(m - 1)$ -го переопределяются способы объединения и устанавливаются порядковые номера блоков равными 1, а затем выполняются три шага на первом уровне. Развертка завершается, когда исчерпывается блок M -го уровня, т. е. само развертываемое изображение.

Такой алгоритм весьма прост как в аппаратной, так и в программной реализации. Ниже дается текст реализующей его процедуры на языке ФОРТРАН-4.

```

SUBROUTINE SCAN(I, J)
C
C   ПРОГРАММА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО
C   ВЫЧИСЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЯ
C   ПО КРИВОЙ ГИЛЬБЕРТА — ПЕАНО
C
C   I — НОМЕР ЭЛЕМЕНТА В СТРОКЕ
C   J — НОМЕР СТРОКИ
C   (ДЛЯ ИНИЦИАЛИЗАЦИИ РАЗВЕРТКИ
C   УКАЗЫВАЕТСЯ ВХОДНОЕ ЗНАЧЕНИЕ I = 0)
C
      INTEGER L(10), N(10), T1(4, 3), T2(4, 4)
      DATA T1, T2/2, 4, 1, 3, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 1,
      * 3, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1/
      M = 1
      IF(I.NE.0) GOTO 2
C
C   НАЧАЛЬНЫЕ ПРИСВОЕНИЯ ПРИ
C   ИНИЦИАЛИЗАЦИИ РАЗВЕРТКИ
C
      DO 1 K = 1, 10
        N(K) = 1
        L(K) = 2 - M
      1 M = - M
        I = 1
        J = 1
        RETURN
C
      2 IF(N(M).NE.4) GOTO 3
        M = M + 1

```

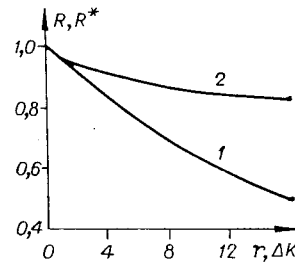


Рис. 4. Нормированная автокорреляционная функция тестового изображения (1) и соответствующей ему последовательности, полученной при РГП (2).

GOTO 2

C
C ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ
C

```
3 H=T1(L(M), N(M))
  1 F(I. EQ. 1) I = I + 1
  1 F(I. EQ. 2) J = J + 1
  1 F(I. EQ. 3) I = I - 1
  1 F(I. EQ. 4) J = J - 1
```

C
C ИЗМЕНЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО
C СОСТОЯНИЯ ПРОГРАММЫ
C

```
  N(M) = N(M) + 1
  1 F(M. EQ. 1) RETURN
  DO 4 K = 2, M
  H = M - K + 1
  L(H) = T2(L(H + 1), N(H + 1))
  4 N(H) = 1
  RETURN
  END
```

В приведенной подпрограмме массивы $T1$ и $T2$ соответствуют табл. 1 и 2. Размер массивов L и N равен максимальному числу уровней развертки. Данная подпрограмма позволяет осуществить РГП для изображения размером до 1024×1024 отсчетов. При построении развертки большого формата необходимо увеличить размер массивов L и N и соответственно изменить верхний предел цикла начальных присвоений.

Корреляционная функция последовательности после развертки. Пусть изображение описывается моделью двумерного стационарного случайного поля с нормированной автокорреляционной функцией отсчетов $R(\Delta i, \Delta j)$, где $\Delta i, \Delta j$ — приращения (по целочисленным координатам) между парой отсчетов. Ограничимся случаем, когда поле обладает изотропными статистическими свойствами, т. е. $R(\Delta i, \Delta j) = R(r)$, где $r = \sqrt{\Delta i^2 + \Delta j^2}$ — расстояние между отсчетами в плоскости изображения.

Примем, что последовательность, получаемая в результате РГП, также стационарна (строго говоря, это справедливо лишь в первом приближении). Нормированную автокорреляционную функцию этой последовательности обозначим через $R^*(\Delta k)$, где Δk — расстояние между парой отсчетов в последовательности.

Для практического применения многих алгоритмов обработки изображений при использовании РГП необходимо определить связь $R^*(\Delta k)$ с $R(r)$. Проведенные автором исследования показали, что для широкого класса корреляционных функций эта связь достаточно точно задается соотношением

$$R^*(\Delta k) = R[r(\Delta k)],$$

где

$$r(\Delta k) = \begin{cases} \Delta k, & |\Delta k| = 0; 1; \\ \approx 1,1 \sqrt{|\Delta k|}, & |\Delta k| \geq 2. \end{cases}$$

В качестве иллюстрации к изложенному на рис. 4 показаны результаты экспериментального определения автокорреляционных функций для тестового изображения (рис. 5, *a*) и соответствующей ему последовательности, полученной при РГП. Автокорреляционная функция последовательности, вычисленная по предложенной эмпирической формуле, практически совпадает с экспериментальной оценкой.

Фильтрация изображения. «Растягивание» автокорреляционной функции последовательности при РГП по сравнению с автокорреляционной функцией самого изображения позволяет предположить, что такая после-



Рис. 5. Тестовое изображение (а) и изображения, восстановленные после сжатия данных при строчной развертке (б) и при РГП (в).

довательность будет лучше выделяться из аддитивной смеси с высокочастотным шумом. Для проверки этого предположения было проведено моделирование процесса фильтрации тестового изображения (см. рис. 5, а), искаженного белым шумом.

Рассматривались два варианта одномерной фильтрации: при строчной развертке изображения и при РГП. При строчной развертке автокорреляционная функция последовательности аппроксимировалась экспонентой, а в качестве алгоритма фильтрации использовался калмановский фильтр-интерполятор с задержкой на два отсчета [8]. Фильтр такой же структуры, но с другими (экспериментально подобранными) параметрами применялся и при РГП.

Результаты исследования представлены на рис. 6. Здесь введены следующие обозначения: σ_s^2 — дисперсия изображения, σ_ξ^2 — дисперсия шума, ϵ^2 — дисперсия остаточного шума после фильтрации. Приведенные характеристики эффективности фильтрации демонстрируют преимущества РГП.

Эффективное кодирование изображений. Кодирование изображений с целью сокращения объема (сжатия) данных часто осуществляется при помощи простых «одномерных» алгоритмов. Эффективность таких процедур может быть существенно повышена, если обрабатываемые данные формируются с использованием РГП. В качестве примера рассмотрим кодирование тестового изображения (см. рис. 5, а) по алгоритму интерполяции нулевого порядка [9], обеспечивающему восстановление (декодирование) данных с гарантированной максимальной погрешностью.

Показателем эффективности кодирования является коэффициент сжатия

$$K = J_0/J,$$

где J_0 — объем данных до кодирования, J — объем закодированных данных.

В рассматриваемом случае исходное изображение представлялось в формате 1 байт (8 бит) на отсчет. Для временной привязки неравностоящих отсчетов, полученных при сжатии, использовалась двоичная последовательность, к которой, в свою очередь, применялось кодирование длин серий словами оптимальной длины [3].

На рис. 7 представлены экспериментально полученные зависимости коэффициента сжатия от допустимой максимальной погрешности восстановления ϵ_{\max} для случаев строчной развертки изображения и РГП. Как видно, во втором случае получен значительно больший эффект сжатия.

Искажения обработанных изображений. Почти все процедуры обработки так или иначе искажают исходное изображение. Следует отметить, что характер искажений, вносимых в изображение «одномерной» обра-

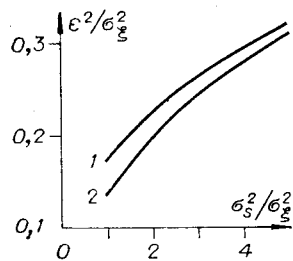


Рис. 6. Характеристики эффективности фильтрации тестового изображения при строчной развертке (1) и при РГП (2).

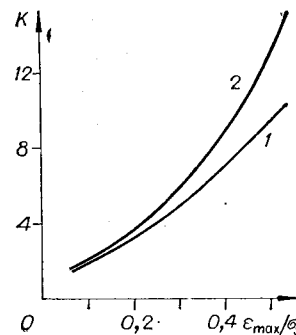


Рис. 7. Характеристики эффективности кодирования тестового изображения при строчной развертке (1) и при РГП (2).

боткой, при строчной развертке и РГП оказывается существенно разным. Так, на рис. 5 приведены тестовое изображение и изображения, восстановленные после сжатия по алгоритму интерполяции нулевого порядка. Чтобы сделать искажения заметными, допустимая погрешность здесь задавалась большой ($\epsilon_{\max}/\epsilon_s = 0,5$). Максимальное значение ошибок восстановления в обоих случаях одинаково, но при РГП эти ошибки локализируются в более компактных «двумерных» областях на плоскости изображения, что для некоторых приложений может оказаться предпочтительнее.

Таким образом, использование развертки Гильберта — Пеано во многих случаях позволяет улучшить качество обработки изображений без усложнения самих алгоритмов обработки. Что касается затрат ресурсов вычислительного комплекса на реализацию этой развертки, то они могут быть сведены к минимуму либо применением устройства ввода изображений с пошаговым управлением, либо аппаратной реализацией развертки в дисплейном процессоре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. — М.: Сов. радио, 1979.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. — М.: Мир, 1982, кн. 1 и 2.
3. Виттих В. А., Сергеев В. В., Сойфер В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. — М.: Наука, 1982.
4. Александров В. В., Горский Н. Д., Поляков А. О. Рекурсивные алгоритмы обработки и представления данных. — В кн.: Алгоритмы и системы автоматизации исследований и проектирования. М.: Наука, 1980.
5. Quinqueton J., Berthod M. A locally adaptive Peano scanning algorithm. — IEEE Trans., 1981, vol. PAMI-3, N 4.
6. Фролушкин В. Г. Кодирование неподвижных изображений, передаваемых по электрическим каналам связи (Глава 8). — В кн.: Орловский Е. Л. Передача факсимильных изображений. М.: Связь, 1980.
7. Козндеринк Дж. Дж., ван Доорн А. Дж. Новый способ растровой развертки, сохраняющий топологию изображения. — ТИИЭР, 1979, т. 67, № 10.
8. Сейдж Э., Меле Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. — М.: Связь, 1976.
9. Мановцев А. П. Основы теории радиотелеметрии. — М.: Энергия, 1973.

Поступила в редакцию 17 декабря 1982 г.;
окончательный вариант — 19 апреля 1983 г.