

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюхов Б. М., Липейкене И. К., Шепель В. Т. Контроль технического состояния газотурбинного двигателя.— В кн.: Статистические проблемы управления. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1980, вып. 44, с. 25.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974, вып. 1.

Поступило в редакцию 17 августа 1983 г.

УДК 621.396.962 : 519.217

Ю. Н. ГОРБУНОВ
(Челябинск)

МНОГОЭТАПНАЯ ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ СИГНАЛА МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ОТСЧЕТОВ

Введение. В ряде задач радиолокации и измерительной техники процесс измерения параметров повторяющегося сигнала (задержки, фазы, амплитуды) организуется по серии (пачке) n импульсов. В том случае когда искомый параметр в процессе измерения флуктуирует незначительно, ошибки цифрового измерения можно уменьшить за счет стохастического (по Монте-Карло) усреднения «грубых» отсчетов. Рандомизация измерений достигается «подмешиванием» случайной добавки, изменением по случайному закону порогов квантования и т. п. (в статье используется первый способ). Идейной основой данного метода, как и метода Монте-Карло, является закон больших чисел, согласно которому увеличение числа отсчетов n повышает точность измерения (для независимых испытаний в $n^{1/2}$ раз).

На основе уже доказанной в работе * возможности применения обратной связи в процедуре измерения в настоящей статье весь объем n испытаний разбивается на l этапов и дается ответ на вопрос, какой точности измерения параметров повторяющегося сигнала можно достичь за счет организации многоэтапности измерений.

Постановка задачи. Измерение (оценивание) методом Монте-Карло параметра τ повторяющегося сигнала проводится путем его сравнения с некоторой эталонной шкалой, имеющей шаг (дискретность) размером τ_0 . Если моменты времени τ , задающие положение измеряемых интервалов, от испытания к испытанию независимы и равномерно распределены в пределах интервала τ_0 , то «грубые» отсчеты будут отличаться на величину $\mu_i \tau_0$, где $\mu_i = 1$ с вероятностью $p = R\{\tau/\tau_0\}$ и $\mu_i = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$ ($R\{\tau/\tau_0\}$ — функция дробной доли отношения τ/τ_0). Статистика

совпадений $m = \sum_{i=1}^n \mu_i$ в n испытаниях распределена по биномиальному закону.

Вероятность p можно оценить по частоте совпадений $p^* = m/n$, поэтому параметр τ имеет оценку $\tau^* = \tau_0(E\{\tau/\tau_0\} + p^*) = \tau_0(E\{\tau/\tau_0\} + m/n)$, где $E\{\tau/\tau_0\}$ — функция целой части τ/τ_0 («грубый» отсчет). Среднеквадратическая ошибка σ_τ оценки τ^* равна

$$\sigma_\tau = \sqrt{M\{(\tau^* - \tau)^2\}} = \tau_0 \sqrt{M\{(p^* - p)^2\}} = \tau_0 \sqrt{D_0} = \tau_0 \sigma.$$

Здесь $\sigma = \sqrt{D_0} = \sqrt{M\{(p^* - p)^2\}} = \sqrt{pq/n}$ — среднеквадратическая ошибка измерения вероятности p по частоте m/n , $M\{\cdot\}$ — операция математического ожидания. Таким образом, погрешность σ_τ измерения τ (при фиксированном шаге дискретизации τ_0) без разбиения на этапы полностью определяется погрешностью σ , которая в зависимости от n уменьшается сравнительно медленно и имеет порядок $n^{-1/2}$.

Многоэтапная процедура. Резервы повышения точности целесообразно искать в разбиении всего объема n испытаний на l этапов и организации рекуррентной зависимости испытаний с использованием эталонных добавок. Алгоритм формирования оценок p_i^* , $i = 1, 2, \dots, l$, вероятности p на i -м этапе включает в себя следующие операции. После 1-го этапа формируется оценка $p_1^* = m_1/n_1$ вероятности p . По этой оценке вырабатывается корректирующая добавка $\delta_1 = 1 - p_1^*$, сводящая измерения

* Гайсов В. Г., Горбунов Ю. Н. Двухэтапная процедура измерения временных интервалов методом статистических испытаний с обратной связью.— Автометрия, 1982, № 2.

на втором этапе к точкам минимальной дисперсии*. На втором этапе измеряется параметр $\theta_2 = p + \delta_1$ и формируется оценка исходной вероятности по формуле $p_2^* = \theta_2^* - \delta_1$, где $\theta_2^* = m_2/n_2$ — оценка θ_2 . Далее по результатам оценивания на 2-м этапе вырабатывается корректирующая добавка $\delta_2 = 1 - p_2^*$ для измерения параметра $\theta_3 = p + \delta_2$ на 3-м этапе и т. д.

В общем виде оценку p_l^* вероятности $p_l = p$ на l -м этапе можно представить в виде

$$p_l^* = \theta_l^* - \delta_{l-1}, \quad (1)$$

где $\theta_l^* = m_l/n_l$ — результат измерения параметра $\theta_l = p_l + \delta_{l-1}$ на l -м этапе, m_l — число совпадений на l -м этапе, n_l — число испытаний на l -м этапе; $\delta_{l-1} = 1 - p_{l-1}^*$ — корректирующая эталонная добавка на l -м этапе, определяемая через оценку p_{l-1}^* на $(l-1)$ -м этапе $p_{l-1}^* = \theta_{l-1}^* - \delta_{l-2}$ и т. д.

По результатам измерений после l этапов можно сформировать результирующую оценку:

$$p_\Sigma^* = \sum_{i=1}^l \eta_i p_i^*.$$

Здесь η_i — неизвестные весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{i=1}^l \eta_i = 1$.

Дисперсия оценки p_l^* . Из формулы (1) следует, что дисперсия $D\{p_l^*\}$ оценки зависит от дисперсии оценки параметра $\theta_l^* = m_l/n_l$ и дисперсии эталонной добавки δ_{l-1} :

$$D\{p_l^*\} = D\{\theta_l^*\} + D\{\delta_{l-1}\}.$$

Для определения $D\{\theta_l^*\}$ обратимся к рисунку, на котором для фиксированного значения p_l показаны области изменения параметров θ_i , их оценок θ_i^* , а также реализации отдельных случайных траекторий их изменения. Предположим, что случайная траектория на l -м этапе попала в точку A (см. рисунок), тогда оценку $\theta_l^* = m_l/n_l$ можно представить в виде

$$\theta_l^* = m_l/n_l = (E\{\theta_l\}n_l + m_l')/n_l,$$

где m_l' — статистика, образованная дробной долей параметра θ_i , т. е. вероятностью $p_l = R\{\theta_i\}$.

С учетом принятых обозначений запишем соотношения для 1-го и 2-го начальных моментов статистики θ_l^* :

$$M\{\theta_l^*\} = E\{\theta_l\} + p_l = E\{\theta_l\} + R\{\theta_l\} = \theta_l,$$

$$M\{(\theta_l^*)^2\} = (E\{\theta_l\} + p_l)^2 + (p_l q_l)/n_l = (E\{\theta_l\} + R\{\theta_l\})^2 + (p_l q_l)/n_l = \theta_l^2 + (p_l q_l)/n_l.$$

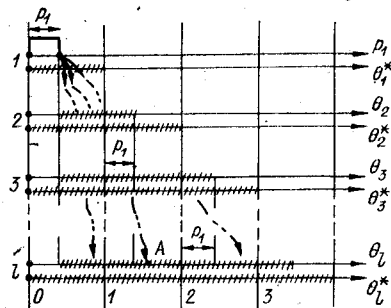
Тогда

$$D\{\theta_l^*\} = M\{(\theta_l^*)^2\} - M^2\{\theta_l^*\} = (p_l q_l)/n_l; \quad (2)$$

$$D\{p_l^*\} = (p_l q_l)/n_l + D\{\delta_{l-1}\}.$$

Первое слагаемое в сумме (2) характеризует собственную дисперсию измерений на l -м этапе, второе слагаемое — дисперсию траекторий формирования эталонных добавок, обусловленную предшествующими этапами.

Асимптотика Муавра — Лапласа. Применение известной асимптотики Муавра — Лапласа к исследуемой многоэтапной схеме независимых испытаний Бернулли включает в себя аппроксимацию биномиальных распределений оценок θ_i^* и параметров θ_i нормальными распределениями. При этом предполагается, что объемы испытаний n_i являются достаточными для проведения такой аппроксимации. Применение асимптотики Муавра — Лапласа позволяет конкретизировать распределение параметров θ_i и через функциональное преобразование $p_i = R\{\theta_i\}$ определить качество оценки p_i^* .



* Гайсов В. Г., Горбунов Ю. Н. Двухэтапная процедура измерения временных интервалов методом статистических испытаний с обратной связью. — Автометрия, 1982, № 2.

Исходя из принципа формирования эталонных добавок, заключающегося в сведении измерений в точку $\theta_i = 1$ с использованием несмещенных оценок $\theta_i^* = m_i/n_i$, можно показать, что все математические ожидания $M\{\theta_i\}$ параметров θ_i за исключением $\theta_1 = p_1$ равны 1. Поэтому, аппроксимируя распределение $W\{\theta_i\}$ нормальным распределением со средним значением $a = 1$ и дисперсией $D_{l-1} = \sigma_{l-1}^2$, а также учитывая свойства функции дробной доли $R\{\cdot\}$, можно определить значения 1-го и 2-го моментов вероятности p_l . В результате вычислений, выполненных в предположении высокой точности измерений ($\sigma_{l-1} \ll 1$), получим

$$M\{p_l\} = \int_{-\infty}^{\infty} R\{\theta_i\} W(\theta_i) d\theta_i \cong \int_0^1 \theta_i W(\theta_i) d\theta_i + \int_1^{\infty} (\theta_i - 1) W(\theta_i) d\theta_i = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M\{p_l^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2\{\theta_i\} W(\theta_i) d\theta_i \cong \int_0^1 \theta_i^2 W(\theta_i) d\theta_i + \int_1^{\infty} (\theta_i - 1) W(\theta_i) d\theta_i = \\ &= \sigma_{l-1}^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{l-1} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (3) и (4), составляющую $\sigma_l^2 = (p_l q_l)/n_l$ в формуле (2) можно представить в виде

$$\sigma_l^2 = (p_l - p_l^2)/n_l = \sigma_{l-1} (\sqrt{2/\pi} - \sigma_{l-1})/n_l \cong \sigma_{l-1} \sqrt{2/\pi}/n_l. \quad (5)$$

Связь с двухэтапной процедурой измерений. Предположим далее, что объемы испытаний n_i в многоэтапной процедуре измерения являются достаточно большими, а составляющие дисперсий траекторий формирования эталонных добавок на предыдущих этапах существенно меньше поэтапных дисперсий, обусловленных ограниченностью объема каждого этапа. Тогда использование рекуррентной зависимости (5) позволяет получить приближенную формулу для σ_l^2 , в явном виде зависящую от объемов этапов n_i и дисперсии $\sigma_1^2 = p_1 q_1/n_1$ измерения вероятности p_1 на 1-м этапе:

$$\sigma_l^2 = \frac{\sigma_1^{1/2^{l-2}} 2^{(2^{l-1}-1)/2^{l-1}} \pi^{-(2^{l-1}-1)/2^{l-1}}}{\prod_{i=0}^{l-2} n_{l-i}^{1/2^i}}. \quad (6)$$

Подставляя в формулу (6) $l = 2$ и принимая во внимание, что второе слагаемое в формуле (3) $D\{\delta_1\} = (p_1 q_1)/n_1$, выражение для дисперсии измерений в двухэтапной процедуре запишем следующим образом:

$$D\{p_2^*\} = \sqrt{2/\pi} \left(\sqrt{(p_1 q_1)/n_2} \sqrt{n_1} \right) + (p_1 q_1)/n_1. \quad (7)$$

Усредняя (7) по p_1 на интервале $[0, 1]$, будем иметь

$$D\{p_2^*\} = (1/4) \sqrt{\pi/2} (1/n_2 \sqrt{n_1}) + 1/6n_1.$$

Этот результат полностью совпадает с ранее полученным в [4] результатом для частного случая двухэтапной процедуры.

Формулы (3) и (6) позволяют провести обобщение двухэтапной процедуры для случая многоэтапной процедуры.

Измерения на 1-м этапе. Продолжая анализ ошибок измерения на l -м этапе, обратим внимание на зависимость σ_l^2 в формуле (6) от p_1 , вносимую множителем $\sigma_1^{1/2^{l-2}}$.

Учитывая, что $\sigma_1 = \sqrt{(p_1 q_1)/n_1}$, $q_1 = 1 - p_1$, нетрудно видеть, что при увеличении l кривая $\sigma_1^{1/2^{l-2}}(p_1)$ становится все более плоской в окрестности точки $p_1 = 1/2$, поэтому для получения усредненного по p_1 значения σ_l^2 достаточно в формуле (6) выполнить вычисления в точке $p_1 = 1/2$. Подставляя $p_1 = 1/2$ в выражение (6), находим

$$\sigma_l^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{(2^{l-1}-1)/2^{l-1}} \frac{1}{\prod_{i=0}^{l-1} n_{l-i}^{1/2^i}}, \quad l \geq 2. \quad (8)$$

Исследование (8) на экстремум (минимум) при фиксированном $n = \sum_{i=1}^l n_i$ дает следующее оптимальное соотношение между этапами:

$$n_l/n_{l-1} = n_{l-1}/n_{l-2} = \dots = n_2/n_1 = 2. \quad (9)$$

$$\sigma_l = \sqrt{\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l^2} = \sqrt{2/\pi} (2^2/n), \quad (10)$$

поскольку $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{2^i} = 2$, а $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{i+1}{2^i} = 2^4$.

Таким образом, в предельном случае, как это следует из формулы (10), измерения на l -м этапе будут обеспечивать скорость уменьшения среднеквадратической ошибки как $1/n$. Уменьшение числа этапов l , а также учет других обстоятельств, связанных с формированием эталонных траекторий, приводит к уменьшению достигаемого предела вплоть до значений $1/n^{3/4}$ для $l = 2$.

Заключение. Применение рекурсивных многоэтапных оценок измерения параметров повторяющегося сигнала позволяет увеличить точность измерения после проведения усреднения n импульсов в $n^{3/4}$ — n раз, что дает дополнительный резерв повышения точности.

*Поступило в редакцию 29 декабря 1983 г.;
окончательный вариант — 7 июня 1984 г.*

УДК 519.95

И. Ф. КЛИСТОРИН, Г. А. ТКАЧ, Г. Я. ШЕВЧЕНКО
(Кишинев)

ДИАЛоговая СИСТЕМА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ТАБЛИЧНОЙ ФОРМЕ

Многие исследовательские и прикладные задачи в области обработки разнотипных экспериментальных данных зачастую требуют обращения к целому ряду процедур как вычислительного, так и логического характера, выполняемых в определенной последовательности. Наблюдающееся усложнение этих задач (в частности, из-за увеличения размерности обрабатываемых данных) обуславливает обращение к ЭВМ для проведения машинного эксперимента и машинной обработки его результатов.

Появление сравнительно дешевых мини- и микроЭВМ со значительными возможностями создает предпосылки для автоматизации проведения машинного эксперимента и обработки данных с привлечением широкого круга пользователей. Однако в настоящее время для этих классов ЭВМ основным средством решения задач обработки данных является использование пакетов прикладных программ (ППП). В то же время простое применение ППП без его специальной организации — малоэффективное средство решения указанной проблемы.

В связи с этим актуальна разработка автоматизированных систем на базе мини- и микроЭВМ, позволяющих в режиме активного диалога проводить машинный эксперимент и обработку данных в условиях большой размерности массивов, разнотипности экспериментальных данных, необходимости запоминания, доступа к данным и быстрого манипулирования ими.

В работе рассматривается система, отвечающая перечисленным выше требованиям и реализующая один из возможных способов решения указанной проблемы. Решение заключается в табличном представлении данных, хранящихся в виде единого массива с фиксированной структурой, и в создании развитой модульной организации системы, позволяющей легко расширять ее возможности.

Назначение. Данная версия системы ДИСК (диалоговая система классификации) ориентирована на решение задач классификационной обработки разнотипных экспериментальных данных и обеспечивает: ввод данных с клавиатуры дисплея и запись их на диск; вызов в оперативную память файлов данных из архива, занесенного на диск; выполнение программ пользователя в автоматическом и диалоговом режимах; формирование архива результатов и запись его на диск; вывод на алфавитно-цифровой дисплей или АЦПУ исходных данных и результатов в табличной форме.