

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аракельян В. В., Межиев А. М., Саркисянц Л. С. К вопросу построения адаптивной системы сбора экспериментальной информации в АСУ микробиологическим экспериментом.— В кн.: Аппаратура и управление. Рига: Зинатне, 1978.
2. Саркисянц Л. С., Аракельян В. В. Адаптация к входному потоку данных в системах автоматизации микробиологического эксперимента.— В кн.: Автоматизация микробиологических процессов. Рига: Зинатне, 1982.
3. Аракельян В. В., Егичко В. М., Саркисянц Л. С., Филиппова О. Н. Системный анализ микробиологического эксперимента как объекта автоматизации.— Химико-фармацевтический журнал, 1980, № 7, с. 98—103.
4. Авдеев Б. Я. и др. Адаптивные телеизмерительные системы.— Л.: Энергоиздат, 1981.

*Поступила в редакцию 11 марта 1983 г.;  
окончательный вариант — 18 июня 1984 г.*

УДК 621.317

Г. Я. ПАТРУШЕВ, Т. П. ПЕЧЕРКИНА, А. П. РОСТОВ

(Томск)

### О РЕАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Зависимости от времени ряда физических и метеорологических полей часто носят характер хаотических колебаний и рассматриваются как реализации соответствующего случайного процесса. В качестве примеров можно привести задачи статистической гидромеханики, радиофизики и оптики [1—3]. В силу ряда причин описание случайного процесса последовательностью моментов широко распространено и часто используется для оценки близости его плотности распределения вероятностей к определенному закону. Имеется ряд работ (их краткий обзор приведен в [4, с. 234]), в которых рассматриваются статистические погрешности оценок высших моментов. Наиболее распространенным моделям случайных процессов — гауссову и логарифмически нормальному — посвящены публикации [5, 6], где приведены достаточно общие выражения для относительных среднеквадратических погрешностей оценок высших моментов. В то же время экспериментальные оценки точности измерения высших моментов гауссова случайного процесса, полученные в [7], как считает автор, не согласуются с имеющимися теоретическими результатами, а в более поздней работе [6] такое сравнение теоретических и экспериментальных оценок не проводится. Насколько нам известно, в настоящее время практически отсутствуют данные о применимости точности оценок высших моментов, полученных в [5, 6], к реальным случайным процессам (временным рядам). Это связано, по-видимому, с тем, что в теории не учитывается одновременное действие двух факторов: ограниченность диапазона значений, принимаемого случайным процессом за время измерения  $T$ , и конечная продолжительность самого процесса измерения. Учитывается только конечность  $T$  и неявно предполагается, что за время измерений реализуются сколь угодно маловероятные значения случайного процесса, которые приписывают значения на неограниченном интервале. Однако такая модель случайного сигнала оказывается оторванной от технической сути самого процесса измерений и при оценке высших моментов дает результаты, далекие от реальных. Поясним последний момент подробнее. Измерительная аппаратура так же, как и реальные процессы, всегда имеет ограниченный динамический диапазон и в силу самого характера процесса измерений настраивается на наиболее вероятные значения сигнала так, чтобы полнее его использовать. Это приводит к тому, что маловероятные значения случайного процесса, соответствующие

большим, по конечным выбросам или глубоким замираниям, будут искажены. Например, выбросы будут ограничены, а замирания искажены шумами аппаратуры.

Нам рассмотрено совместное влияние обоих факторов — конечности динамического диапазона измерительной аппаратуры и времени измерения — на точность экспериментального определения высших моментов временных рядов. Для простейших моделей гауссова и логарифмически нормального случайных процессов получены аналитические результаты и данные моделирования, подтверждающие конструктивность предложенного подхода. Полученные результаты используются для объяснения ряда экспериментальных данных [7–9].

Пусть случайный процесс  $I(t)$  имеет плотность распределения вероятностей  $P(I)$  ( $-\infty < I < \infty$ ), которой соответствует теоретический момент

$$\langle M^n \rangle = \int P(I) I^n dI. \quad (1)$$

Измеряемой величиной является среднеарифметическая оценка  $n$ -го момента процесса, получаемая по его реализации  $I(t)$ :

$$M_s^n = T^{-1} \int_0^T \tilde{I}^n(t) dt. \quad (2)$$

Оценка представляет собой случайную величину для отдельной реализации. Вычислим среднее значение  $\langle M_s^n \rangle$  и дисперсию  $D[M_s^n]$  экспериментального момента (2), считая выполненными условия эргодичности для ансамбля реализаций  $I(t)$ . Тогда для  $\langle M_s^n \rangle$  имеем

$$\langle M_s^n \rangle = \int P_s(\tilde{I}) \tilde{I}^n d\tilde{I}, \quad (3)$$

где  $P_s(\tilde{I})$  — экспериментальная плотность распределения вероятностей реализаций процесса, которая отличается от  $P(I)$  ограниченностью диапазона значений, принимаемого случайным процессом при измерениях. Очевидно, отношение  $\delta_n = \langle M_s^n \rangle / \langle M^n \rangle$  характеризует смещение оценки момента (3) относительно его модельного значения (1). Случайную составляющую погрешности измерений по одной реализации (2) получим, исходя из известного общего выражения для дисперсии оценки момента:

$$D[M_s^n] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) C_n(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Здесь  $C_n(\tau) = \langle \tilde{I}^n(t) \tilde{I}^n(t+\tau) \rangle - \langle M_s^n \rangle^2$  — автоковариационная функция  $n$ -го момента ансамбля реализации  $\tilde{I}(t)$  процесса. Учитывая ограниченность диапазона значений, принимаемых случайным процессом в измерениях, запишем  $C_n(\tau)$  в виде

$$C_n(\tau) = \langle M_s^{2n} \rangle R_n(\tau) - \langle M_s^n \rangle^2 = [\langle M_s^{2n} \rangle - \langle M_s^n \rangle^2] r_n(\tau), \quad (5)$$

$R_n(\tau)$  — коэффициент автокорреляции  $n$ -го момента. Если время измерения  $T$  много больше масштаба корреляции  $\tau_k$  процесса, то выражение можно несколько упростить:

$$D[M_s^n] = \frac{2}{T} [\langle M_s^{2n} \rangle - \langle M_s^n \rangle^2] \int_0^T r_n(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Величину  $\int_0^T r_n(\tau) d\tau$  часто определяют как интегральный масштаб корреляции.

Рассмотрим смещение высших моментов широко распространенных случайных процессов с гауссовой и логарифмически нормальной плотно-

стями распределения вероятностей. Пусть гауссово распределение имеет нулевое среднее значение  $\xi = 0$ , среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  и максимальное значение  $I_{\max} = 4\sigma$ . Такими характеристиками обладает, например, процесс на выходе стандартного генератора шума, используемого в [7]. Строго говоря, приводимый пример соответствует усеченному гауссову распределению

$$P_0(I) = C[\sigma\sqrt{2\pi}]^{-1} \exp(-I^2/2\sigma^2), \quad |I| \leq 4\sigma = I_{\max}, \quad (7)$$

с нормирующей константой  $C = [\Phi(4\sigma) - \Phi(-4\sigma)]^{-1} = 1,0006$ , где  $\Phi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ . Сначала будем считать, что аппаратура не искажает сигнал. Тогда, используя (3) и (7), после некоторых преобразований получим для четных моментов

$$\langle M_0^{2n} \rangle = CM^{2n} P\{\chi_{2n+1}^2 \leq I_{\max}^2/\sigma^2\}, \quad M^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Здесь  $P\{\chi_{2n+1}^2 \leq A\}$  — вероятность того, что случайная величина, распределенная по закону  $\chi^2$  с  $2n+1$  степенями свободы, меньше значения  $A$ . Расчеты по формулам (8) при динамическом диапазоне  $I_{\max} = 4\sigma$  дают заметное смещение лишь десятого момента ( $\delta_4 \approx 1$ ;  $\delta_6 \approx 0,975$ ;  $\delta_8 \approx 0,93$ ;  $\delta_{10} \approx 0,9$ ), в то время как при динамическом диапазоне  $\pm 3\sigma$  смещение становится существенным уже для четвертого момента ( $\delta_4 \approx 0,9$ ;  $\delta_6 \approx 0,75$ ;  $\delta_8 \approx 0,6$ ;  $\delta_{10} \approx 0,4$ ). Если сигнал ограничивается аппаратурой на уровне  $I_d = \pm 3\sigma$ , то  $P_0(I)$  запишется в виде

$$P_0(I) = C(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-I^2/2\sigma^2} + C\left[\Phi\left(\frac{I_n}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{I_n}{\sigma}\right)\right] \{\delta(I - I_n) + \delta(I + I_n)\}; \quad -I_d \leq I \leq I_d, \quad (9)$$

$\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Тогда из (1), (3) и (9) для величины  $\delta_{2n}$  получим следующую формулу:

$$\delta_{2n} = CP \left\{ \chi_{2n+1}^2 \leq \frac{I_d^2}{\sigma^2} \right\} + 2 \frac{C}{(2n-1)!} \left(\frac{I_d}{\sigma}\right)^2 \left[ \Phi\left(\frac{I_d}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{I_d}{\sigma}\right) \right], \quad (10)$$

расчеты по которой дают значения, мало отличающиеся от случая

$$I_{\max} = \pm 3\sigma: (\delta_4 \approx 0,91; \delta_6 \approx 0,81; \delta_8 \approx 0,68; \delta_{10} \approx 0,48);$$

$$\Phi(4) - \Phi(3) = 0,0013.$$

Разумеется, это имеет место только при редких ограничениях в реализации.

Рассмотрим случайный процесс  $I(t)$  с усеченным логарифмически нормальным распределением

$$P_0(I) = (C_1/IV\sqrt{2\pi}\sigma) \exp[-(1/2\sigma^2)(\ln I - \xi)^2], \quad 0 \leq I \leq I_{\max}, \quad (11)$$

где константа  $C_1$  определяется из условия нормировки;  $\xi$ ,  $\sigma$  — среднее значение и среднеквадратическое отклонение соответствующего гауссова случайного процесса. Моменты распределения (11) запишутся в виде

$$\langle M_0^n \rangle = \langle M^n \rangle \frac{C_1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[ \frac{\ln I_{\max} - \xi}{\sigma\sqrt{2}} - \frac{n\sigma}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь  $\langle M^n \rangle = \exp(\xi n + \sigma^2 n^2/2)$  —  $n$ -й момент логарифмически нормального распределения,  $\operatorname{erf}(x)$  — интеграл вероятностей [10]. Распределение (11) хорошо описывает плотность вероятностей флуктуаций интенсивности световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере [8]. Однако при этом наблюдается заметное отличие значений высших экспериментальных моментов  $\langle M_0^n \rangle$  от теоретических  $\langle M^n \rangle$ . Оно получает единственное объяснение, если использовать выражения (12). Известно, что

среднее значение  $\langle M^1 \rangle = \langle I \rangle$  и относительная дисперсия  $\beta^2 = (\langle M^2 \rangle / \langle M^1 \rangle^2) - 1$  логарифмически нормального распределения связаны со средним значением  $\xi$  и дисперсией  $\sigma^2$  нормального распределения соотношениями

$$\xi = \ln(\langle I \rangle / (1 + \beta^2)^{1/2}), \quad \sigma^2 = \ln(1 - \beta^2). \quad (13)$$

Подставляя в (13) значения  $\langle I \rangle = 1$ ,  $\beta^2 = 1,18$ ,  $I_{\max} = 27\langle I \rangle$  из [8], получаем  $C_1 = 1,0014$ ,  $\xi = -0,38966$ ,  $\sigma = 0,9078$ , по которым из (12) находим отношения  $\delta_3 = 0,94$ ,  $\delta_4 = 0,74$ . Эти отношения полностью совпадают с экспериментальными данными, приведенными в табл. 1 работы [8].

Перейдем к объяснению результатов [7]. Согласно приведенным в ней данным корреляционную функцию процесса можно представить в виде

$$K(\tau) = \sigma^2 R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau} \cos 2\pi f_0 \tau, \quad \alpha = 300\pi, \quad f_0 = 700 \text{ Гц}. \quad (14)$$

Корреляционная функция  $n$ -го момента гауссова случайного процесса  $K_n(\tau) = \langle I^n(t) I^n(t + \tau) \rangle$  выражается через низший момент  $K(\tau)$  согласно формуле [6]

$$K_n(\tau) = \sigma^{2n} \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{(n!)^2 K^{n-2p}(\tau)}{(p!)^2 (n-2p)! 2^{2p}}, \quad (15)$$

где  $E(x)$  — символ целой части числа. Следовательно,  $C_n(\tau)$  в формуле (15) запишется как

$$C_n(\tau) = (\langle M_{\sigma}^{2n} \rangle / M^{2n}) K_n(\tau) - \langle M_{\sigma}^n \rangle^2, \quad R_n(\tau) = K_n(\tau) / M^{2n}. \quad (16)$$

Расчеты нормированной среднеквадратической погрешности измерения моментов  $\tilde{\sigma}_n = D^{1/2} [M_{\sigma}^n] / \langle M_{\sigma}^n \rangle$  с использованием формул (4), (8), (15) и (16) при  $I_{\max} = \pm 4\sigma$  дают значения близкие к приведенным в [7] для случая зависимых отсчетов:  $\tilde{\sigma}_2 = 0,0012$ ,  $\tilde{\sigma}_4 = 0,008$ ,  $\tilde{\sigma}_6 = 0,023$ ,  $\tilde{\sigma}_8 = 0,043$ ,  $\tilde{\sigma}_{10} = 0,11$ .

Сравнительно простое аналитическое выражение величины  $\tilde{\sigma}_n$  получается для логарифмически нормального процесса вида

$$I(t) = e^{y(t)}, \quad \langle y \rangle = 0, \quad \langle y^2 \rangle = \sigma^2, \quad (17)$$

где  $y(t)$  — гауссов случайный процесс с автоковариационной функцией

$$C(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 (1 - |\tau|/\tau_K), & |\tau| \leq \tau_K; \\ 0, & |\tau| > \tau_K. \end{cases} \quad (18)$$

Используя известное равенство

$$\langle e^y \rangle = e^{\langle y \rangle + (1/2)(\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2)} \quad (19)$$

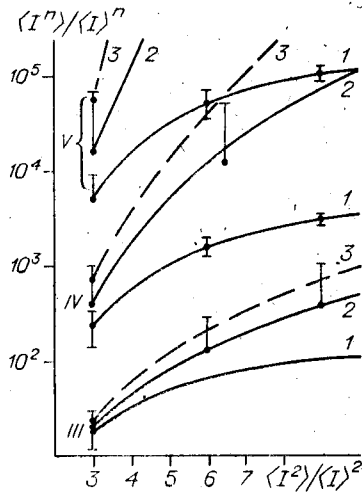
и выражение (4), получим при отсутствии ограничений и  $\tau_K \ll T$  зависимость относительной среднеквадратической погрешности измерения момента

$$\tilde{\sigma}_n \approx 2 \left( \frac{\tau_K}{T} \right)^{1/2} \frac{e^{n^2 \sigma^2 / 2}}{n\sigma} \frac{\left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln I_{\max} - \xi}{\sigma \sqrt{2}} 2n\sigma \right) \right]^{1/2}}{1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln I_{\max} - \xi}{\sigma \sqrt{2}} - n\sigma \right)} [1 - e^{-1}]^{1/2}, \quad (20)$$

в которой учтены параметры процесса  $\xi$ ,  $\sigma$ ,  $\tau_K$ , время измерения  $T$  и динамический диапазон значений, принимаемых сигналом  $(0 \div I_{\max})$ . При  $I_{\max} \rightarrow \infty$   $\operatorname{erf}(\dots) \rightarrow 1$ , так что

$$\tilde{\sigma}_n = \left( \frac{2\tau_K}{T} \right)^{1/2} \frac{e^{n^2 \sigma^2 / 2}}{n\sigma} [1 - e^{-1}]^{-1} \quad (21)$$

для конечных  $n$ . Расчеты по этой формуле при  $\tau_K = 1$  удовлетворительно согласуются с численными данными [5], полученными в частном случае  $\sigma = 1$ ,  $\xi = 0$ ,  $C(\tau) = e^{-\tau}$ , что указывает на относительно слабое влияние конкретного вида функции  $C(\tau)$  на величину  $\tilde{\sigma}_n$  при  $\tau_K \ll T$ .



Для дополнительной, независимой от работ [7, 8] проверки конструктивности изложенного способа оценки погрешности измерения высших моментов проводилось моделирование на ЭВМ процесса вида (17) с использованием датчика нормальных случайных чисел [11]. При этом задавались \* средние значения  $\langle I \rangle$ , относительная дисперсия  $\beta^2 = (\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2) - 1$ . При моделировании фиксировались  $I_{\max}$  — максимальное значение сигнала в реализации,  $N_i$  — число выбросов за динамический диапазон  $I_d = 4095$  ( $I > I_d$ ). Выборочные моменты вычислялись по реализации длительностью  $T = N\tau_n = 16 \times 10^3 \tau_n$ . Итоговые статистики определялись по ансамблю из 30 реализаций. Результаты моделирования приведены на рисунке. Здесь по оси ординат отложены значения нормированных моментов  $\langle I^n \rangle / \langle I \rangle^n$  ( $n = III \div V$ ; в отличие от текста на рисунке используются римские цифры); по оси абсцисс — нормированный второй момент  $\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 = \beta^2 + 1$ , который вместе со средним значением  $\langle I \rangle = 100$  полностью характеризует логарифмически нормальное распределение. Сплошные линии 1 соответствуют отношению  $\langle I_0^n \rangle / \langle I_0 \rangle^n$  при наличии ограничения, 2 — при отсутствии ограничений в реализации; кривая 3 — теоретическая зависимость (1) для логарифмически нормального распределения. Для кривых 2 смещение моментов  $\delta_n$  удовлетворительно описывается формулой (12), а статистический разброс, указанный на рисунке вертикальными скобками, — выражением (4). При наличии ограничений в реализациях величина смещения существенно возрастает и хорошо описывается формулой

$$\langle I_0^n \rangle = \int_0^{I_d} \tilde{I}^n P_0(\tilde{I}) + I_d^n \frac{N_i}{N}. \quad (22)$$

Поскольку увеличение смещения направлено в сторону уменьшения момента, это, естественно, приводит к уменьшению статистического разброса оценок моментов. Количественно оно также описывается выражением (20), где следует заменить  $I_{\max}$  на  $I_d$  и внести очевидное дополнительное слагаемое за счет вероятности выбросов по аналогии с (9) и (10).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин В. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965.
2. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
4. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
5. Алексеев В. Г. О точности экспериментального определения моментов высших порядков временных рядов. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 6.
6. Орличенко А. Н. Дисперсия оценок одномерных моментов высоких порядков нормального стационарного процесса. — В кн.: Вопросы формирования и обработки сигналов в радиотехнических системах. Таганрог, 1978, вып. 2.
7. Москанов Н. Д. О статистических погрешностях вычисления моментов высоких порядков одномерных законов распределения случайных процессов. — В кн.: Тез. докл. IX Всесоюз. симп. «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Сек. 1. Л., 1976.
8. Грачева М. Е., Гурвич А. С., Лонадзе С. О., Покасов Вл. В., Хрущин А. С. Распределение вероятностей «сильных» флуктуаций интенсивности света в атмосфере. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 1.

\* Выбор параметров процесса связан с научными интересами авторов [9].

9. Патрушев Г. Я., Петров А. И., Покасов В. В. Флуктуации интенсивности при зеркальном отражении оптических пучков в турбулентной атмосфере.— Изв. вузов. Радиофизика, 1983, № 7.
10. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
11. Сборник научных программ на Фортране.— М.: Статистика, 1974, вып. 1.

Поступила в редакцию 21 ноября 1983 г.

УДК 519.219 : 519.237.5

В. В. АНТИПИЦ, А. Г. БУЙМОВ

(Томск)

### СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОШИБОК СОВМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В УСЛОВИЯХ ОКРАШЕННОГО ШУМА

**Введение.** В работе [1] проведен ковариационный анализ случайных ошибок

$$\hat{\lambda} = A_0^{-1} n^{-1} \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \nabla x_{ij} \quad (1)$$

экстремального совмещения изображений по методу наименьших квадратов (МНК). Изображения наблюдаются на прямоугольном точечном растре  $n = T_1 \times T_2$ . Одно из них является «эталоном»  $x_{ij}(0)$ , а другое — его сдвинутой, повернутой, размасштабированной копией  $x_{ij}(\lambda)$ , искаженной аддитивным окрашенным шумом  $\varepsilon_{ij}$  с нулевым средним. Считается, что градиенты яркости  $\nabla x_{ij} = \partial x_{ij}(0) / \partial \lambda$  известны точно и обладают ковариационной матрицей

$$A_\tau = (T_1 - |\tau_1|)^{-1} (T_2 - |\tau_2|)^{-1} \sum_{i=1}^{T_1 - |\tau_1|} \sum_{j=1}^{T_2 - |\tau_2|} \begin{cases} \nabla x_{ij} \nabla^T x_{i+|\tau_1|, j+|\tau_2|}, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0; \\ \nabla x_{i+|\tau_1|, j} \nabla^T x_{i, j+|\tau_2|}, \tau_1 \leq 0, \tau_2 > 0; \\ \nabla x_{i+|\tau_1|, j+|\tau_2|} \nabla^T x_{ij}, \tau_1 \leq 0, \tau_2 \leq 0; \\ \nabla x_{i, j+|\tau_2|} \nabla^T x_{i+|\tau_1|, j}, \tau_1 > 0, \tau_2 \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

невырожденной при  $\tau = 0$ .

Исследования [1] показали, что если выполняются условия плавности изменения дисперсии шума и независимости его свойств от значений градиентов яркости эталона, то неоднородный шум с известной средней дисперсией  $\mu_2$  и средней корреляционной функцией  $\rho(\tau_1, \tau_2)$  можно заменить однородным эквивалентом и вычислять ковариационную матрицу  $C$  ошибок (1) по формуле

$$C = \frac{\mu_2}{n} A_0^{-1} \left( \sum_{\tau_1=-(T_1-1)}^{T_1-1} \sum_{\tau_2=-(T_2-1)}^{T_2-1} \left(1 - \frac{\tau_1}{T_1}\right) \left(1 - \frac{\tau_2}{T_2}\right) \rho(\tau_1, \tau_2) A_\tau \right) A_0^{-1}. \quad (3)$$

Если  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — сдвиги по  $i$  и  $j$ ,  $\lambda_3$  — поворот,  $\lambda_4$  — изменение масштаба, то блок матрицы (2), ответственный за совмещение по  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , имеет вид

$$\Phi_\tau = -\psi \frac{\partial^2 \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k \partial \tau_l}, \quad k, l = 1, 2. \quad (4)$$