

Это означает, что для любого плана размещения $W' = (w'_1, \dots, w'_n)$ существует план $W^0 = (w^0_1, \dots, w^0_n)$, при котором

$$\sum_{i=1}^n A_i(w'_i) \geq \sum_{i=1}^n A_i(w^0_i) + \sum_{i=1}^n l_\infty(w'_i - w^0_i), \quad (12)$$

причем $w^0_i \in Q_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, при $T_p \geq \sqrt[p]{2} nC / (2 - \sqrt{2})$ с учетом (11), (12)

$$|F(W') - F(W^0)| \leq T_p \sum_{i=1}^n (A_i(w'_i) - A_i(w^0_i))$$

и для плана размещения $W^* = (w^*_1, \dots, w^*_n)$, доставляющего минимум функционалу (9), выполняется условие $w^*_i \in Q_i$, $i = \overline{1, n}$.

Поскольку при выполнении (7), (8) для $w_i \in Q_i$ $A_i(w_i) = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$, то план размещения $W^* = (w^*_1, \dots, w^*_n)$ является также и решением задачи (10), (3). Теорема доказана.

Данная теорема оговаривает виды разрешенных областей ((7), (8)), для которых применим метод метрико-топологических преобразований. Разрешенные области должны принадлежать классу выпуклых многоугольников, стороны которых параллельны либо координатным осям, либо биссектрисам углов между ними. Такие ограничения на вид разрешенных областей Q_i , $i = \overline{1, n}$, не являются жесткими. Практика решения задач размещения показала, что монтажное пространство даже таких сложных объектов, как самолет или автомобиль, может быть с приемлемой точностью аппроксимировано упомянутыми многоугольниками.

Заключение. Описанные выше методы метрической оптимизации сетей связи позволяют при малых затратах машинного времени вычислять оптимальный план размещения элементов распределенной системы. Метод метрико-топологических преобразований оказывается работоспособным для достаточно широкого спектра пространственных ограничений. Алгоритмы указанных методов реализованы программно и использовались при проектировании топологической схемы бортовых систем сбора и обработки информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование операций: Пер. с англ./Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.— М.: Мир, 1981.
2. Love R. The dual of a hyperbolic approximation to the generalized constrained multi-facility location problem with lp distances.— Management Sci., 1974, vol. 21, N 1.
3. Love R., Morris J. G. Solving constrained multi-facility location problems involving lp distances using convex programming.— Operat. Research, 1975, vol. 23, p. 584—587.
4. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.

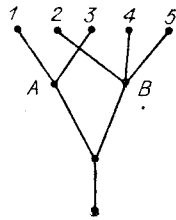
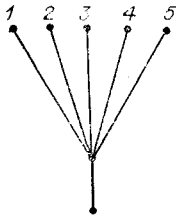
Поступила в редакцию 26 апреля 1984 г.

УДК 519.218 : 519.854

А. Д. ВАЙНШТЕЙН, А. Н. ЕФИМОВ
(Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ РАССТАНОВКЕ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ В СЕТИ

При наблюдении случайных потоков в сети часто приходится определять оптимальное расположение измерителей по элементам сети. Такая задача возникает, например, при построении АСУ магистрального



газопровода. Ниже эта задача изучается для простейшей древовидной сети в случае, когда критерием качества служит средний квадрат ошибки прогноза потока в выходящей дуге.

Постановка задачи. Рассмотрим простейшую древовидную сеть — узел с n входящими и одной выходящей дугами. Каждой входящей дуге сопоставлен стационарный центрированный случайный процесс $X_i(t)$, называемый потоком во входящей дуге. Все потоки $X_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, независимы. Поток $Y(t)$ в выходящей дуге есть сумма потоков $X_i(t)$. Прогнозирование потока в выходящей дуге можно осуществить различными способами, укладываемыми в следующую схему:

- 1) множество входящих дуг разбивается на m непересекающихся групп, каждой группе ставится в соответствие один измеритель;
- 2) проводятся измерение и экстраполяция суммарных потоков по каждой из групп;
- 3) результаты экстраполяции суммируются.

На рисунке изображены узел с пятью входящими дугами и разбиение множества входящих дуг на два подмножества: $\{1, 3\}$ и $\{2, 4, 5\}$. Два измерителя размещены в точках A и B .

Качество полученного таким образом прогноза зависит от числа m измерителей (датчиков) и способа группировки входных потоков (схемы декомпозиции узла). Как следует из результатов [1], наилучшим в смысле минимума среднего квадрата ошибки будет прогноз, получаемый по указанной выше схеме при $m = n$ (при этом проблемы группировки входных потоков не возникает: каждому входу соответствует один датчик). Заметим, что прогнозирование выходного потока по результатам измерений также может быть изучено в рамках описанной схемы: этому случаю соответствует значение $m = 1$.

Пример 1. Рассмотрим прогнозирование потока в узле с четырьмя входящими дугами. Пусть на шаге 2 описанной схемы осуществляется оптимальная линейная экстраполяция по одной точке; дисперсии входных потоков равны 1,6; 1,6; 1,6 и 3,2, а корреляционные функции в прогнозируемый момент — 1,5; 1,2; 0,1 и 2,0 соответственно. Тогда, как нетрудно убедиться, дисперсии стандартного прогноза выходного потока ($m = 1$) равны 5,145, в то время как дисперсия прогноза по измерениям всех входных потоков ($m = 4$) — 4,44. Таким образом, выигрыш в точности при использовании четырех датчиков достигает около 13%.

В реальных ситуациях количество датчиков ограничено ($m < n$), и возникает задача выбора оптимальной схемы декомпозиции узла.

Задача выбора оптимальной схемы декомпозиции узла. Каждая группировка входных потоков по m измерителям задает на множестве X_1, \dots, X_n разбиение A_1, \dots, A_m . Здесь A_i состоит из всех потоков X_j , измеряемых i -м датчиком. При этом

$$Y(t) = \sum_{j=1}^m Y_j(t); \quad Y_j(t) = \sum_{i \in A_j} X_i(t). \quad (1)$$

Прогнозом процесса Y на время θ назовем величину

$$\widehat{Y}_\Sigma(\theta) = \sum_{j=1}^m \widehat{Y}_j(\theta), \quad (2)$$

где

$$\widehat{Y}_j(\theta) = \left(\sum_{i \in A_j} R_j(\theta) / \sum_{i \in A_j} D_i \right) \sum_{i \in A_j} X_i(0) \quad (3)$$

— линейный прогноз процесса $Y_j(t)$ на время θ по одной точке [2]; D_i и R_i — соответственно дисперсия и корреляционная функция процесса X_i .

Критерием качества прогноза будем считать величину среднего квадрата ошибки:

$$e_{\Sigma}^2(\theta) = M [Y(\theta) - \widehat{Y}_{\Sigma}(\theta)]^2. \quad (4)$$

Здесь M — символ математического ожидания. С учетом (1)–(3) и вследствие независимости процессов $X_i(t)$ (4) приводим к виду

$$e_{\Sigma}^2(\theta) = \sum_{i=1}^n D_i - \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{i \in A_j} R_i(\theta) \right)^2 / \sum_{i \in A_j} D_i \right). \quad (5)$$

где $A_j = \{i_1, i_2, \dots, i_{k_j}\}$ — множество номеров датчиков, входящих в прогноз в зависимости от схемы декомпозиции узла. Чем больше значение F в (6), тем более эффективным является прогноз. Как следует из изложенного выше, случаю прогноза по результатам измерения выходного потока соответствует значение

$$F_0 = \left(\sum_{i=1}^n R_i \right)^2 / \sum_{i=1}^n D_i.$$

Таким образом, для заданной схемы декомпозиции узла выигрыш в точности по сравнению с прогнозированием без декомпозиции есть $\Delta = F - F_0$.

Анализ полученной формулы показывает, что если для всех входных потоков отношения R_i/D_i равны, то $\Delta = 0$ независимо от схемы декомпозиции. Следовательно, в этом случае использование $m > 1$ датчиков нецелесообразно — следует ограничиться лишь одним. Если же среди чисел R_i/D_i есть различные, то $\Delta > 0$, причем выигрыш в точности тем больше, чем более удалены эти числа друг от друга. Кроме того, из предыдущего следует, что потоки с одинаковым значением R_i/D_i должны подаваться на один и тот же датчик.

Приведенные рассуждения поясняют задачу выбора оптимальной схемы декомпозиции узла на качественном уровне. Для точного ответа на этот вопрос сформулируем математическую постановку рассматриваемой задачи.

Введем m n -мерных векторов неизвестных $Z_j = (z_{j1}, \dots, z_{jn})$, $j = 1, \dots, m$. Будем полагать $z_{ji} = 1$, если i -й входной поток попадает в j -ю группу, и $z_{ji} = 0$ в противном случае. Тогда задача выбора оптимальной схемы декомпозиции узла запишется в виде

$$F(Z_1, \dots, Z_m) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n R_i z_{ji} \right)^2 / \sum_{i=1}^n D_i z_{ji} \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^m z_{ji} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_{ji} = 0 \vee 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Решение задачи (7). Сформулированная задача является задачей дробно-рационального целочисленного программирования [3]. В общем случае решение таких задач представляет значительные трудности. Ниже предложен метод сведения задачи (7) к последовательности линейных целочисленных задач достаточно простой структуры — так называемых задач о рюкзаке [4].

Рассмотрим семейство задач

$$L_j^k(Z_1, \dots, Z_{j-1}): \sum_{i=1}^n R_i z_{ji} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^n D_i z_{ji} = b_j^k, \quad (8)$$

$$z_{ji} + \sum_{l=1}^{j-1} z_{li} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_{ji} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $b_j^0 = 0$, b_j^k при $k \geq 1$ — оптимальное значение задачи:

$$T_j^k(Z_1, \dots, Z_{j-1}): \sum_{i=1}^n D_i z_{ji} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^n D_i z_{ji} > b_j^{k-1}, \quad (9)$$

$$z_{ji} + \sum_{l=1}^{j-1} z_{li} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_{ji} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

j меняется от 1 до $m-1$, k (при фиксированном j) — от 1 до $K_j = \max\{k \mid b_j^k < \infty\} - 1$. Величины z_{li} , $l = 1, \dots, j-1$, $i = 1, \dots, n$, считаются известными к началу решения задач L_j^k и T_j^k .

Алгоритм решения задачи (7) состоит в решении задач типа (8) и (9) в некоторой последовательности, которую определим индуктивно по m . При $m = 2$ задачи (8) и (9) записываются в виде

$$L_1^k(\emptyset): \sum_{i=1}^n R_i z_{1i} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^n D_i z_{1i} = b_1^k, \quad z_{1i} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$T_1^k(\emptyset): \sum_{i=1}^n D_i z_{1i} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=1}^n D_i z_{1i} > b_1^{k-1}, \quad z_{1i} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Последовательность их решения такова:

$$E_2^1(\emptyset): T_1^1(\emptyset) \rightarrow L_1^1(\emptyset) \rightarrow T_1^2(\emptyset) \rightarrow L_1^2(\emptyset) \rightarrow \dots \rightarrow T_1^{K_1}(\emptyset) \rightarrow L_1^{K_1}(\emptyset). \quad (11)$$

Пусть Z_1^k — оптимальное решение задачи $L_1^k(\emptyset)$. Тогда оптимальное значение F^* задачи (7) при $m = 2$ находится из соотношения

$$F^* = \max_{1 < k < K_1} F(Z_1^k, I - Z_1^k), \quad (12)$$

причем вектор (Z_1^*, Z_2^*) , на котором достигается максимум в (12), — оптимальное решение задачи (7) (здесь $I = (1, \dots, 1)$ — вектор длиной n). Доказательство этого факта основано на свойстве выпуклости целевой функции задачи (7) и в данной статье не приводится.

Таким образом, при $m = 2$ для решения задачи (7) необходимо решить линейные задачи (10) в последовательности (11), а затем из (12) найти оптимальное решение.

Для перехода к случаю $m = 3$ определим последовательность

$$E_2^2(Z_1): T_2^1(Z_1) \rightarrow L_2^1(Z_1) \rightarrow T_2^2(Z_1) \rightarrow L_2^2(Z_1) \rightarrow \dots \rightarrow T_2^{K_2}(Z_1) \rightarrow L_2^{K_2}(Z_1), \quad (13)$$

где задачи $T_2^k(Z_1)$, $L_2^k(Z_1)$ решаются относительно Z_2 при фиксированном Z_1 . Тогда последовательность решения задач (8), (9) для $m = 3$

можно записать в виде

$$E_3^1(\emptyset): T_1^1(\emptyset) \rightarrow L_1^1(\emptyset) \rightarrow E_2^2(Z_1^1) \rightarrow T_1^2(\emptyset) \rightarrow L_1^2(\emptyset) \rightarrow E_2^2(Z_1^2) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T_1^{K_1}(\emptyset) \rightarrow L_1^{K_1}(\emptyset) \rightarrow E_2^2(Z_1^{K_1}).$$

В общем случае пусть определена последовательность $E_m^1(\emptyset)$. Аналогично (13) построим $E_m^2(Z_1)$. Тогда $E_{m+1}^1(\emptyset)$ запишется в виде

$$E_{m+1}^1(\emptyset): T_1^1(\emptyset) \rightarrow L_1^1(\emptyset) \rightarrow E_m^2(Z_1) \rightarrow T_1^2(\emptyset) \rightarrow L_1^2(\emptyset) \rightarrow E_m^2(Z_1^2) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow T_1^{K_1}(\emptyset) \rightarrow L_1^{K_1}(\emptyset) \rightarrow E_m^2(Z_1^{K_1}). \quad (14)$$

Пусть $Z_1^{h_1}$ — решение задачи $L_1^{h_1}(\emptyset)$, $Z_2^{h_2} = Z_2^{h_2}(Z_1^{h_1})$ — решение задачи $L_2^{h_2}(Z_1^{h_1}), \dots$; $Z_{m-1}^{h_{m-1}} = Z_{m-1}^{h_{m-1}}(Z_1^{h_1}, \dots, Z_{m-2}^{h_{m-2}})$ — решение задачи $L_{m-1}^{h_{m-1}}(Z_1^{h_1}, \dots, Z_{m-2}^{h_{m-2}})$. Обозначим через \mathcal{Z} множество всех m -векторов вида $(Z_1^{h_1}, \dots, Z_{m-1}^{h_{m-1}}, I - \sum_{l=1}^{m-1} Z_l^{h_l})$. Тогда по аналогии с (12)

$$F^* = \max_{(Z_1, \dots, Z_m) \in \mathcal{Z}} F(Z_1, \dots, Z_m), \quad (15)$$

и вектор (Z_1^*, \dots, Z_m^*) , на котором достигается максимум в (15), — оптимальное решение задачи (7). Это утверждение может быть доказано по индукции с использованием (12).

Таким образом, алгоритм решения задачи (7) состоит в решении линейных целочисленных задач вида (8), (9) в последовательности (14) и дальнейшем решении задачи (15). Эта процедура оказывается особенно эффективной, если среди коэффициентов D_i много одинаковых.

Случай равных дисперсий входных потоков. Рассмотрим случай, когда все D_i одинаковы: $D_i = D$, $i = 1, \dots, n$. Тогда оптимальные значения задач $T_1^k(\emptyset)$ могут быть записаны в явном виде: $b_1^k = kD$. Отсюда видно, что в оптимальном решении задачи $L_1^k(\emptyset)$ ровно k координат z_i отличны от нуля. При этом ненулевые координаты z_i стоят на местах, соответствующих k наибольшим коэффициентам R_i . Проводя аналогичные рассуждения для задач (8), (9), получим следующее утверждение о структуре оптимального решения задачи (7) при $D_i = D$, $i = 1, \dots, n$: пусть коэффициенты R_i упорядочены по невозрастанию, т. е. $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n$, тогда существуют такие числа n_1, n_2, \dots, n_{m-1} , $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_{m-1} < n$, что в оптимальном решении задачи (7)

$$z_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{при } n_{j-1} < i \leq n_j, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Здесь $n_0 = 0$, $n_m = n$.

Иными словами, пусть входные потоки перенумерованы по убыванию значения корреляционной функции в прогнозируемый момент. Тогда на первый датчик поступают сигналы от входов с номерами $1, 2, \dots, n_1$, на второй — от входов с номерами $n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2$ и т. д. Это означает, что для отыскания оптимальной схемы декомпозиции узла необходимо лишь определить размеры групп, т. е. величины $n_1, n_2 - n_1, \dots, n - n_{m-1}$. Разбиения, не удовлетворяющие сформулированному условию, заведомо не могут быть оптимальными и потому не рассматриваются.

Таким образом, при равных D_i для решения задачи (7) необходимо решить задачу (15) для множества \mathcal{Z} , состоящего из векторов вида (16). Всего таких векторов

$$C_{n-1}^{m-1} = O\left(\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}\right),$$

в то время как количество допустимых решений задачи (7) равно m^n . Например, при $m=2$ нужно будет сравнивать значения функционала (6) в $n-1$ точках вместо 2^n . Следовательно, предлагаемая схема позволяет существенно уменьшить трудоемкость решения исходной задачи.

Пример 2. Рассмотрим сеть и потоки с теми же параметрами, что и в примере 1, но при наличии только двух датчиков ($m=2$). Задача (7) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} & (1,5z_{11} + 1,2z_{12} + 0,1z_{13} + 2z_{14})^2 / (1,6z_{11} + 1,6z_{12} + 1,6z_{13} + 3,2z_{14}) + \\ & + (1,5z_{21} + 1,2z_{22} + 0,1z_{23} + 2z_{24})^2 / (1,6z_{21} + 1,6z_{22} + 1,6z_{23} + 3,2z_{24}) \rightarrow \max, \\ & z_{11} + z_{21} = z_{12} + z_{22} = z_{13} + z_{23} = z_{14} + z_{24} = 1, \\ & z_{ji} = 0 \vee 1, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Согласно (10) запишем задачу $T_1^1(\emptyset)$:

$$\begin{aligned} & 1,6z_{11} + 1,6z_{12} + 1,6z_{13} + 3,2z_{14} \rightarrow \min, \\ & 1,6z_{11} + 1,6z_{12} + 1,6z_{13} + 3,2z_{14} > 0, \\ & z_{1i} = 0 \vee 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Легко видеть, что ее оптимальное значение $b_1^1 = 1,6$. Тогда задача $L_1^1(\emptyset)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} & 1,5z_{11} + 1,2z_{12} + 0,1z_{13} + 2z_{14} \rightarrow \max, \\ & 1,6z_{11} + 1,6z_{12} + 1,6z_{13} + 3,2z_{14} = 1,6, \\ & z_{1i} = 0 \vee 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Оптимальное решение в данном случае таково: $Z_1^1 = (1, 0, 0, 0)$. Осуществляя дальнейшее решение задач $T_1^k(\emptyset)$ и $L_1^k(\emptyset)$ в последовательности $E_2^1(\emptyset)$ согласно (11), получим $b_1^2 = 3,2$, $Z_1^2 = (1, 1, 0, 0)$; $b_1^3 = 4,8$, $Z_1^3 = (1, 0, 0, 1)$; $b_1^4 = 6,4$, $Z_1^4 = (1, 1, 0, 1)$. Для решения задачи (12) теперь достаточно сравнить значения критерия F в четырех точках: $Z_1^1, Z_1^2, Z_1^3, Z_1^4$. Непосредственное вычисление дает $F^* = F(Z_1^4) \simeq 3,455$. Таким образом, наилучшим является случай, когда на первый датчик подаются сигналы от источников 1, 2 и 4, а на второй — сигнал от источника 3. При этом средний квадрат ошибки прогноза согласно (5) равен 4,545.

Заметим, что, как следует из примера 1, при прогнозировании с помощью одного датчика средний квадрат ошибки равен 5,145, следовательно, уже использование одного дополнительного датчика дает выигрыш в точности примерно 11%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов А. Н., Рубанов В. Г. Об алгоритмах суммирования случайных процессов.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1970, № 3.
2. Ицкович Э. Л. Контроль производства с помощью вычислительных машин.— М.: Энергия, 1975.
3. Hansen P. Methods of nonlinear 0—1 programming.— Annals of Discr. Math., 1979, vol. 5, p. 53—70.
4. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 12 декабря 1983 г.;
окончательный вариант — 16 февраля 1984 г.