

Г. Н. ГЛАЗОВ, Гр. Н. ГЛАЗОВ, Г. М. ИГОНИН
(Томск)

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ МАРКОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОПТИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ АТМОСФЕРЫ

Введение. Применяемая в оптических приемниках простейшая обработка сигналов [1] в ряде случаев не удовлетворяет современным требованиям к точности восстановления профилей атмосферных параметров. Так, определение профиля температуры T с использованием барометрической формулы предъявляет серьезные требования к ошибке восстановления плотности ρ [2]. Повышение точности возможно с использованием априорной информации о флуктуациях зондируемых параметров, а также информации из предшествующих эхо-сигналов для обработки последующих и с меньших высот для оценки на больших. Такую возможность предоставляет нелинейная марковская фильтрация [3], позволяющая реализовать рекуррентный алгоритм одновременной оценки атмосферных параметров в реальном времени.

Физические предпосылки. Рассмотрим моностатический импульсный лидар, зондирующий атмосферу в высотном интервале $Z = [z_0, z_m]$, с приемником, работающим на Z в токовом режиме. Пусть реализуется один из вариантов: А — прием на длине волны λ_0 излучения, Z — внутри зоны 27—40 км устойчивого очищения воздуха; Б — прием на длине волны Q — линии комбинационного рассеяния азота, Z отвечает условию токового режима. В обоих вариантах вкладом в сигнал аэрозольного рассеяния можно пренебречь.

Мощность сигнала на входе фотодетектора

$$P_{np}(z) = ES c \chi \beta_{\pi}(z) Y_0(z) Y_1(z) / 2z^2, \quad z \in Z,$$

где E — энергия излучаемого импульса; S — эффективная площадь приемного объектива; c — скорость света; χ — коэффициент потерь в приемной оптике;

$$\beta_{\pi}(z) = 2c^{-1} E^{-1} \int_0^z \beta_{\pi}^H(z') P_{\pi} [2(z - z')/c] dz' \quad (1)$$

— сглаженный лидарным импульсом коэффициент обратного рассеяния;

$$\beta_{\pi}^H(z) = \begin{cases} (3/8\pi) M^{-1} \sigma_m(\lambda_0) \rho(z), & \text{вар. А;} \\ \eta_a M^{-1} \sigma_{\text{лкр}}(\lambda_0) \rho(z), & \text{вар. Б} \end{cases} \quad (2)$$

— естественный коэффициент; $P_{\pi}(t)$ — функция мощности лидарного импульса; $M = 28.964$ г — молекулярная масса воздуха [4]; $\sigma_m, \sigma_{\text{лкр}}$ — сечения рэлеевского рассеяния на молекулу воздуха и обратного КР на молекулу азота; $\eta_a = 0,78084$ — относительная концентрация азота [4]; Y_0, Y_1 — функции пропускания на длинах волн излучения и приема. Таким образом, P_{np} связана с ρ ; давление p , рэлеевские оптическая толщина τ_m и пропускание Y_m также выражаются через ρ :

$$p(z) = RM^{-1} T(z) \rho(z), \quad \tau_m(z_0, z) = M^{-1} \sigma_m(\lambda_0) J[\rho(z)], \\ Y_m(z_0, z) = \exp \{-2\tau_m(z_0, z)\};$$

ρ связана с T барометрической формулой [5]

$$\rho(z) = \rho(z_0) T(z_0) T^{-1}(z) \exp \{-gMR^{-1} J[T^{-1}(z)]\}.$$

В приведенных формулах R — универсальная газовая постоянная, J — оператор интегрирования по $[z_0, z]$, g — ускорение свободного падения.

Соотношения флуктуаций. Как и $T(z)$, профили $\rho(z)$, $\beta_{\pi}(z)$ и т. д. — случайные функции. Представим случайные величины в виде $T = \bar{T} +$

$+\Delta T$, $\rho = \bar{\rho} + \Delta\rho$ и т. д., где черта означает усреднение по ансамблю температур. Поскольку в атмосфере $\sigma_T \ll \bar{T}$ (σ_T — среднеквадратичное отклонение температуры), соотношения флуктуаций можно линеаризовать:

$$\Delta\rho(z) = \bar{\rho}(z) [-\Delta T(z)/\bar{T}(z) + J[\Delta T(z)]/H_0 T_0];$$

$$\Delta\beta_\pi(z) = B\Delta\rho(z), \quad \Delta p(z) = \bar{p}(z) J[\Delta T(z)]/H_0 T_0;$$

$$\Delta\tau_m(z_0, z) = M^{-1}\sigma_m(\lambda_0) J[\rho(z)], \quad Y_m(z_0, z) = \bar{Y}_m(z_0, z) \exp\{-2\Delta\tau_m(z_0, z)\},$$

где $T_0 = \bar{T}(z_0)$; B очевиден из (2); $\bar{Y}_m = \exp\{-2\bar{\tau}_m\}$; H_0 — шкала высот [4].

Модель сигнала и шума. Удобно выбрать вектор состояний как $\lambda = \{\lambda_i\}$, $i = 1-3$; $\lambda_1 = \Delta T/\sigma_T$; $\lambda_2 = 2J[\Delta T(z)]/c\sigma_T$; $\lambda_3 = 2\Delta\tau_m(z_0, z)$. Установим структуру процесса $\lambda_1(z)$. В силу линейности зависимости $\Delta\beta_\pi$ от ΔT вклад во флуктуации мощности $\Delta P_{np}(z)$ согласно (1) дает сглаженный профиль

$$\Delta T(z) = \frac{2}{cE} \int_0^z \Delta T^n(z') P_n[2(z-z')/c] dz'. \quad (3)$$

Здесь $\Delta T^n(z)$ — естественный профиль. Операция в правой части (3) — эффективное сглаживание естественного профиля на скользящем интервале $L = c\tau_n/2$, где $\tau_n = E/P_{n \max}$ — эффективная длительность излучаемого импульса. Далее предполагаем, что выполняется условие $L \gg z_k$ (z_k — высотный радиус корреляции процесса $\Delta T^n(z)$). Оценки радиусов корреляции, полученные по измерениям радиозондами [5], не отвергают этого условия; так как найдены после сильного временного и пространственного сглаживания. В силу центральной предельной теоремы при $L \gg z_k$ $\Delta T(z)$ — приближенно гауссовый процесс независимо от распределения вероятностей величины $\Delta T^n(z)$. Аппроксимируем спектральную плотность процесса $\lambda_1(t) = \Delta T(ct/2)/\sigma_T$ функцией, пропорциональной $[\alpha^2 + \omega^2]^{-1}$, где α — постоянная. Тогда $\lambda_1(t)$ — простой марковский процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\alpha\lambda_1(t) + n_1(t). \quad (4)$$

Здесь $n_1(t)$ — гауссовый белый шум со спектральной плотностью $N_1/2 = 2\alpha$. Линейно связанные с $\lambda_1(t)$ процессы $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ также гауссовы и, как следует из соотношений флуктуаций, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = 2M^{-1}\sigma_m(\lambda_0)\bar{\rho}(ct/2)mC^T\lambda, \quad (5)$$

где $m = \sigma_T/\bar{T}$, $C^T = \{-1, c\bar{T}/2H_0T_0, 0\}$. Гауссовый векторный процесс $\lambda(t)$ марковский, поскольку удовлетворяет системе линейных уравнений (4), (5).

Для данной реализации $\lambda(t)$ ток фотодетектора

$$y(t) = s(t; \lambda) + n(t),$$

где s — средний по ансамблю дробовых флуктуаций ток сигнала:

$$s(t; \lambda) = s_0[1 + mC^T\lambda] \exp(-\lambda_3);$$

$$s_0 = s(t; 0) = \xi P_{np}(t)_{\lambda=0},$$

ξ — коэффициент передачи «мощность — ток» фотодетектора; $n(t)$ — гауссовый процесс с нулевым средним, включающий дробовые флуктуации сигнала, фона и темнового тока (средний фоновый-темновой ток легко аппаратно компенсировать). При условии $\Pi\tau_n \gg 1$, где Π — полоса пропускания последдетекторного фильтра, $n(t)$ можно считать белым шумом со спектральной плотностью

$$N_0/2 = [s_0 + \xi P_\phi + I_T]q_e, \quad (6)$$

где P_ϕ — мощность фона на входе детектора; I_T , q_e — темновой ток и заряд одноэлектронного импульса на выходе детектора.

Уравнения фильтрации и алгоритм обработки. В силу вышеприведенных соотношений ΔT , $\Delta \rho$, Δp , $\Delta \beta_n$, $\Delta \tau_m$ однозначно выражаются через λ . Задача состоит в оптимальном оценивании реализации процесса $\bar{\lambda}(t)$ по входным данным $y(t)$, априорно заданным профилям $\bar{T}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $z \in Z$ и константам N_0 , σ_T , H_0 , τ_n . Найдем обработку совокупности $y(t)$, доставляющую оценку $\lambda^*(t)$ максимума апостериорной плотности вероятности.

В условиях оптического зондирования

$$2 [\Delta \tau_m^2(z_0, z)]^{1/2} \leq [\lambda_3^2(z_m)]^{1/2} \ll 1 \quad (7)$$

и можно ограничиться линейной частью разложения $s(t; \lambda)$ по степеням λ . Поэтому логарифм функционала плотности вероятности процесса $n(t)$ становится линейно-квадратичной формой от λ , а апостериорная плотность $W(\lambda/y)$ — гауссовой. При определенных условиях [4], в нашем случае принимающих вид

$$Q = s_0^2 m^2 / N_0 \alpha \gg 1, \quad t \in [2z_0/c, 2z_m/c],$$

можно перейти к квазиоптимальной фильтрации. Хотя при $L \gg z_n$ $\alpha \approx 1/\tau_n$, более точное значение α зависит от формы спектра процесса $\Delta T^n(ct/2)$ и формы импульса $P_n(t)$. Поэтому включим в обработку адаптацию по α : считая α вырожденным процессом с нулевыми коэффициентами сноса и диффузии [6], образуем расширенный вектор состояний $\{\lambda, \alpha\}$.

Система уравнений квазиоптимальной фильтрации и адаптации принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^* &= A\lambda^* + KF_1^*; & \dot{\alpha}^* &= rF_1^*; \\ \dot{K} &= KA + A^TK + r^rg + g^rr + b + KF_2K; & & (8) \\ \dot{r} &= gq + rA + rF_2K; & \dot{q} &= rF_2r^T, \end{aligned}$$

а начальные условия — $\lambda^*(t_0) = 0$; $\alpha^*(t_0) = 1/\tau_n$; $K_{11}(t_0) = 1$; $K_{ij}(t_0) = 0$, $(i, j) \neq (1, 1)$; $r(t_0) = 0$; $q(t_0) = \psi^2$. Здесь $K = \{K_{ij}\}$ — матрица вторых апостериорных моментов; q — апостериорная дисперсия α^* ; $r = \{q_i\}$ — вектор апостериорных моментов связи между α^* и λ^* ; 2ψ — длина интервала начальной неопределенности α ; $A = \{a_{ij}\}$; $a_{11} = -\alpha^*$, $a_{31} = 2M^{-1}\sigma_m \rho m$;

$$a_{32} = -GTc/2H_0T_0; \quad a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0;$$

$$F_1^* = 2N_0^{-1} [y(t) - s(t; \lambda^*)] \exp(-\lambda_3^*) E;$$

$$E^T = \{m, -cm\bar{T}/2T_0H_0, -\Theta\}; \quad \Theta = 1 + mC^T\lambda;$$

$$g^T = \{-\lambda_1^*, 0, 0\}; \quad b = \{b_{ij}\}; \quad b_{11} = 2\alpha^*;$$

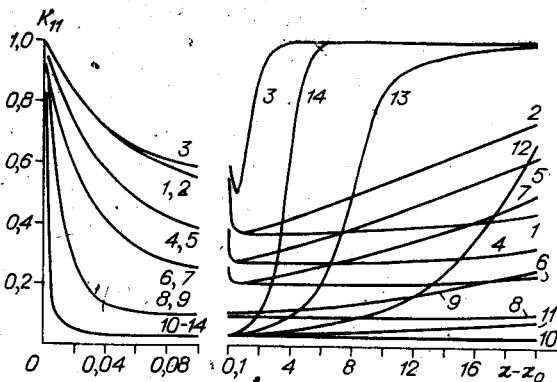
$$b_{ij} = 0 \text{ при } (i, j) \neq (1, 1);$$

$$F_2 = -2N_0^{-1}s_0^2 \exp\{-2\lambda_3^*\} EE^T.$$

В результате решения системы (8) получаются оценки $\lambda^*(z)$, $\alpha^*(z)$ и меры их ошибок $\sqrt{K_{ii}(z)}$, $\sqrt{q(z)}$, а отсюда — оценки и меры ошибок для $\Delta T(z)$, $\Delta \rho(z)$ и т. д. Соответствующая обработка $y(t)$ осуществляется аналоговой системой с обратными связями (способы синтеза подобных систем известны [3]) или цифровой с шагом $\Delta t \ll \tau_n$ и рекуррентным решением (8) на ЭВМ подходящим стандартным конечно-разностным методом.

При полиимпульсном зондировании и рекуррентной адаптации начальных условий для α и q может оказаться, что, начиная с некоторой посылки, в адаптации нет необходимости. Тогда в системе (8) остаются первое и третье уравнения и обработка упрощается. Другое упрощение допустимо, если в (7) неравенство столь сильно, что в s , F_1^* , F_2 можно положить $\lambda_3^* = 0$, и система (8) становится линейной. Наконец, если

Рис. 1. Высотный профиль K_{11} при $Q = \text{const}$ ($Q_0 = 5$ (1), 10 (4), 20 (6), 100 (8), 1000 (10)) и Q — по (10) ($Q_0 = 5, \gamma_0 = 0,1$ (2), 1,0 (3); $Q_0 = 10, \gamma_0 = 0,1$ (5); $Q_0 = 20, \gamma_0 = 0,1$ (7); $Q_0 = 100, \gamma_0 = 0,1$ (9); $Q_0 = 1000, \gamma_0 = 0,1$ (11), 0,25 (12), 0,5 (13), 1,0 (14)).



справедливы оба упрощения, получаем фильтрацию типа Кадмана — Бьюси с уравнениями

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \tilde{A}\lambda^* + 2N_0^{-1}s_0m\tilde{K}\tilde{C}^T[y - s_0(1 + m\tilde{C}^T\lambda^*)]; \\ \tilde{K} &= \tilde{A}\tilde{K} + \tilde{K}\tilde{A}^T + \tilde{b} - 2N_0^{-1}s_0^2m^2\tilde{K}\tilde{C}\tilde{C}^T\tilde{K}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$; $\tilde{C} = \{-1, c\bar{T}/2H_0T_0\}$; $\tilde{A}, \tilde{K}, \tilde{b}$ — левые верхние 2×2 блоки матриц A, K, b . Существенно, что (9) не зависит от $y(t)$ и может быть решено априори.

Эффективность фильтрации и адаптации. Проведен замкнутый численный эксперимент на ЭВМ, включающий моделирование реализаций $\lambda(t)$, формирование $s(t; \lambda)$ и решение системы уравнений фильтрации и адаптации методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Результаты удобно представлять в зависимости от обобщенной высоты $\kappa = 2\alpha z/c$ и обобщенного «отношения сигнал — шум» Q . Если $m(z) = \text{const}$, в (6) превалирует s_0 и $(z_m - z_0) \ll z_0$, то

$$Q(\kappa) = Q_0 \exp[-\gamma_0(\kappa - \kappa_0)], \quad (10)$$

где $\gamma_0 = c/2\alpha H_0$; $\kappa_0 = 2\alpha z_0/c$. Если, кроме того, $(z_m - z_0) \ll H_0$, то $Q = \text{const}$.

На рис. 1 приведены рассчитанные по (9) профили величины K_{11} , имеющей смысл отношения дисперсий $K_{11} = \sigma^2(\Delta T^*)/\sigma_T^2$ (ΔT^* — оценка ΔT). K_{11} быстро убывает от начального значения $K_{11}(\kappa_0) = 1$ до некоторого минимума K_{11m} (переходный режим), затем возрастает до ~ 1 : медленно при $Q = \text{const}$ (за счет влияния совместной оценки λ_2), более быстро при Q вида (10) (в силу уменьшения Q). Длительность переходного режима и величина K_{11m} находятся в обратной зависимости от Q_0 и практически не зависят от γ_0 . При $Q \gg 10$ теоретический анализ дает $K_{11m} \sim Q_0^{-1/2}$. Относительная среднеквадратичная ошибка $\delta_* = \sigma(\Delta T^*)/\bar{T}$ восстановления профиля температуры найдется как $\delta_* = m\sqrt{K_{11}}$.

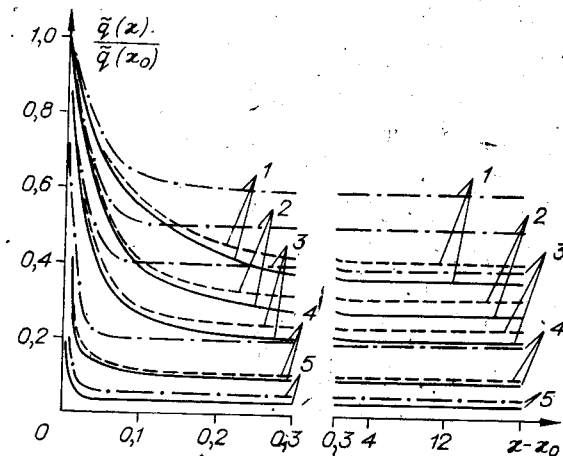


Рис. 2. Высотный профиль нормированной безусловной дисперсии $\tilde{q}(x)/\tilde{q}(x_0)$ адаптируемого параметра α для $Q_0 = 5$ (1), 10 (2), 20 (3), 100 (4), 1000 (5): $q(x_0) = 0,01$ (сплошные линии); $q(x_0) = 1,0$ (штриховые); $q(x_0) = 10,0$ (штрихпунктирные).

		0,1		0,3		1,0	
K_{110}	m	0,01	0,02	0,02	0,01	0,02	
0,3	δ_*	0,0055	0,011	0,011	0,0055	0,011	
	z_m , км	0,367	0,64	1,12	2,52	3,98	
0,6	δ_*	0,0077	0,015	0,015	0,0077	0,015	
	z_m , км	1,07	1,7	2,33	4,7	6,55	
0,8	δ_*	0,0089	0,018	0,018	0,0089	0,018	
	z_m , км	1,75	2,59	3,77	6,55	8,9	

Безусловные дисперсии компонентов расширенного вектора (λ, α) приближенно удовлетворяют системе уравнений, получаемой из (8) подстановкой λ, α вместо λ^*, α^* и усреднением. Качество адаптации иллюстрируется приведенными на рис. 2 профилями $v(x) = \tilde{q}(x)/\tilde{q}(x_0)$, где \tilde{q} — безусловная дисперсия величины $\eta = \alpha/\alpha_{ист}$, $\alpha_{ист}$ — истинное значение α . Установившееся значение $v(\infty)$ находится в обратной зависимости от Q_0 и в прямой — от $\tilde{q}(x_0)$; длительность переходного процесса адаптации — в обратной зависимости от $Q_0, q(x_0)$. При $Q_0 \gg 10$ зависимость $v(\infty)$ от $q(x_0)$ незначительна.

Таблица иллюстрирует возможности лидарного определения профиля температуры по комбинационному рассеянию азота. В расчете взяты следующие параметры: $\lambda_0 = 0,35$ мкм (эксимерный лазер); $E = 0,1, 0,3, 1,0$ Дж; $\chi\mu = 0,06$ (μ — квантовый выход ФЭУ); $S = 0,75$ м²; $\tau_n = 5,33$ мкс ($L = 0,8$ км); $\Pi = 3$ МГц; $m = 0,01, 0,02$ [5]; метеорологическая дальность видимости 13 км; $z_0 = 200$ м. Последовательно определив s_0, N_0, Q_0, γ_0 , семейство $K_{11}(x; E)$, фиксируем значение $K_{11} = K_{110}$ и находим ошибку δ_* и соответствующую z_m . Выполнение условий токового режима проверялось по методике [7].

Пусть Δt_r — временной радиус корреляции неоднородностей температуры с пространственным масштабом L . Тогда на интервале $\Delta t \ll \Delta t_r$ возможно усреднение по $N = \Delta t/f_n$ актам зондирования, где f_n — частота повторения импульсов лазера. Результирующая ошибка $\delta_{*N} = \delta_*/\sqrt{N}$. Так, в рассмотренном выше примере при $E = 1$ Дж, $m = 0,02$, $\Delta t = 1$ с, $f_n = 20$ Гц, $K_{110} = 0,8$ имеем $z_m = 8,9$ км, $\delta_{*N} = 0,004$.

Заключение. Обоснована марковская модель флуктуаций температуры, сглаженных лидарным импульсом, и показана возможность одночастотного зондирования температуры и связанных с ней параметров с применением нелинейной марковской фильтрации. Найдены алгоритмы обработки лидарного сигнала, предусмотрена адаптация. Эффективность фильтрации изучена с помощью моделирования на примере температуры. Как пример рассмотрены возможности зондирования температуры нижней тропосферы лидаром на эксимерном лазере по комбинационному рассеянию азота. Значительно большие дальности достижимы при зондировании по рэлеевскому рассеянию в силу существенно больших сечений рассеяния. Возникающая при этом трудность отделения вклада аэрозольного рассеяния снимается марковской фильтрацией в приемнике двухчастотного лидара (этот вопрос выходит за рамки данной работы):

2. Захаров В. М., Костко О. К. Метеорологическая лазерная локация—Л.: Гидрометеиздат, 1977.
3. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.—М.: Сов. радио, 1977.
4. Хргиан А. Х. Физика атмосферы.—Л.: Гидрометеиздат, 1978, т. 1.
5. Справочник статистических характеристик температуры и влажности в свободной атмосфере над СССР/Под ред. В. С. Комарова.—М.: Гидрометеиздат, 1972.
6. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема.—М.: Сов. радио, 1973.
7. Астафуров В. Г., Глазов Г. Н. Статистика фотоотчетов и режимы регистрации лидарного сигнала.—В кн.: Дистанционное зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1978.

Поступила в редакцию
11 февраля 1984 г.

УДК 543.4

В. В. ЛАВРЕНТЬЕВ, В. В. РЯБОВ, Г. В. СМIRHOV

(Ленинград)

ОЦЕНКА ВОЛНОВОГО ФРОНТА ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

При решении задач, связанных с анализом источников и структуры излучения, а также при формировании сигналов, управляющих активной оптикой, возникает задача оценки волнового фронта оптического излучения.

Постановка задачи. Будем предполагать, что волновой фронт, представляющий собой трехмерную поверхность, допускает параметрическое описание, которое в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 можно задать в виде

$$x_3 = Y(x_1, x_2, \theta), \quad (1)$$

где $Y(x_1, x_2, \theta)$ — функция, описывающая множество реализаций волнового фронта; $\theta = [\theta_1 : \theta_2 : \dots : \theta_n]^T$ — вектор параметров, характеризующий реализацию. Если $Y(x_1, x_2, \theta)$ — аналитическая функция переменных x_1, x_2 , то для ее параметрического представления с заданной точностью может быть использован полином от двух переменных соответствующей степени. Коэффициенты этого полинома образуют вектор параметров θ .

Параметрическое представление множества реализаций волнового фронта позволяет сформулировать задачу восстановления волнового фронта как задачу оценки вектора параметров θ , отвечающих наблюдаемой реализации.

В работе рассматривается решение поставленной задачи методом наименьших квадратов при полиномиальном представлении модели поверхности (1) по измерениям локальных наклонов волнового фронта с помощью гартмановского датчика [1].

Модель наблюдений. Будем считать, что система координат x_1, x_2, x_3 выбрана так, что

$$Y(0, 0, \theta) = 0. \quad (2)$$

Тогда в общем случае полиномиальное параметрическое представление функции $Y(x_1, x_2, \theta)$ примет вид

$$Y(x_1, x_2, \theta) = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_1x_2\theta_3 + x_1^2\theta_4 + \dots + x_1^m x_2^l \theta_n, \quad (3)$$

где k, l, m — целые числа, определяющие вид полинома. Функция (3) линейна по параметрам, и для ее записи обычно используют векторную