

**МЕТОДЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА
 АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА**

УДК 535.317.7 : 519.24

Д. М. ЛЯХОВ, А. А. ЦЕТНИКОВ

(Подольск Московской)

**ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА
 ПРИ ЭКСПРЕССНОМ АНАЛИЗЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ**

Эффективность адаптивных методов компенсации волновых aberrаций зависит в конечном счете от точности и быстродействия измерительных систем и устройств коррекции [1]. Обычно при оценке aberrаций проводят измерения фазы исследуемой волны в большом числе точек отсчета (порядка тысячи) и рассчитывают методом наименьших квадратов коэффициенты aberrаций [2]. Весь процесс обработки данных продолжается в пределах десяти и более секунд [3]. Характерное же время реальных процессов, вызывающих изменение волновых aberrаций, часто не превышает сотых и даже тысячных долей секунды [1]. С учетом инерционности устройств коррекции на собственно процесс измерений должна приходиться меньшая часть этого времени, составляющая ориентировочно десятые и даже сотые доли миллисекунды. Известны попытки повышения быстродействия измерительных систем за счет сокращения числа отсчетов до минимально необходимого для оценки заданных aberrаций низшего порядка [4]. Недостаток подобного приема состоит в том, что при наличии у исследуемого волнового фронта aberrаций высшего порядка и регулярном (с постоянным шагом) распределении точек отсчета в пределах области регистрации становится заметной систематическая погрешность оценки выделенных коэффициентов. В настоящей работе ставится задача и предлагается численный метод поиска такого оптимального расположения точек, при котором обеспечивается несмещенная оценка исследуемых aberrаций.

Постановка задачи. Пусть $\hat{W}(x)$ — функция, соответствующая истинным значениям фазы исследуемой волны в пределах области регистрации X , $\hat{W}(x_i)$ — результаты измерений этой фазы в n заранее заданных точках отсчета, для которых справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \hat{W}(x) &= W(x) + \varepsilon; \\ E\{\varepsilon\} &= 0; \\ E\{\varepsilon_i \varepsilon_j\} &= \begin{cases} \sigma^2(x_i), & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

где ε — случайная ошибка измерений; E — символ математического ожидания; $\sigma^2(x_i)$ — дисперсия ошибок измерения. Кроме того, пусть в результате предварительного анализа показано, что функция $W(x)$ может быть представлена в области X с пренебрежимо малой систематической погрешностью многочленом $\hat{y}(x)$ степени t :

$$\hat{y}(x) = \Theta^T f(x). \tag{1}$$

Здесь $f^T(x) = \|f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\|$; $f_i(x)$ — известные непрерывные в

области X функции; $\Theta^T = \|\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m\|$ — вектор-строка неизвестных коэффициентов. Допустим, что $\tilde{y}(x)$ есть некоторый многочлен степени $t_1 < t$, соответствующий заранее заданному набору aberrаций низшего порядка, подлежащих оценке. Назовем его ближайшей поверхностью сравнения, если выполняется условие

$$J = \psi \int_X E [\widehat{W}(x) - \tilde{y}(x)]^2 dx = \min, \quad (2)$$

где $\psi = \left[\int_X dx \right]^{-1}$.

В [5] показано, что выражение (2) можно разбить на два слагаемых, соответствующих случайной и систематической ошибкам:

$$J = V + C,$$

где $V = \psi \int_X E [\tilde{y}(x) - E\{\tilde{y}(x)\}]^2 dx$ — среднее по области X значение дисперсии оценки многочлена $\tilde{y}(x)$, $C = \psi \int_X [E\{\tilde{y}(x)\} - \widehat{y}(x)]^2 dx$ — среднеквадратическая систематическая погрешность аппроксимации.

Положим, что многочлен $\tilde{y}(x)$ является частью многочлена $\widehat{y}(x)$ и записывается в виде

$$\tilde{y}(x) = \mathbf{B}_{m_1}^T \mathbf{f}_1(x). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{B}_{m_1}^T = \|b_1, b_2, \dots, b_{m_1}\|$ — вектор оценок неизвестных коэффициентов; $\mathbf{f}_1^T(x) = \|f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m_1}(x)\|$; $m_1 < m$. Обычно при высокоточных измерениях $V \ll C$, так что при сделанных предположениях соотношение (2) может быть сведено к условию

$$J = \psi \int_X [\Theta^T \mathbf{f}(x) - E\{\mathbf{B}_{m_1}^T \mathbf{f}_1(x)\}]^2 dx. \quad (4)$$

Так как $E\{\mathbf{B}_{m_1}^T \mathbf{f}_1(x)\} = E\{\mathbf{B}_{m_1}^T\} \mathbf{f}_1(x)$, то после интегрирования

$$J = \Theta^T H_0 \Theta - 2\Theta^T H_1 E\{\mathbf{B}_{m_1}\} + E\{\mathbf{B}_{m_1}^T\} H_{11} E\{\mathbf{B}_{m_1}\}, \quad (5)$$

где

$$H_0 = \psi \int_X \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^T(x) dx;$$

$$H_1 = \psi \int_X \mathbf{f}(x) \mathbf{f}_1^T(x) dx;$$

$$H_{11} = \psi \int_X \mathbf{f}_1(x) \mathbf{f}_1^T(x) dx.$$

Условие (4) выполняется, если частные производные величины J по элементам вектора \mathbf{B}_{m_1} равны нулю: $-2\Theta^T H_1 + 2E\{\mathbf{B}_{m_1}^T\} H_{11} = 0$. Решая это уравнение, получим

$$E\{\mathbf{B}_{m_1}\} = H_{11}^{-1} H_1^T \Theta. \quad (6)$$

Далее будем полагать, что многочлен $\widehat{y}(x)$ ортонормирован, т. е. $\psi \int_X \mathbf{f}(x) \mathbf{f}^T(x) dx = I_m$. Тогда выражение (6) примет вид

$$E\{\mathbf{B}_{m_1}\} = \Theta_1. \quad (7)$$

Здесь I_m — единичная матрица размером $m \times m$, Θ_1 — первые m_1 коэффициентов вектора Θ . Следовательно, величина C при сделанных допущениях минимальна, если выполняется условие (7).

Когда при числе точек отсчета $n < m$ интересующие нас коэффициенты aberrаций допускают оценку, то для их расчета можно воспользоваться формулой (7)

$$\mathbf{B}_1 = T(FKF^T) - FKY, \quad (8)$$

где матрица $(FKF^T)^{-1}$ является обобщенно-обратной к матрице FKF^T ; $T = \|I_{m_1} : 0\|$; $F = \|f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\|$; $Y^T = \|\hat{W}(x_1), \hat{W}(x_2), \dots, \hat{W}(x_n)\|$; I_{m_1} — единичная матрица размером $m_1 \times m_1$; 0 — нулевая матрица размером $m_1 \times (m - m_1)$; $K = \|\delta_{ij} \sigma^{-2}(x_i) P_i\|_{i,j=1}^n$; δ_{ij} — символ Кронекера; P_i — весовые коэффициенты наблюдений. При этом дисперсионная матрица полученных коэффициентов равна [7] $D = T(FKF^T)^{-1}T$. Чтобы вектор \mathbf{B}_1 был несмещенной оценкой вектора Θ_1 , необходимо дополнить условие (7)

$$T(FKF^T) - FKF^T = T, \quad (9)$$

которое определяет оптимальное расположение n точек отсчета при $n < m$.

Из теоремы Гаусса — Маркова [8] вытекает, что оценки (8) при выполнении условия (9) являются наилучшими несмещенными линейными оценками коэффициентов Θ_1 , т. е. $E\{\mathbf{B}_{m_1}\} = \Theta_1$, что соответствует выполнению условия (7), и, следовательно, если многочлен (1) ортонормирован, то выполнение условия (9) обеспечивает минимум систематической погрешности C .

Планы экспериментов, для которых матрица F при $n < m$ удовлетворяют условию (9), называются несмещенными в метрике L_2 планами [7]. Их применение дает возможность при минимально необходимом для решения поставленной задачи числе n замеров определить точную оценку наиболее существенных aberrаций исследуемого волнового фронта. Систематическая погрешность полученных оценок при сделанных допущениях примерно так же мала, как и в случае, когда число точек отсчета $n \gg m$.

В [7] показано, что точки несмещенного плана находятся в узлах дискретной решетки, являющейся базой для построения кубатурных формул. Построение кубатурных формул с минимальным числом узлов является сложной задачей, решенной лишь для ряда частных случаев [6], и в каждом конкретном случае требует специального подхода. В настоящей работе найдено решение поставленной задачи в общем виде для произвольной области X и любых многочленов (1) и (3).

Численный метод построения несмещенных планов. Проведем анализ некоторых свойств условия (9). Для этого предварительно исследуем матрицу

$$Q = F(F^T F)^{-1} F^T. \quad (10)$$

Данная симметричная матрица является идемпотентной, так как

$$F(F^T F)^{-1} F^T F(F^T F)^{-1} F^T = F(F^T F)^{-1} F^T. \quad (11)$$

Согласно [8] для подобных матриц справедливы следующие свойства:

- 1) диагональные элементы матрицы (10) $q_{ii} \leq 1$;
- 2) если $q_{ii} = 1$, то соответствующие элементы $q_{ij} = q_{ji} = 0$, $i \neq j$.

Эти свойства нетрудно проверить, если учесть, что согласно (11) существует равенство $q_{ii} = \sum_{j=1}^m q_{ij}^2 = \sum_{j=1}^m q_{ji}^2$.

Теорема 1. План ζ^* является несмещенным, если функционал

$$\Phi(F^*) = SpTF^*(F^{*T}F^*)^{-1}F^{*T}T^T = m_1. \quad (12)$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Согласно первому свойству матрицы (10) $q_{ii} \leq 1$, поэтому $\Phi(F) \leq m_1$. Следовательно, для выполнения условия (9) надо найти максимум функционала $\Phi(F)$. В процессе поиска необходимо обращать матрицу $F^T F$. Обычно в большинстве задач ее размеры весьма существенны, поэтому

посмотрим, каким образом можно ускорить вычисление $\Phi(F)$, если в исходном плане изменять координаты только одной точки.

Для дальнейших рассуждений введем ряд новых обозначений. Так как перестановка столбцов в матрице F и соответствующих элементов в векторе Y не влияет на значения коэффициентов B_{m_1} , то матрицу F запишем в виде

$$F = \|F_j : f(x_j)\|,$$

где x_j — координаты точки, исключаемой из плана.

Матрицу $(F^T F)^{-1}$ разобьем на блоки

$$(F^T F)^{-1} = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где W_{11} — матрица размером $(n-1) \times (n-1)$; $W_{12} = W_{21}^T$ — вектор-столбец размером $(n-1)$; W_{22} — число.

Теорема 2. Если для некоторых планов ξ и $\tilde{\xi}$ матрицы $F^T F$ и $\tilde{F}^T \tilde{F}$ неособенные, то справедливо следующее равенство:

$$\Phi(\tilde{F}) = \text{Sp } TZT^T + f^T(x)[Z - I_m]T^T T[Z - I_m]^T f(\tilde{x})\tilde{H}^{-1}. \quad (14)$$

Здесь $\tilde{H} = f^T(\tilde{x})[I_m - Z]f(\tilde{x})$; $Z = F(F^T F)^{-1}F^T - (F_j W_{12} + f(x_j)W_{22}) \times \times (W_{21} F_j^T + W_{22} f^T(x_j))W_{22}^{-1}$; \tilde{x} — координаты точки, включаемой в план вместо точки x_j .

Доказательство. Разобьем матрицу $F^T F$ на блоки

$$\tilde{F}^T \tilde{F} = \begin{vmatrix} A & C \\ C^T & D \end{vmatrix},$$

где $A = F_j^T F_j$, $C = F_j^T f(x)$, $D = f^T(\tilde{x})f(\tilde{x})$. Применяя формулу Фробениуса [10], можно записать

$$(\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1} = \begin{vmatrix} A^{-1} + A^{-1}CH^{-1}C^T A^{-1} & -A^{-1}CH^{-1} \\ -H^{-1}C^T A^{-1} & H^{-1} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

где

$$H = D - C^T A^{-1} C. \quad (16)$$

С учетом (15) матрица $\tilde{F}(\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1}\tilde{F}^T = F_j A^{-1} F_j^T + f(\tilde{x})H^{-1}f^T(\tilde{x}) - F_j A^{-1} C H^{-1} f^T(\tilde{x}) + F_j A^{-1} C H^{-1} C^T A^{-1} F_j^T - f(\tilde{x})H^{-1}C^T A^{-1} F_j^T$. После ряда элементарных преобразований эта формула приводится к виду

$$\tilde{F}(\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1}\tilde{F}^T = F_j A^{-1} F_j^T + [F_j A^{-1} F_j^T - I_m] f(\tilde{x}) f^T(\tilde{x}) [F_j A^{-1} F_j^T - I_m]^T H^{-1}. \quad (17)$$

Если $C = F_j^T f(x_j)$, а $D = f^T(x_j)f(x_j)$, то из (13) и (15) получим

$$A^{-1} = W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{21}. \quad (18)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Z &= F_j A^{-1} F_j^T = F(F^T F)^{-1} F^T - f(x_j)W_{21} F_j^T - F_j^T W_{12} f^T(x_j) - \\ &- f(x_j)W_{22} f^T(x_j) - F_j W_{12} W_{22}^{-1} W_{21} F_j^T = F(F^T F)^{-1} F^T - \\ &- (F_j W_{12} + f(x_j)W_{22})(W_{21} F_j^T + W_{22} f^T(x_j))W_{22}^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Объединяя (16), (17) и (19), нетрудно убедиться в справедливости (14).

Опираясь на полученные результаты, можно построить следующую итерационную процедуру:

1. Взять в качестве исходного некоторый произвольный план ξ , с числом точек, определяемым согласно формуле [7]

$$n_{\min} = (t' + d)! / t'! d!,$$

где $t' = (t + t_1)/2$, $[\cdot]$ — целая часть, d — размерность области X .

2. Из имеющегося плана исключить первую точку и рассчитать по формулам (18) и (19) матрицы A^{-1} и Z .

3. Используя формулу (14), найти новую точку x , включение которой в план приводит к максимальному увеличению функционала $\Phi(F)$.

4. Подставить в формулу (15) полученные значения x и A^{-1} и для нового плана $\xi_{\tau+1}$ вычислить матрицу $(F^T F)^{-1}$.

5. Осуществить подобные операции последовательно для всех оставшихся точек. Если равенство (12) не удовлетворяется, всю процедуру повторить, начиная с первой точки. Вычисления продолжаются до тех пор, пока для некоторых планов ξ_{τ} и $\xi_{\tau+n}$ не выполнится условие

$$[\Phi(F)_{\tau+n} - \Phi(F)_{\tau}] / \Phi(F)_{\tau+n} < \alpha,$$

где α — некоторое малое наперед заданное число. Сходимость последовательности $\Phi_0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq \dots \leq \Phi_j \leq m_1$ следует из существования верхней границы, однако если она сходится к числу $m_2 < m_1$, то количество точек в исходном плане необходимо увеличить на единицу и все операции повторить сначала. В предложенной процедуре новые матрицы $(F^T F)^{-1}$ и $(F^T F)^{-1} F^T$ рассчитываются с использованием их значений, полученных на предыдущем шаге. Это позволяет обойтись без обращения матриц большого размера и сократить число операций, нужных для вычисления функционала $\Phi(F)$ в процессе поиска оптимального расположения точек плана. Кроме того, если точки отсчета распределены в соответствии с найденным несмещенным планом, то оценки коэффициентов aberrаций можно определить из выражения

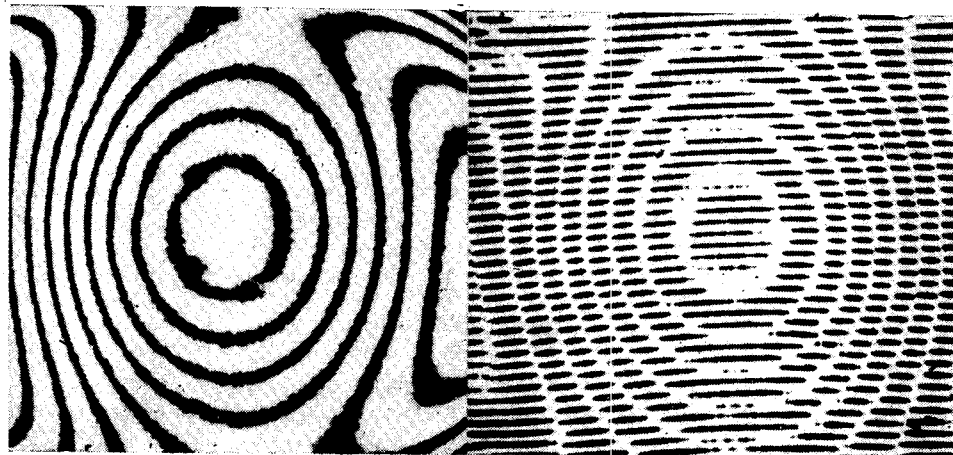
$$B_{m_1} = TF(F^T F)^{-1} Y = LY, \quad (20)$$

которое является следствием (8) и теоремы 1.

Результаты эксперимента. При оценке степени аппроксимирующего полинома (1) принималось во внимание то, что основная доля aberrаций высокого порядка для большинства оптических систем обусловлена несовершенством отражающих (преломляющих) поверхностей оптических элементов. Статистический анализ качества поверхностей, получаемых традиционными методами оптической технологии, показал, что увеличение степени полинома (1) выше шестой не приводит к значимому уменьшению погрешности аппроксимации. Для указанного полинома была поставлена задача оценки составляющих до второго порядка включительно, определяющих, с одной стороны, характеристики ближайшей сферы сравнения, с другой — наиболее значимые погрешности волновых фронтов, которые в первую очередь корректируются методами адаптивной оптики. Расчет плана был проведен для области X-квадрат с мини-

Т а б л и ц а 4

№ п/п	x_1	x_2	l_{1j}	l_{2j}	l_{3j}	l_{4j}	l_{5j}	l_{6j}
1	-0,165	0,907	0,0566	-0,0162	0,0891	-0,0254	-0,0576	0,0932
2	0,724	0,911	0,0386	0,0479	0,0608	0,0761	0,0242	0,0642
3	-0,131	-0,103	0,1411	-0,0323	-0,0255	0,0061	-0,1480	-0,1530
4	0,968	0,543	0,0293	0,0494	0,0275	0,0463	0,0598	-0,0038
5	0,733	-0,051	0,1047	0,1325	-0,0093	-0,0120	0,0711	-0,1166
6	0,932	-0,666	0,0353	0,0571	-0,0408	-0,0658	0,0639	0,0132
7	0,666	-0,989	0,0217	0,0250	-0,0372	-0,0429	0,0081	0,0469
8	-0,310	-0,890	0,0603	-0,0327	-0,0935	0,0499	-0,0481	0,0932
9	-0,725	-0,466	0,0911	-0,1137	-0,0728	0,0919	0,0581	-0,0358
10	-0,924	-0,890	0,0192	-0,0309	-0,0297	0,0475	0,0337	0,0297
11	0,318	-0,642	0,1070	0,0591	-0,1185	-0,0652	-0,0841	0,0281
12	-0,969	0,122	0,0346	-0,0585	0,0070	-0,0121	0,0707	-0,0372
13	-0,565	0,441	0,1036	-0,1019	0,0793	-0,0780	-0,0050	-0,0481
14	-0,855	0,853	0,0358	-0,0527	0,0529	-0,0780	0,0474	0,0473
15	0,320	0,529	0,1210	0,0678	0,1108	0,0617	-0,0943	-0,0214



мальным в указанных условиях числом точек $n = 15$. Координаты точек плана и элементы матрицы L из выражения (20) сведены в табл. 1.

Измерения фазы исследуемой волны проводились по одной из интерферограмм (см. рисунок) зеркала с квадратной апертурой размером 150×150 мм², полученной в схеме интерферометра типа Тваймана — Грина (частота полос $\sim 1'/\text{мм}$). Методом муаровой интерферометрии [9] оценивались значения волновых aberrаций в 121 точке отсчета, распределенных по квадратной сетке с шагом 15 мм, и в 15 точках несмещенного плана, приведенного в табл. 1. Дробная часть фазы определялась как отношение величины необходимого для совмещения с выбранной точкой отсчета муаровой полосы перемещения образцовой интерферограммы (сетки) относительно исследуемой к шагу образцовой интерферограммы (сетки) в окрестности точки отсчета.

Традиционным методом наименьших квадратов по результатам измерений в 121 точке оценивались коэффициенты V_m полинома (1) 6-го порядка. Значения первых шести коэффициентов полинома приведены в первой строке табл. 2, во второй строке — соответствующие значения коэффициентов, рассчитанные по результатам измерений в 15 точках согласно выражению (20). Для сравнения в третьей строке таблицы даны значения коэффициентов, полученные традиционным методом по 16 отсчетам, осуществленным в узлах квадратной сетки, а также значения радиуса кривизны R , коэффициента корреляции r и остаточного среднеквадратического отклонения σ . Расчет доверительного интервала для каждого из выделенных коэффициентов был проведен с учетом значений диагональных элементов дисперсионной матрицы D и среднеквадратической погрешности измерений. Минимальное его значение составило 0,035 интерференционной полосы при доверительной вероятности 0,95. Нетрудно заметить, что разница значений коэффициентов во второй и первой строках табл. 2 не превосходит указанного значения доверительного интервала. В то же время результаты расчетов, приведенные в третьей строке, существенно (в 2 ÷ 3 раза) отличаются от точных значений. Таким образом, полученные результаты подтверждают возможность точной оценки выделенных коэффициентов aberrаций.

Таблица 2

t	$R \cdot 10^{-6}$, мм	r	σ	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
6	1,132	0,999	0,07	0,084	0,219	0,187	-0,156	0,683	1,664
2	1,124	0,87	1,12	0,074	0,240	0,170	-0,16	0,700	1,66
2	3,640	0,70	1,29	-0,129	0,305	-0,262	-0,164	0,183	0,545

Доказательство теоремы 1. Покажем, что если матрица $F^T F$ неособенная, то обобщенно-обратная матрица

$$(F K F^T)^- = F (F^T F)^{-1} K^{-1} (F^T F)^{-1} F^T. \quad (\text{П1})$$

Последнее равенство нетрудно проверить. Известно, что для произвольной $n \times m$ матрицы G обобщенно-обратной будет матрица G^- , удовлетворяющая условию

$$G G^- G = G. \quad (\text{П2})$$

Подставляя в (П2) выражение для G^- согласно (П1), получим

$$F K F^T F (F^T F)^{-1} K^{-1} (F^T F)^{-1} F^T F K F^T = F K F^T.$$

Данное равенство очевидно, следовательно, выражение (П1) справедливо. Согласно (П1)

$$\begin{aligned} (F K F^T)^- F K &= F (F^T F)^{-1}; \\ (F K F^T)^- F K F^T &= F (F^T F)^{-1} F^T, \end{aligned}$$

так что (8) и (9) можно преобразовать к виду

$$B_{m_1} = T F (F^T F)^{-1} Y, \quad T F (F^T F)^{-1} F^T = T. \quad (\text{П3})$$

Теперь, учитывая второе свойство матрицы (10), нетрудно убедиться, что если $\Phi(F^*) = m_1$, то

$$F^* (F^{*T} F^*)^{-1} F^{*T} = \begin{Bmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & F_2^* (F_2^{*T} F_2^*)^{-1} F_2^{*T} \end{Bmatrix}, \quad (\text{П4})$$

где $F_2^{*T} = \|f_{m_1+1}(x_i^*), \dots, f_m(x_i^*)\|_{i=1}^n$.

В случае справедливости (П4) очевидным является выполнение (П3), а потому и условия несмещенности (9).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазерные измерительные системы.— М.: Радио и связь, 1981, с. 26—72.
2. Ган М. А. и др. Обработка интерферограмм на ЭВМ и определение функции рассеяния точки и оптической передаточной функции при контроле и доводке оптических систем.— ОМП, 1977, № 9.
3. Balasubramanian N., De Bell G. W. A new approach to high precision phase interferometry.— Proc. of SPIE, 1980, v. 230: Minicomputers and Microprocessors in Optical Systems, p. 180.
4. Field R., Tarabocchia M., Holly S., White T. Optical modal deformation sensor for heterodyne interferometry.— Proc. of SPIE, 1979, v. 179: Adaptive Optical Components II, p. 32.
5. Зедгинидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем.— М.: Наука, 1976.
6. Мысловских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы.— М.: Наука, 1981.
7. Седунов Е. В. Несмещенное планирование и анализ регрессионных экспериментов в конечномерном пространстве функций.— В кн.: Математические методы планирования эксперимента. Новосибирск: Наука, 1981, с. 102—141.
8. Rao С. Р. Линейные статистические методы и их применение.— М.: Наука, 1968.
9. Yokozeki S., Mihara S. Moire interferometry.— Appl. Opt., 1979, v. 18, N 8.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Физматгиз, 1966.

Поступила в редакцию 22 октября 1982 г.;
окончательный вариант — 5 июля 1983 г.