

А. Н. КОЛЕСНИКОВ

(Новосибирск)

МЕТОДИКА РАСЧЕТА РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ СПЕЦПРОЦЕССОРА СИСТЕМЫ ЦИФРОВОГО ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

1. В последнее время широкое распространение получила рекурсивная цифровая фильтрация. Ее применение особенно удобно для частотного анализа с одинаковой относительной шириной элементарной полосы. Это связано с тем, что положение частотного профиля фильтра на оси частот определяется шагом дискретизации по времени и увеличение шага сдвигает профиль в область более низких частот.

Цифровые фильтры обладают некоторыми специфическими особенностями, которые отличают их от аналоговых [1]. Периодичность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) приводит к необходимости подавления периодических повторов АЧХ вне интересующего нас диапазона фильтрами нижних частот (также цифровыми, но с другим периодом).

Методика расчета аналоговых полосовых фильтров хорошо разработана: она сводится к последовательному соединению двухполюсников. При построении цифровых фильтров в качестве базового элемента также можно использовать цифровой двухполюсник. Если при этом удастся в качестве аргумента АЧХ выбрать какую-либо монотонную на отрезке $0 \leq \omega \leq \pi/T$ функцию частоты и структура формулы АЧХ оказывается сходной со структурой АЧХ соответствующего по порядку аналогового фильтра, то процедура расчета цифрового фильтра существенно упрощается.

С точки зрения аппаратной реализации желательно использовать двухполюсники с минимальным числом умножений:

$$H_k(z) = (1 + pz^{-1}) / (1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}); \quad p = 0; \pm 1. \quad (1)$$

При этом для полосовых фильтров $p = -1$, и расчет цифровых фильтров во многом облегчается использованием стандартной технологии расчета полосовых аналоговых фильтров. С расчетом цифровых фильтров нижних частот (ФНЧ) дело обстоит несколько сложнее, если используется «заграждение» ($p = +1$), так как при этом структура формул АЧХ цифрового и аналогового ФНЧ получается различной.

2. В схему частотного анализа до аналого-цифрового преобразователя должен включаться аналоговый фильтр нижних частот. Это необходимо для того, чтобы предупредить «просачивание» частот от периодических повторов спектра мощности входного сигнала, образующихся при дискретизации входного сигнала по времени. При $1/M$ -октавном анализе в связи с этим возникает задача расчета рекурсивного цифрового фильтра нижних частот, наилучшим образом приближающего аналоговый ФНЧ, для обеспечения идентичности характеристик фильтров во всем частотном диапазоне.

Рассмотрим задачу синтеза рекурсивного цифрового фильтра нижних частот, наилучшим образом приближающего аналоговый фильтр Баттерворта в полосе пропускания и состоящего из двухполюсников упомянутого типа.

Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ Баттерворта имеет вид [2]

$$|H_B(x)|^2 = 1 / (1 + \varepsilon^2 x^{2n}). \quad (2)$$

Здесь $x = \omega/\omega_c$, ω_c — частота среза, n — число полюсов.

Таблица 1

Относительная частота	Коэффициент передачи, дБ						
	Аналоговый ФНЧ	Цифровой ФНЧ					
		m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
0,7	8,3·10 ⁻⁴	12,2·10 ⁻⁴	10,6·10 ⁻⁴	9,3·10 ⁻⁴	8,1·10 ⁻⁴	7,1·10 ⁻⁴	6,2·10 ⁻⁴
0,8	0,020	0,027	0,024	0,022	0,020	0,018	0,017
0,9	0,333	0,382	0,363	0,346	0,323	0,313	0,298
1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
1,1	10,35	9,74	9,97	10,20	10,42	10,65	10,88
1,2	19,06	17,66	18,19	18,71	19,24	19,76	20,29
1,3	27,35	25,14	25,98	26,83	27,67	28,52	29,36
1,4	35,07	31,99	33,19	34,38	35,57	36,77	37,96
1,5	42,26	38,26	39,84	41,42	43,00	44,58	46,16
1,6	48,99	44,01	46,01	48,02	50,02	52,19	54,03

Осуществим смешанное синус-тангенсное преобразование АЧХ аналогового фильтра и получим АЧХ цифрового ФНЧ:

$$|H_D(x)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2(\sin xy_c/\sin y_c)^{2(n-m)}(\operatorname{tg} xy_c/\operatorname{tg} y_c)^{2m}], \quad (3)$$

где $y_c = \omega_c T/2$, m — число «заграждений». Как нетрудно видеть, в точке $x=0$ функция $|H_D(x)|^2$ равна единице, а ее $(2n-1)$ производных обращаются в нуль.

Определим, при каком соотношении параметров n и m полученный фильтр наилучшим образом приближает аналоговый ФНЧ.

Рассмотрим следующее выражение, справедливое при $xy_c < 1$:

$$(\sin xy_c/\sin y_c)^{2(n-m)}(\operatorname{tg} xy_c/\operatorname{tg} y_c)^{2m} \cong x^{2n}(1 + (m-n/3)(xy_c)^2 + 0(x^4)). \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что при $m = n/3$ АЧХ цифрового фильтра с точностью до членов четвертого порядка малости по x совпадает с АЧХ аналогового фильтра Баттерворта в области частот $\omega < 2/T$ (или $\omega < 2\omega_N/\pi$, где $\omega_N = \pi/T$ — частота Найквиста).

В табл. 1 представлены результаты расчета АЧХ двенадцатиполосного цифрового ФНЧ при значениях параметра m , изменяющихся в пределах от 1 до 6 и $y_c = 0,5$. Цифровой фильтр при $m = n/3 = 4$ наилучшим образом приближает аналоговый фильтр в полосе пропускания и не хуже аналогового в полосе подавления.

В табл. 2 представлены результаты расчета АЧХ упомянутого фильтра при фиксированном $m = 4$ и $y_c = 0,25; 0,5; 1,0; 1,25$, что соответствует $\omega_c/\omega_N = 1/2\pi; 1/\pi; 2/\pi; 3/\pi$. Очевидно, что чем меньше значение параметра y_c , тем приближение точнее.

Определим полюса цифрового ФНЧ при $m = n/3$ и константы двухполюсников. (Здесь и далее будем полагать, что n четно.) Для этого

Таблица 2

Относительная частота	Коэффициент передачи, дБ					
	Аналоговый ФНЧ	Цифровой ФНЧ				
		$y_c=0,25$	$y_c=0,50$	$y_c=0,75$	$y_c=1,0$	$y_c=1,25$
0,7	8,3·10 ⁻⁴	8,3·10 ⁻⁴	8,1·10 ⁻⁴	7,1·10 ⁻⁴	4,4·10 ⁻⁴	0,9·10 ⁻⁴
0,8	0,020	0,020	0,020	0,018	0,012	0,003
0,9	0,333	0,333	0,323	0,310	0,247	0,105
1,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
1,1	10,35	10,36	10,42	10,79	12,32	20,27
1,2	19,06	19,07	19,24	20,20	24,55	57,12
1,3	27,35	27,37	27,67	29,46	38,55	66,50
1,4	35,07	35,1	35,57	38,52	56,64	—
1,5	42,26	42,30	43,00	47,60	88,37	—
1,6	48,99	49,04	50,02	57,03	119,33	—

преобразуем АЧХ цифрового фильтра к следующему виду:

$$1/[1 + \varepsilon^2(\sin xy_c/\sin y_c)^{2(n-m)}(\operatorname{tg} xy_c/\operatorname{tg} y_c)^{2m}] = (1-u)^m/[(1-u)^m + \alpha u^{3m}], \quad (5)$$

где

$$u = (1 - \cos \omega T)/2; \quad u_c = (1 - \cos \omega_c T)/2; \quad \alpha = \varepsilon^2 (1 - u_c)^m / u_c^{3m}.$$

Корни уравнения $(1-u)^m + \alpha u^{3m} = 0$ находятся в два этапа. Сначала данное уравнение сводится к m уравнениям вида

$$1 - u = \alpha^{1/m} u^3 e^{i\varphi_k}. \quad (6)$$

Здесь $\varphi_k = \pi/m + 2\pi k/m$; $k = \overline{0, m-1}$. Затем решаются уравнения третьей степени и определяются $3m$ корней u_k . Таким образом, выражение для АЧХ фильтра сводится к форме

$$|H_D(\omega)|^2 = (1-u)^m \left/ \prod_{k=1}^{n/2} (1 + A_k u + B_k u^2) \right., \quad (7)$$

где $A_k = -2 \operatorname{Re} \{u_k\}/|u_k|^2$; $B_k = 1/|u_k|^2$. Кроме того, коэффициенты A_k и B_k связаны с константами a_k и b_k двухполюсников следующим образом:

$$\begin{cases} -2[a_k(1+b_k) + 4b_k]/(1+a_k+b_k)^2 = A_k; \\ 4b_k/(1+a_k+b_k)^2 = B_k. \end{cases} \quad (8)$$

Эта система сводится к возвратному уравнению четвертой степени относительно b_k :

$$b_k^4 + Rb_k^3 + Qb_k^2 + Rb_k + 1 = 0, \quad (9)$$

где $R = 2(1 + A_k/B_k)$; $Q = R^2 + 2 - 4/B_k$. Константа a_k выражается через b_k :

$$a_k = 2b_k(2 + A_k/B_k)/(1 + b_k). \quad (10)$$

Таким образом, получен рекурсивный цифровой ФНЧ, идентичный аналоговому ФНЧ Баттерворта в полосе пропускания. В полосе подавления цифровой ФНЧ ведет себя не хуже аналогового.

3. Рассмотрим далее задачу построения рекурсивных цифровых полосно-пропускающих фильтров (ППФ) на двухполюсниках типа (1). Для этого вновь воспользуемся методом порождающей функции [3], в качестве которой возьмем аналоговый ППФ, удовлетворяющий поставленным требованиям.

Пусть $|H_a(x)|^2$ — АЧХ исходного $2n$ -полюсного ППФ [2]:

$$|H_a(x)|^2 = 1/[1 + \varepsilon^2 P_n^2((x - 1/x)/\Delta\Omega)], \quad (11)$$

где $\Delta\Omega$ — относительная ширина полосы; $x = \omega/\omega_0$ — относительная частота; ω_0 — центральная частота. Здесь $P_n(x)$ — функция фильтрации, представляющая собой полином n -й степени, причем $P_n(0) = 0$ и $P_n(1) = 1$. Для фильтров Баттерворта $P_n(x) = x^n$; для фильтров Чебышева $P_n(x)$ представляет собой полином Чебышева n -го порядка [2].

Перейдем к построению цифрового ППФ. Для этого совершим преобразование

$$x = \omega/\omega_0 \rightarrow (\sin(\omega T/2)/\sin(\omega_0 T/2))/Y_0.$$

Как нетрудно убедиться, это преобразование дает цифровой фильтр, состоящий из двухполюсников типа (1) с $p = -1$. Из характера замены видно, что для узкополосных фильтров искажения АЧХ в полосе пропускания при преобразовании будут незначительными.

Определим новую центральную частоту и ширину полосы:

$$Y_0 = \sqrt{y_r y_l}; \quad \Delta\Omega_1 = (y_r - y_l)/\sqrt{y_r y_l}.$$

Здесь $y_r = \sin(\omega_r T/2)/\sin(\omega_0 T/2)$; $y_l = \sin(\omega_l T/2)/\sin(\omega_0 T/2)$; ω_r и ω_l — правая и левая граница полосы исходного аналогового фильтра.

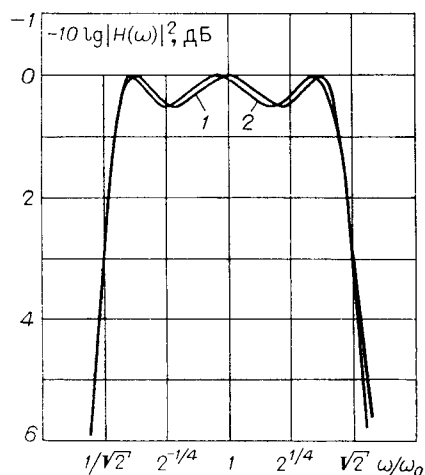


Рис. 1. АЧХ шестиполосного аналогового (1) и цифрового (2) октавного ППФ Чебышева.

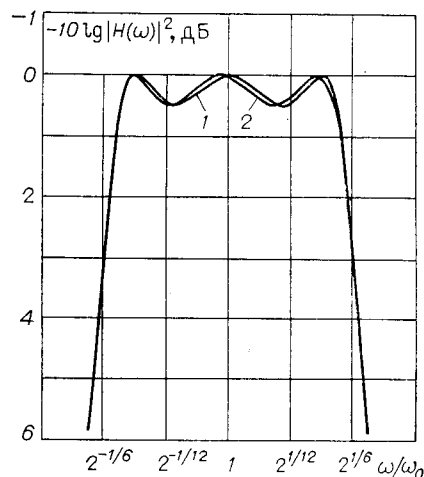


Рис. 2. АЧХ шестиполосного аналогового (1) и цифрового (2) 1/3-октавного ППФ Чебышева.

Задача нахождения полюсов цифрового ППФ свелась к нахождению полюсов некоего условного аналогового ППФ с шириной полосы Y_0 и центральной частотой $\Delta\Omega_1$. Воспользуемся расчетными формулами из [2] и определим полюсы x_k , а также коэффициенты $A_k = -2 \operatorname{Re}\{x_k\}/|x_k|^2$ и $B_k = 1/|x_k|$. Затем найдем константы двухполюсников a_k и b_k по формулам, приведенным выше для случая фильтра нижних частот.

На рис. 1 представлены АЧХ аналогового октавного ППФ Чебышева и полученного на его основе цифрового ППФ с $y_0 = \omega_0 T/2 = 1$, что соответствует $\omega_0/\omega_N = 2/\pi$. Различие в приведенных АЧХ не превышает 0,1 дБ в полосе пропускания для широкого диапазона центральных частот $\omega_0 \leq 2\omega_N/\pi$.

На рис. 2 представлены АЧХ цифрового 1/3-октавного ППФ и его аналогового прототипа (ППФ Чебышева). Центральная частота фильтра также равна $2\omega_N/\pi$ ($y_0 = 1$). Как и следовало ожидать, узкополосные цифровые фильтры отличаются от своих аналоговых прототипов в полосе пропускания несущественным образом.

4. Таким образом, разработаны метод расчета рекурсивных цифровых полосовых фильтров и фильтров нижних частот на двухполюсниках с минимальным числом умножений, а также метод расчета рекурсивных цифровых фильтров нижних частот, идентичных аналоговым ФНЧ в полосе пропускания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоулд Л., Рабинер Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.
2. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники/Под ред. Б. Х. Кривицкого.— М.: Энергия, 1977, т. 2.
3. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации.— М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 1 февраля 1984 г.