

где по определению $\tilde{f}_{n,k,Q} = \sum_{U_Q} f'_{p,s,t}$ а множества

$$U_Q = U_{n,k,Q} = \{(p, s, t); t - np - ks = Q \pmod{N}\} \quad (29)$$

для произвольных значений $n, k, Q = 1 \div N$.

Таким образом, получаем для $\tilde{f}_{n,k,Q} = \tilde{f}_{n,k,Q} - \tilde{f}_{n,k,Q+N/2}$

$$f_{n,k} = \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W^Q. \quad (30)$$

Далее, так как исходная функция f представляет массив действительных чисел, а базисные функции W^Q есть $W_1^Q + iW_2^Q$, имеем

$$f_{n,k} = \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_1^Q + i \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_2^Q, \quad (31)$$

откуда следует, что должны выполняться уравнения

$$\sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_2^Q = 0 \text{ и } \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_1^Q = f_{n,k}$$

для всех $n, k = 1 \div N$. Так как $\{W_1^Q\}$ и $\{W_2^Q\}$ составляют базис в пространстве сигналов, а действительный сигнал $\{f_{n,k}\} \neq 0$, то эти уравнения могут выполняться только при условиях

$$\tilde{f}_{n,k,Q} = 0, \quad Q = 1 \div N/2 - 1 \text{ и } \tilde{f}_{n,k,N/2} = 0. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31) получаем формулу (27), что и требовалось доказать.

Заключение. Таким образом, на основе предлагаемого тензорного способа представления ДДПФ реализуется эффективный алгоритм вычисления ДДПФ. При этом аналогичный алгоритм можно использовать и для более общих сигналов, размерности которых не обязательно равные, достаточно, чтобы они были кратными. Это относится и к описанным ортогональным функциям, которые, возможно, найдут себе хорошее применение в области цифровой обработки сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хуанг, Шрейбер, Третьяк. Обработка изображений.— В кн.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
2. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
3. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 26 марта 1984 г.

УДК 621.398.1 : 621.391.037.3

В. Г. ЛИПСКИЙ

(Минск)

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ДУГАМИ ПАРАБОЛ

Одна из областей применения методов аппроксимации плоских кривых дугами аналитических линий — сжатие данных в измерительных и терминальных системах [1, 2].

При сжатии данных наибольшее распространение получили методы аппроксимации дугами линий, представляющих собой полиномы нулевой

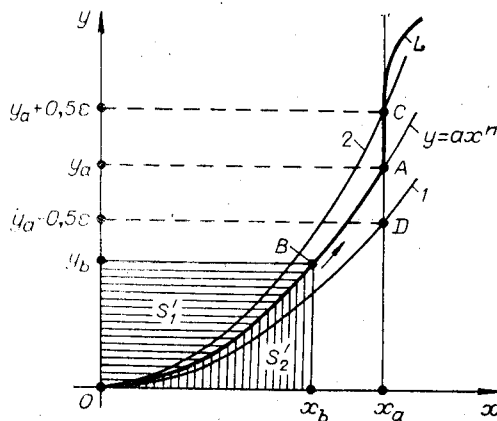


Рис. 1. Геометрическая интерпретация сущности метода аппроксимации.

и первой степени. Использование же на практике методов аппроксимации дугами линий, являющихся полиномами степеней $n > 1$ или специальными функциями, считается нецелесообразным, что вызвано, прежде всего, технической сложностью их реализации [3]. Исключение в этом отношении составляет рассматриваемый в настоящей работе метод аппроксимации дугами парабол $y = cx^n$ ($n = 2, 3, \dots; -\infty < c < +\infty$). В отличие от известного метода [4] данный метод не требует выполнения операций возведения в степень и деления. По простоте реализации он сравним с методами кусочно-линейной аппроксимации, описанными в [5].

Основу метода составляет проверка совпадения траектории движения некоторого объекта, отождествляемого ниже с математической точкой, с дугой параболы вида $y = ax^n$. Исходным для такой проверки является свойство парабол, выражаемое уравнением

$$S_1 - nS_2 = 0, \quad (1)$$

где S_1 — площадь, ограниченная осью Oy , прямой $y = y_a$, проходящей через произвольную точку $A(x_a, y_a)$, принадлежащую параболы $y = ax^n$, и дугой OA параболы $y = ax^n$ (рис. 1); S_2 — площадь, ограниченная осью Ox , прямой $x = x_a$ и дугой OA параболы $y = ax^n$.

Сущность алгоритма проверки состоит в следующем. Пусть из начала системы координат xOy вдоль плоской кривой L движется точка $B(x_b, y_b)$ (см. рис. 1) и в этой точке непрерывно вычисляется значение функции

$$F(x_b, y_b) = S'_1 - nS'_2, \quad (2)$$

где S'_1 — площадь, ограниченная осью Oy , прямой $y = y_b$ и дугой OB кривой L ; S'_2 — площадь, ограниченная осью Ox , прямой $x = x_b$ и дугой OB кривой L . Если во всех точках дуги OB кривой L функция $F(x_b, y_b) = 0$, то на основе свойства (1) можно утверждать, что движение осуществляется вдоль параболы $y = ax^n$ и OB — дуга этой параболы. Критерием отклонения от движения по параболы может служить отличие функции $F(x_b, y_b)$ от нуля.

Для кривой L на рис. 1, дуга OA которой совпадает с параболой $y = ax^n$, результаты будут следующими: при движении вдоль дуги OA $F(x_b, y_b) = 0$, так что движение воспринимается как движение вдоль дуги параболы $y = ax^n$; начиная с точек, следующих за точкой A , $F(x_b, y_b) \neq 0$, поэтому фиксируется отклонение от движения вдоль параболы.

Таким образом, сущность указанного метода аппроксимации состоит в следующем: при обнаружении отклонения от движения вдоль параболы $y = ax^n$ в некоторой критической точке дуга плоской кривой L , ограниченная началом координат и точкой, предшествующей критической, заменяется дугой параболы $y = cx^n$, ограниченной и заданной теми же точками; затем начало координат помещается в точку, предшествовавшую критической, и цикл аппроксимации повторяется для нового участка кривой L и т. д. Характерно, что параметр a в начале каждого цикла аппроксимации задавать не требуется, поскольку он в выражение (2) явно не входит; значение параметра c однозначно определяется координатами

натами точки, предшествующей критической; в начале координат функция F имеет нулевое значение.

Рассмотрим важный вопрос задания погрешности аппроксимации. При использовании в качестве критерия отклонения от движения по параболе отклонения функции F от нуля дуги аппроксимируемой кривой будут точно совпадать с аппроксимирующими дугами парабол. Для осуществления аппроксимации с допустимой погрешностью нужно, исходя из выбранного вида приближения, найти другой критерий отклонения от движения вдоль параболы.

Аппроксимацию с погрешностью ε для случая равномерного приближения можно осуществить, если в качестве критерия отклонения от движения вдоль параболы использовать нарушение в некоторой точке аппроксимируемой кривой условия

$$|F(x_b, y_b)| \leq 0,5\varepsilon x_b, \quad (3)$$

где $x_b \geq 0$, $dx_b \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

Данный вывод был сделан вначале для частного множества аппроксимируемых кривых, исходя из следующего.

Пусть кривая L задается уравнениями $y_l = y_l(x)$ и $x_l = x_l(y)$. Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$F(x_b, y_b) = \int_0^{y_b} x_l(y) dy - n \int_0^{x_b} y_l(x) dx. \quad (4)$$

Положим, что точка B движется из начала координат вдоль параболы $y = ax^n$ до точки A (см. рис. 1), а затем в произвольном направлении вдоль прямой $x = x_a$.

Рассмотрим для этого случая кривых L связь между значением функции $F(x_b, y_b)$ и отклонением $\delta(x_b, y_b)$ точки B от параболы $y = ax^n$ по оси ординат. При движении B вдоль дуги OA $F(x_b, y_b) = 0$, а также $\delta(x_b, y_b) = 0$. При движении вдоль прямой $x = x_a$ указанная выше связь будет устанавливаться соотношением

$$F(x_b, y_b) = x_b \delta(y_b), \quad (5)$$

где $\delta(y_b) = y_b - y_a$. Соотношение (5) можно получить из (4), если учесть, что на прямой $x = x_a$ $dx = dx_a = 0$, $x_l(y) = x_a = x_b$.

Из анализа связи δ и $F(x_b, y_b)$ для такого частного вида кривых L следует, что если на функцию $F(x_b, y_b)$ наложить ограничение (3), то при его соблюдении будет выполняться неравенство

$$|\delta(x_b, y_b)| < 0,5\varepsilon, \quad (6)$$

т. е. в этом случае ни одна из точек дуги OB кривой L не удалится от параболы $y = ax^n$ на величину, превышающую $0,5\varepsilon$. Нарушение условия (3), а также неравенства (6) будет происходить, когда координаты точки B на прямой $x = x_a$ станут удовлетворять либо условиям $x_b = x_a$, $y_b > y_a + 0,5\varepsilon$, либо $x_b = x_a$, $y_b < y_a - 0,5\varepsilon$, причем точками, предшествующими критическим, в которых условие (3) нарушается, являются точки $C(x_a, y_a + 0,5\varepsilon)$ и $D(x_a, y_a - 0,5\varepsilon)$.

Если использовать нарушение (3) в качестве критерия отклонения от движения вдоль параболы $y = ax^n$, то согласно изложенному методу аппроксимации дуга OB кривой L будет аппроксимирована либо дугой OC параболы 1 ($c = (y_a + 0,5\varepsilon)/x_a^n$), либо дугой OD параболы 2 ($c = (y_a - 0,5\varepsilon)/x_a^n$). В обоих случаях отклонение точек аппроксимируемой дуги OB кривой L от аппроксимирующих дуг OC и OD парабол 1, 2 по оси ординат по абсолютной величине будет не больше ε . Это следует из выполнения в каждой точке аппроксимируемой дуги OB кривой L условия (6) и из того, что точки дуг OC и OD парабол 1, 2 удалены от дуги OA параболы $y = ax^n$ по оси ординат на величину не более $0,5\varepsilon$.

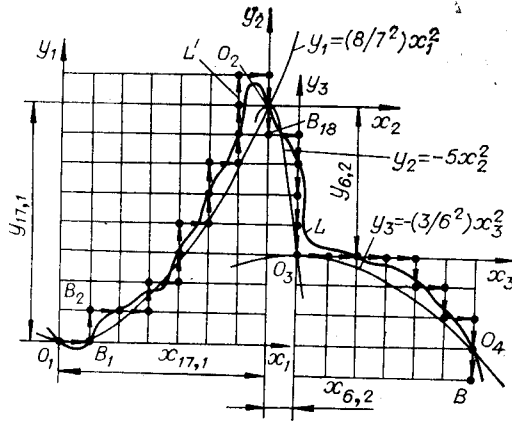


Рис. 2. Пример аппроксимации шаговой траектории L' дугами парабол $y = cx^2$.

Максимальное отклонение ϵ точки аппроксимируемой дуги кривой от аппроксимирующей дуги параболы получится, например, в следующем случае: точка B движется из начала координат вдоль параболы $y = ax^2$ до точки A , затем вдоль прямой $x = x_a$ до точки D , а из точки D до точки C и далее вдоль прямой $x = x_a$. При

этом точкой, предшествующей критической, является точка C , а точка D , принадлежащая L , будет удалена от аппроксимирующей дуги параболы 2 на величину ϵ .

Таким образом, для указанного выше частного случая кривых при использовании нарушения условия (3) в качестве критерия отклонения от движения вдоль параболы аппроксимация осуществляется в соответствии с критерием равномерного приближения с погрешностью ϵ . Как показала экспериментальная проверка, данный частный вывод можно обобщить на случай всех кривых L , при движении точки B вдоль которых координата x_b удовлетворяет условиям $x_b \geq 0$, $dx_b \geq 0$ (т. е. кривая L описывается функцией вида функции времени).

Рассмотрим реализацию изложенного метода для аппроксимации шаговых траекторий [6], которыми описываются, например, дискретные сигналы дельта-модуляции или траектории движения зондов во многих устройствах ввода графической информации в ЭВМ. На примере аппроксимации шаговых траекторий и была проведена упомянутая выше экспериментальная проверка.

Шаговая траектория L' представляет собой образ непрерывной траектории L в дискретной системе координат (рис. 2), где координаты x и y могут принимать значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Описывается шаговая траектория последовательностью пар элементарных приращений координат $\Delta x_i, \Delta y_i$ (i — номер шага; $i = 1, 2, 3, \dots$). Приращения Δx_i и Δy_i могут принимать значения $-1, 0, +1$. В рассматриваемом примере с целью упрощения вычислений положим: если $\Delta x_i \neq 0$, то $\Delta y_i = 0$; если $\Delta y_i \neq 0$, то $\Delta x_i = 0$. Тогда аналогом выражения (4) в дискретной системе координат служит выражение

$$F_{ij} = \sum_{i=1}^j x_{i-1,j} \Delta y_{ij} - n \sum_{i=1}^j y_{i-1,j} \Delta x_{ij}, \quad (7)$$

где F_{ij} — значение функции $F(x_b, y_b)$ в точке с координатами

$$x_b = x_{ij} = \sum_{i=1}^j \Delta x_{ij}, \quad y_b = y_{ij} = \sum_{i=1}^j \Delta y_{ij}$$

в j -м цикле аппроксимации ($j = 1, 2, 3, \dots$);

$$x_{i-1,j} = \sum_{i=1}^{i-1} \Delta x_{ij}, \quad y_{i-1,j} = \sum_{i=1}^{i-1} \Delta y_{ij}. \quad (8)$$

Аналогом условия (3) будет выражение

$$|F_{ij}| \leq 0,5\epsilon x_{ij}, \quad (9)$$

где $x_{ij} \geq 0$ при $\Delta x_{ij} \geq 0$.

i	j	Δx_{ij}	Δy_{ij}	$x_{i-1, j}$	$y_{i-1, j}$	$ F_{ij} $	$0,5\epsilon x_{ij}$
1	1	1	0	0	0	0	2
2	1	0	1	1	0	1	2
3	1	1	0	1	1	1	4
4	1	1	0	2	1	3	6
5	1	0	1	3	1	0	6
6	1	1	0	3	2	4	8
7	1	0	1	4	2	0	8
8	1	0	1	4	3	4	8
9	1	1	0	4	4	4	10
10	1	0	1	5	4	1	10
11	1	0	1	5	5	6	10
12	1	1	0	5	6	6	10
13	1	0	1	6	6	0	12
14	1	0	1	6	7	6	12
15	1	0	1	6	8	12	12
16	1	1	0	6	9	6	14
17	1	0	-1	7	9	13	14
18	1	0	-1	7	8	20	14
1	2	0	-1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	-1	2	2
3	2	0	-1	1	-1	1	2
4	2	0	-1	1	-2	0	2
5	2	0	-1	1	-3	1	2
6	2	0	-1	1	-4	2	2
7	2	1	0	1	-5	8	4

В таблице приведены результаты вычислений по формулам (7)–(9), получающиеся при аппроксимации с погрешностью $\epsilon = 4$ шаговой траектории L' , представленной на рис. 2, дугами парабол $y = cx^2$.

В первом цикле аппроксимации ($j=1$) точка B перемещается из начала O_1 системы координат $x_1O_1y_1$. После первого шага, который характеризуется парой приращений $\Delta x_{11} = 1$, $\Delta y_{11} = 0$, точка B будет занимать положение узловой точки B_1 , после второго шага ($\Delta x_{21} = 0$, $\Delta y_{21} = 1$) — B_2 и т. д. Из таблицы видно, что нарушение условия (9) в первом цикле аппроксимации произойдет после 18-го шага в точке B_{18} . Следовательно, B_{18} — критическая точка. Точка O_2 предшествует критической точке B_{18} , поэтому участок O_1O_2 траектории L' будет равномерно приближаться с погрешностью $\epsilon = 4$ дугой O_1O_2 параболы $y_1 = (8/7^2)x_1^2$. Необходимо отметить, что задание дуги O_1O_2 параболы в системе координат $x_1O_1y_1$ осуществляется так же, как и при кусочно-линейной аппроксимации, только двумя значениями координат: $x_{17,1} = 7$, $y_{17,1} = 8$.

В следующем цикле аппроксимации ($j=2$) предполагается, что точка B начинает двигаться из начала O_2 новой системы координат $x_2O_2y_2$ и все вычисления выполняются с учетом этого. Нарушение условия (12) в этом цикле аппроксимации произойдет в точке с координатами $x_{7,2} = 2$, $y_{7,2} = -5$, поэтому очередной участок O_2O_3 шаговой траектории будет аппроксимирован дугой O_2O_3 параболы $y_2 = -5x_2^2$.

После третьего цикла аппроксимации ($j=3$) участок O_3O_4 шаговой траектории аппроксимируется дугой O_3O_4 параболы $y_3 = -(3/6^2)x_3^2$.

Проанализируем приведенный пример реализации метода с точки зрения количества вычислительных операций, которые необходимо выполнить при обработке каждого элементарного шага.

Вариант вычислительного процесса будет определен, если условие (9) записать в виде

$$\left| \sum_{i=1}^i \left\{ \left[\left(\sum_{i=1}^{i-1} \Delta x_{ij} \right) \Delta y_{ij} \right] - \left[\sum_{i=1}^{i-1} (n \Delta y_{ij}) \right] \Delta x_{ij} \right\} \right| \leq \sum_{i=1}^i (0,5\epsilon \Delta x_{ij}). \quad (10)$$

Из анализа выражения (10) следует, что при обработке каждого шага требуется выполнить четыре операции умножения на Δx_{ij} и Δy_{ij} , четыре операции сложения, одну операцию вычитания, одну операцию определения абсолютного значения, одну операцию сравнения. Это примерно такой же объем вычислительных операций, который требуется на каждый элементарный шаг при кусочно-линейной аппроксимации шаговых траекторий методами, приведенными в [5]. Следует отметить, что операции умножения допускают простую реализацию, так как Δx_{ij} и Δy_{ij} принимают значения $-1, 0, +1$. При таком малом объеме вычислительных операций будет довольно проста и техническая реализация метода аппроксимации (аппаратная или программная).

К достоинствам метода, кроме простоты его реализации, следует отнести также то, что в цикле аппроксимации не требуется запоминания точек, задающих аппроксимируемый участок кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольховский Ю. Б., Мановцев А. П., Новоселов О. Н. Сжатие данных при телеизмерениях.— М.: Сов. радио, 1971.
2. Чеголин П. М., Леонович Э. Н., Савенков В. П. Автоматизация преобразования сложных форм графической информации.— Минск: Наука и техника, 1973.
3. Авдеев Б. Я. и др. Адаптивные телеизмерительные системы.— Л.: Энергоиздат, 1981, с. 37.
4. Виттих В. А. Сжатие данных при экспериментальных исследованиях.— В кн.: Вопросы кибернетики. Сжатие данных. М.: Сов. радио, 1974, с. 20.
5. Федоренко М. П., Тормышев Ю. И. Методы линеаризации сложных форм траекторий.— Электрон. моделирование, 1980, № 2.
6. Тормышев Ю. И., Федоренко М. П. Методы и средства формирования шаговых траекторий.— Минск: Наука и техника, 1980, с. 118—119.

Поступила в редакцию 25 мая 1984 г.

УДК 53.088.6

В. В. ШЕВЧУК

(Москва)

СИНТЕЗ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДАВЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

В настоящее время в измерительной технике все чаще выдвигаются требования обеспечения высокой точности измерения при значительном быстродействии и большом уровне влияющих факторов. Требования по быстродействию определяются как необходимостью исследования быстропротекающих процессов, так и появлением информационно-измерительных систем с широкой сетью входной коммутации, для чего нужны измерительные устройства с малым временем отклика на входное ступенчатое воздействие. При проведении измерений в тяжелых эксплуатационных условиях большую неприятность доставляют аддитивные помехи, не позволяя получить требуемую точность измерений. Наиболее остро данная проблема стоит в тензометрии, где приходится измерять малые полезные сигналы при постоянно возрастающем уровне воздействия помех, являющихся в основном низкочастотными наводками промышленных частот и их гармоник. Решение проблемы с помощью известных способов фильтрации не позволяет одновременно удовлетворять указанным требованиям.

В области низкочастотных аддитивных помех при возможности независимого воздействия на измеряемый сигнал или помеху следует использовать способ измерения, заключающийся в весовом суммировании