

9. Патрушев Г. Я., Петров А. И., Покасов В. В. Флуктуации интенсивности при зеркальном отражении оптических пучков в турбулентной атмосфере.— Изв. вузов. Радиофизика, 1983, № 7.
10. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
11. Сборник научных программ на Фортране.— М.: Статистика, 1974, вып. 1.

Поступила в редакцию 21 ноября 1983 г.

УДК 519.219 : 519.237.5

В. В. АНТИПИН, А. Г. БУЙМОВ

(Томск)

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОШИБОК СОВМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В УСЛОВИЯХ ОКРАШЕННОГО ШУМА

Введение. В работе [1] проведен ковариационный анализ случайных ошибок

$$\hat{\lambda} = A_0^{-1} n^{-1} \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \nabla x_{ij} \quad (1)$$

экстремального совмещения изображений по методу наименьших квадратов (МНК). Изображения наблюдаются на прямоугольном точечном растре $n = T_1 \times T_2$. Одно из них является «эталоном» $x_{ij}(0)$, а другое — его сдвинутой, повернутой, размасштабированной копией $x_{ij}(\lambda)$, искаженной аддитивным окрашенным шумом ε_{ij} с нулевым средним. Считается, что градиенты яркости $\nabla x_{ij} = \partial x_{ij}(0) / \partial \lambda$ известны точно и обладают ковариационной матрицей

$$A_\tau = (T_1 - |\tau_1|)^{-1} (T_2 - |\tau_2|)^{-1} \sum_{i=1}^{T_1-|\tau_1|} \sum_{j=1}^{T_2-|\tau_2|} \begin{cases} \nabla x_{ij} \nabla^T x_{i+|\tau_1|, j+|\tau_2|}, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0; \\ \nabla x_{i+|\tau_1|, j} \nabla^T x_{i, j+|\tau_2|}, \tau_1 \leq 0, \tau_2 > 0; \\ \nabla x_{i+|\tau_1|, j+|\tau_2|} \nabla^T x_{ij}, \tau_1 \leq 0, \tau_2 \leq 0; \\ \nabla x_{i, j+|\tau_2|} \nabla^T x_{i+|\tau_1|, j}, \tau_1 > 0, \tau_2 \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

невырожденной при $\tau = 0$.

Исследования [1] показали, что если выполняются условия плавности изменения дисперсии шума и независимости его свойств от значений градиентов яркости эталона, то неоднородный шум с известной средней дисперсией μ_2 и средней корреляционной функцией $\rho(\tau_1, \tau_2)$ можно заменить однородным эквивалентом и вычислять ковариационную матрицу C ошибок (1) по формуле

$$C = \frac{\mu_2}{n} A_0^{-1} \left(\sum_{\tau_1=-(T_1-1)}^{T_1-1} \sum_{\tau_2=-(T_2-1)}^{T_2-1} \left(1 - \frac{\tau_1}{T_1}\right) \left(1 - \frac{\tau_2}{T_2}\right) \rho(\tau_1, \tau_2) A_\tau \right) A_0^{-1}. \quad (3)$$

Если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, где λ_1 и λ_2 — сдвиги по i и j , λ_3 — поворот, λ_4 — изменение масштаба, то блок матрицы (2), ответственный за совмещение по λ_1 и λ_2 , имеет вид

$$\Phi_\tau = -\psi \frac{\partial^2 \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_k \partial \tau_l}, \quad k, l = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь ψ и $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ — выборочная дисперсия и корреляционная функция эталона.

Если матрица (2) мало отличается от своего математического ожидания, полученного усреднением по ансамблю статистически подобных эталонов, можно считать [1], что все элементы (2) функционально связаны с (4). Такое положение существенно упрощает анализ матрицы (3), по его выполнение не всегда очевидно и требует специальной проверки.

Основные закономерности, обнаруженные в [1], связаны с соотношениями между радиусами корреляции эталона и шума и внешними размерами изображений: 1) увеличение интегральных радиусов корреляции шума до значений дифференциальных радиусов корреляции эталона приводит к быстрому росту дисперсий ошибок совмещения, затем рост замедляется и переходит в спад, который продолжается до нуля; 2) дисперсии ошибок совмещения по λ_1 и λ_2 (ошибок местоположения), отнесенные к размерам изображения, имеют порядок дисперсий по углу и масштабу; 3) коэффициенты взаимной корреляции всех ошибок, кроме ошибок местоположения, при увеличении размеров изображения уменьшаются.

Целью данной работы является экспериментальная проверка положений [1] и их обобщение на случай яркостей с априори неизвестными градиентами. В качестве изображений и шума использованы числовые поля с заданными свойствами [2, 3]. Их генерация, совмещение и обработка выполнены на ЭВМ ЕС-1033.

Ковариации дискретных оценок градиентов яркости. Если градиенты ∇x_{ij} неизвестны, то в (1) — (2) можно использовать их дискретные оценки, полученные с применением интерполяционных формул. Вид формул и способы оценивания производных могут существенно влиять на результаты экспериментов и корректность их интерпретации.

При билинейной интерполяции яркость в точке, лежащей между узлами решетки и отстоящей от ij на $\Delta i, \Delta j \in (0, 1)$, определяется [4]

$$x_{ij}(\pm\Delta i, \pm\Delta j) = (1 - \Delta i)x_{ij}(1 - \Delta j) + (1 - \Delta i)x_{i, j \pm 1}\Delta j + \Delta i x_{i \pm 1, j}(1 - \Delta j) + \Delta i x_{i \pm 1, j \pm 1}\Delta j,$$

где знакам при $\pm\Delta i, \pm\Delta j$ соответствуют знаки в индексах $i \pm 1, j \pm 1$. Если $\Delta i = \lambda_1, \Delta j = \lambda_2$, то при симметричном определении производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{ij}(0, 0)}{\partial \lambda_1} &= \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{x_{ij}(\Delta i, 0) - x_{ij}(-\Delta i, 0)}{2\Delta i} = \frac{1}{2}(x_{i+1, j} - x_{i-1, j}); \\ \frac{\partial x_{ij}(0, 0)}{\partial \lambda_2} &= \lim_{\Delta j \rightarrow 0} \frac{x_{ij}(0, \Delta j) - x_{ij}(0, -\Delta j)}{2\Delta j} = \frac{1}{2}(x_{i, j+1} - x_{i, j-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

а при несимметричном —

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{ij}(0, 0)}{\partial \lambda_1} &= \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{x_{ij}(\Delta i, 0) - x_{ij}(0, 0)}{\Delta i} = x_{i+1, j} - x_{ij}; \\ \frac{\partial x_{ij}(0, 0)}{\partial \lambda_2} &= \lim_{\Delta j \rightarrow 0} \frac{x_{ij}(0, \Delta j) - x_{ij}(0, 0)}{\Delta j} = x_{i, j+1} - x_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим \hat{a}_{kl} оценки элементов a_{kl} матрицы $A_\tau = \varphi(a_{kl}; k, l = \overline{1, 4})$ в приближении (5), \hat{b}_{kl} — оценки тех же элементов в приближении (6). Тогда для блока ковариации производных по λ_1, λ_2 будем иметь

$$\begin{cases} \hat{a}_{11} = 1/4[2\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1 + 2, \tau_2) - \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2)]; \\ \hat{a}_{22} = 1/4[2\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2 + 2) - \varphi(\tau_1, \tau_2 - 2)]; \\ \hat{a}_{12} = 1/4[\varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 + 1) + \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2 - 1) - \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2 + 1) - \\ - \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1)]; \\ \hat{a}_{21} = \hat{a}_{12}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \widehat{b}_{11} = 2\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2) - \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2); \\ \widehat{b}_{22} = 2\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2 + 1) - \varphi(\tau_1, \tau_2 - 1); \\ \widehat{b}_{12} = \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 + 1) + \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2 + 1) - \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2); \\ \widehat{b}_{21} = \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2 - 1) + \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, \tau_2 - 1) - \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2). \end{cases} \quad (8)$$

При билинейной интерполяции и симметричном определении производных по углу λ_3 и масштабу λ_4 применение тех же предположений [1], что и при выводе формул для элементов a_{kl} , после несложных, но громоздких выкладок приводит к оценкам

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{13}^{(24)} &= -\widehat{a}_{31}^{(42)} = (+) \widehat{a}_{11}^{(22)} \frac{\tau_2}{2} + \widehat{a}_{12} \frac{\tau_1}{2}; \\ \widehat{a}_{14}^{(23)} &= -\widehat{a}_{41}^{(32)} = \widehat{a}_{11}^{(22)} \frac{\tau_1}{2} (\pm) \widehat{a}_{12} \frac{\tau_2}{2}; \\ \widehat{a}_{33}^{(44)} &= \widehat{a}_{11}^{(22)} \left[\frac{(T_2 - |\tau_2|)^2 - 1}{12} - \frac{\tau_2^2}{4} \right] + \widehat{a}_{22}^{(11)} \left[\frac{(T_1 - |\tau_1|)^2 - 1}{12} - \frac{\tau_1^2}{4} \right] (\pm) \widehat{a}_{12} \frac{\tau_1 \tau_2}{2}; \\ \widehat{a}_{34}^{(43)} &= (\widehat{a}_{11} - \widehat{a}_{22}) \frac{\tau_1 \tau_2}{4} + \widehat{a}_{12} \left[\frac{(T_1 - |\tau_1|)^2 - (T_2 - |\tau_2|)^2}{12} + \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{4} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученные выражения (9) при замене \widehat{a}_{kl} на a_{kl} полностью совпадают с соответствующими выражениями из [1]. Блок (7) матрицы $\widehat{A}_\tau = \psi(\widehat{a}_{kl}; k, l = 1, 4)$, как и соответствующий блок (4) матрицы A_τ , симметричен. Оба блока становятся диагональными при одних и тех же условиях. При несимметричном определении производных такого совпадения не наблюдается. Более того, из сравнительного анализа (7) и (8) можно получить вывод, что использование несимметричных разностей (6) существенно искажает представление о корреляционной структуре градиентов яркости изображения. Пусть, например, функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ факторизуется: $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi_1(\tau_1)\varphi_2(\tau_2)$. В этом случае при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ элемент a_{12} матрицы A_τ равен нулю и, следовательно, в совпадающих точках изображения производные яркости по λ_1 и λ_2 не коррелируют. Коэффициент корреляции симметричных оценок (5) также равен нулю, а несимметричных (6) — $\widehat{b}_{12} / \sqrt{\widehat{b}_{11}\widehat{b}_{22}} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \varphi_1(1))(1 - \varphi_2(1))}$. Отсюда видно, что при достаточно большом шаге дискретизации коэффициент корреляции несимметричных оценок (6) может существенно отличаться от нуля и создавать ложное впечатление о сильной корреляции рассматриваемых производных.

На рис. 1—3 приведены сечения нормированных зависимостей

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\tau_1, \tau_2) &= \widehat{a}_{ij}(\tau_1, \tau_2) [\widehat{a}_{ii}(0, 0) \widehat{a}_{jj}(0, 0)]^{-1/2}, \\ \beta_{ij}(\tau_1, \tau_2) &= \widehat{b}_{ij}(\tau_1, \tau_2) [\widehat{b}_{ii}(0, 0) \widehat{b}_{jj}(0, 0)]^{-1/2} \quad \text{при } \tau_2 = 0. \end{aligned}$$

Сплошные линии построены с использованием формул (7) — (9), кружочками обозначены результаты вычисления статистических оценок соответствующих зависимостей по реализациям полей (изображений) с заданными корреляционными свойствами, отрезками вертикальных прямых показаны размеры 95%-ных доверительных интервалов.

Хорошее совпадение теоретических кривых с экспериментом подтверждает допустимость упрощающих предположений, принятых при выводе (9) и соответствующих формул в [1].

Для проверки выводов о влиянии вида дискретных оценок производных в экспериментах вычислялись не только элементы, приведенные на

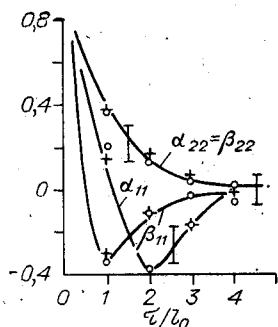


Рис. 1.

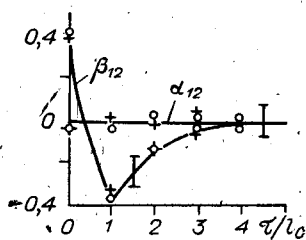


Рис. 2.

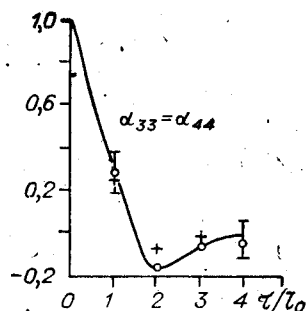


Рис. 3.

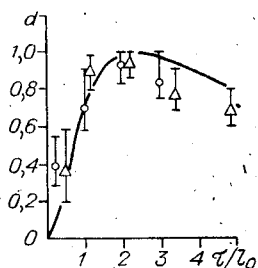


Рис. 4.

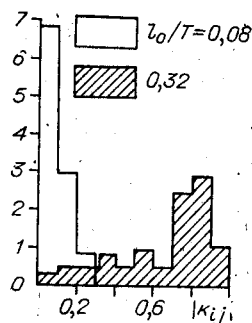


Рис. 5.

рис. 1—3, но и все остальные элементы корреляционных матриц (α_{ij}) и (β_{ij}). В симметричном случае они в полном согласии с (9) оказались близкими нулю, а в несимметричном достигали, подобно элементу β_{12} на рис. 2, весьма больших значений.

Результаты исследования корреляции производных в случае ступенчатой интерполяции, когда промежуточной точке присваивается яркость ближайшего узла, практически полностью совпадают с соответствующими результатами для билинейного случая и отмечены на рис. 1—3 крестиками.

Ковариация ошибок совмещения изображений. На рис. 4 сплошной линией изображена нормированная зависимость дисперсии ошибок совмещения изображений, рассчитанная по формулам (3), (7), (9) для случая $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi_1(\tau_1)\varphi_2(\tau_2)$, $\rho(\tau_1, \tau_2) = \rho_1(\tau_1)\rho_2(\tau_2)$, $\varphi_i(\tau) = \left(1 + \frac{|\tau|}{l_0}\right)e^{-|\tau|/l_0}$, $\rho_i(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_0}$, $T_1 = T_2 = T \gg \tau_0, l_0, 1$ и соответствующая функции $d(z)$ в выражениях

$$c_{33} = c_{44} = (6/T^2)c_{11};$$

$$c_{11} = c_{22} = \frac{\mu_2 l_0^4}{\psi T^2} d(z); \quad (10)$$

$$d(z) = 4z^2[1 + 2z/(1+z)^4], \quad z = \tau_0/l_0.$$

При экспериментальной проверке использовались результаты статистической обработки ошибок совмещения изображений размером 16×16 ста независимым опытом. Дисперсии различных ошибок (угловых, масштабных и местоположения) нормировались в соответствии с (10), а затем усреднялись при каждом фиксированном τ_0/l_0 . Отрезки вертикальных прямых на рис. 4 показывают разброс нормированных дисперсий, а кружочки — их средние значения. Треугольниками обозначены результаты, рассчитанные на основе данных [5] для изображений 20×20 .

Эксперименты хорошо согласуются с теоретическим выводом [1] об экстремальном поведении дисперсии ошибок при сближении радиусов корреляции изображения и шума.

На рис. 5 приведены гистограммы коэффициентов корреляции $k_{ij} = c_{ij}(c_{ii}c_{jj})^{-1/2}$. Они подтверждают, что с увеличением размеров изображения корреляция ошибок уменьшается.

ВЫВОДЫ

Экспериментальные исследования ошибок совмещения изображений в условиях окрашенного шума позволяют принять гипотезу [1] об адекватности их корреляционного описания, представленного формулами (3), (9).

При исследовании корреляционных функций производных яркости изображения по одному из параметров λ , можно использовать как симметричные, так и несимметричные разности типа (5), (6). Качественный ход зависимостей при этом одинаков (сравните α_{11} и β_{11} на рис. 1), но нужно иметь в виду, что симметричные разности будут обладать меньшими дисперсиями и большими радиусами корреляции, чем несимметричные. Это следует из (7), (8) и рис. 1 и объясняется тем, что при симметричном оценивании производных сравниваются яркости в точках, отстоящих друг от друга на расстояниях, вдвое больших, чем при несимметричном. Это приводит к потере информации о высокочастотных составляющих пространственного спектра яркостей.

При анализе взаимных корреляций производных по разным параметрам целесообразно использовать только симметричные разности, так как в противном случае можно получить даже качественно неверные выводы (сравните α_{12} и β_{12} на рис. 2).

Если внешние размеры изображения значительно больше радиусов корреляции яркостей, можно считать, что все элементы матрицы (2) функционально связаны с (4) формулами (9). Это следует из сравнения (9) с экспериментальными данными и, в частности, иллюстрируется рис. 3.

С увеличением размеров изображения матрица (2) за исключением блока (4) стремится к диагональному виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буймов А. Г., Антипин В. В. Ошибки МНК-совмещения изображений в условиях неоднородного окрашенного шума.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. «Теория адаптивных систем и ее применения». М.—Л.: Научн. совет по компл. проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1983, с. 196.
2. Буймов А. Г. К статистике пальмовских полей.— Автотметрия, 1981, № 6, с. 13.
3. Антипин В. В., Буймов А. Г. Быстрая имитация случайных изображений в базе Адамара.— В кн.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Методы и средства преобразования сигналов». Рига: Зинатне, 1978, т. 1, с. 105.
4. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979, с. 272.
5. Решетников М. Т. Применение моделей случайных полей при исследовании цифровых КЭС.— В кн.: Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: ТГУ, 1980, вып. 5, с. 40.

Поступила в редакцию 22 октября 1983 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕИЗВЕСТНУЮ ФУНКЦИЮ

Введение. Наиболее распространенной моделью, с помощью которой обычно описывается наблюдаемая в эксперименте функция нескольких переменных, является модель линейной регрессии, в которой среднее значение функции представляется в виде линейной комбинации значений